

アインシュタインへの伝言

物理は単純明快である．もしその理論の解説が不明瞭で理解不能な場合，ほとんどは，その解説者の理解が不十分かまたはその元の理論が間違っているかのどちらかである．

藤田 丈久

はじめに

アインシュタインが20世紀初頭に発表した3編の論文は、物理学上の業績として偉大である事は説明するまでもない事である。特に、光電効果の仕事は物理学に極めて重要な影響をもたらした事は疑い得ない。当時 Planck が提唱し、しかし Planck 自身本当には信じていなかった量子仮説をいち早く光電効果を説明するために応用したセンスは際立っているし、アインシュタインが新しいアイデアと豊かな発想を持っていた事を如実に示している。

しかしながら、一方において、アインシュタインが等身大をはるかに超えて、あまりにも有名になり、過大評価されてしまったために、20世紀後半の理論物理学に対して負の遺産を残してしまった事も事実である。この半世紀間の理論物理学においては、アインシュタインの呪縛により人々の自由な発想がかなり奪われ、制限されてきたのである。そして、この事は予想を超えて重大な影響を理論物理学に与え続けており、それがアインシュタインの本意では無いにせよ、この事実は極めて深刻である。具体例として、近年の素粒子論および宇宙物理学はこの呪縛により、正しい方向性を大幅に失いつつある。例えば最近の超弦理論では、その研究者達自身が物理的観測を再現する事に興味が無いと言って平気である程である。さらに宇宙論は一点から爆発したというビッグバン模型が全てであるという根拠のない「信仰」にがんじがらめになっていて、この宇宙が閉じた宇宙か開いた宇宙かなどというおよそ非物理的な問題を深刻に議論している。ついに、最近では宇宙の真空からエネルギーが生み出される可能性があるなどと、全く非物理的なレベルの議論さえされている。

この呪縛とは何か？、それはアインシュタインの一般相対論の事であり、この奇妙な理論が理論物理学の正常な発展を阻害し続けてきたのである。アインシュタインの一般相対論は1960年代までは、理論物理学が比較的正常な発展をしていたために、物理学的にはほとんどまともに扱われる事はなかった。勿論、一般相対論に対する数学上の関心とそれに関連する進展がなされてきた事は事実であるが、これは物理学と関係する自然現象に応用しない限り、何も問題を起こさないのである。ここで正常な発展と言っているのは、1960年代までは、物理学上で理論を発展させた時には、常に実験と比較しながら検証を重ねてきたと言う意味を含んでいる。その当時までに、少数ながらも心ある物理学者達は、一般相対論は水星の近日点移動の物理的観測を正しく予言出来ていない事を知っていたものと思われる。後で見るように、この検証

は Newton 力学をきちんと解けばよく、それ程難しい数学を使う事無くできるものであり、学部生でも十分可能である。従って、物理学における観測量は何かと言う問題をしっかり考える物理屋は当然、この水星の近日点移動の問題を検証した可能性があり、従って、観測値は一般相対論では理解出来ない事がわかっていたものと思われる。

しかしながら、1970年代に入ると、ほとんど当然のように一般相対論が信じ始められ、その一般相対論の理論的検証となるとぱったりと止まってしまった。この「一般相対論信仰」の一つの根拠になったのが宇宙の背景輻射である。この宇宙は光(電波)で満ちていると言う観測事実自体は大変面白い事であり、発見した二人がノーベル賞を受賞したのも当然である。しかし、この宇宙の2.7度K輻射はある時点で宇宙が非常に熱い時があったと言っているだけであり、それ以上の事を宇宙の背景輻射から学ぶ事は出来ていないし、また良くわからない。

さらに困った事に、現代物理においては、アインシュタインの一般相対論を批判する事がほとんどタブーにさえなっている。しかしながら、アインシュタインが一般相対論を作るにあたり出発点としているのは、Gedanken Experiment(思考実験)なのである。これは科学において最も重要な基本姿勢である「実験を基礎として理論を作る」という大原則をくずしてしまった事に対応している。実際、以下に見るように、一般相対論が基礎を置いている等価原理は相対性原理と矛盾している。そして、彼が量子力学を理解しようとする事よりも一般相対論にこだわってきた事実を見る限り、アインシュタインが相対性原理を深く理解していたとは到底考えられないのである。まずはアインシュタインの呪縛をといて新しい物理学を作って行く事がこれからの理論物理学の緊急課題となっている。その際、現代の我々物理屋にとって重要な事は、「昨日までの専門家が明日も専門家である保障はない」という当たり前の事を常に頭に入れておく事であると思われる。恐らくこの事は、どの分野でも等しく当てはまる事であり、常に新しい事を考えそして理解し続けるためには余程謙虚である事が重要であるという当然の事を忘れてはならないという事であろうと思われる。

この本では若い人達がアインシュタインの呪縛から解放され、自由に物理を考えるための一石になる事の願いを込めて書いている。一般相対論の数学は微分幾何を駆使しているため、かなり複雑である。しかし、その物理は単純である。さらに、一般相対論ではなく、通常の場合の理論の言葉で、重力を理解し、また光が重力と場の理論的に相互作用するという事も解説して行きたい。そして、できる限り平明にして学部の3年生でも、さらには高校生でもしっかり考えればその本質は理解できるように解説して行くつもりである。これはある意

味で、アインシュタインへの伝言でもある。

具体的な内容として、まず宇宙論を紹介しビッグバン模型の問題点を指摘する。次に、相対性原理の持っている意味を解説し、何故それが必要であったかを明確にして行こう。そして、この事を踏まえて、一般相対論の問題点をしっかり理解出来るようにしたい。さらに、新しい重力理論を解説して行き、それに基づく新しい宇宙論にも触れてゆきたい。特に、宇宙論の具体的な問題に関しては、今後の若手の研究を待つ事になる問題が多くある。最後に、今後の物理学の展望を議論する。特に、何が物理学で基本原理として信頼して良いかと言う問題を取り上げている。いずれにせよ、この本を読みそして相対論について考える事により、新しい理論体系をしっかりと作ってゆくための基礎的な頭のトレーニングになる事を願っている。

物理の非専門家にとっては、この本の一部を理解しその他は読み飛ばしても必ず何か得るものがあるようにと、本の構成を考えている。細かい数式は理解できなくても、現代物理が抱えている問題点は理解して、さらには将来の物理の方向も見据えられるように理解を深めて貰いたいと思っている。数式を使った解説は基本的には付録に入れてある。付録はある程度物理の素養がないと読んで面白いと思う事は難しいかも知れない。しかしながら、付録の一部が若い物理屋にとって新しい問題を見つけるための「雑談場所」として活用されたら最高であるという思いはある。いくつかの問題で、さらに研究されるべき問題点を挙げてあるし、それらが将来発展的に理解される事を望んでいる。

この本を読み進む前に、本の内容とは直接は関係しないのだが、一つコメントをしておきたい。この解説書は、前述したように若い人達が一般相対論に代わる新しい量子重力の物理を出来るだけしっかりと理解できるように、基本的な物理学をわかり易く説明するべく最大限の努力をしている。しかし、これは物理学において「自転車の乗り方」を教える事に対応している。この「自転車の乗り方」を正しく理解する事は当然若い人達にとって重要である。しかしながら、だからと言って簡単に物理がわかるわけではない。ここで一つお話しを紹介しよう。昔、何人かで「自転車の乗り方」の議論をしていた時に、友人の一人が滔々と自転車の乗り方について詳細な解説をした。これに対して、もう一人が「　　さんは自転車に乗れるのですか？」と尋ねたところ、彼は怒ったように「僕が自転車に乗れる訳がないでしょう。歩いていても人にぶつかるくらいだから」と言ったという、愉快な本当の話である。この自転車の乗り方の解説は非常に論理的であったが、しかしそれが本当に正しいかどうかは乗ってみないとわからない面もある事は確かである。この話しと直接関係はないが、物理がしっかりわかって実際に正しい計算が出来るようになるためには、自転

車で言ったら「自転車にきちんと乗れる事」が必要である。この本を読んでみて、具体的な計算を試してみたくなり、実際それが出来るようになったら、それは物理学において「自転車に乗れた事」に対応している。恐らくは、物理で自転車に乗れるレベルまで行くためには、もう少しアドバンスな教科書を読み、その内容を自分で検証する事が必要になる事と思われる。しかし、誤解しないでほしいのは、物理学の理解は数学の理解とは違う事である。数学における式の変形は複雑な場合が多いが、それは困れば誰かに、例えば数学者に聞けば良いのである。むしろ物理屋にとって、数学関係に必要な事は単純計算（掛け算とか三角関数の変形とか）をいつもしっかり行い、その体力をつけておく事である。物理学の理解はやはり自分でその現象をまずしっかり理解して、自分の頭の中で絵を描く事である。正しい絵を描ければ、たとえ数学での計算が多少間違っていたり、式の変形が遅かったりしても、全く問題なく物理学を深く理解でき、そしてその楽しさが良くわかるものである。常に、自然現象に対する正しい絵を描く直観力を大切にしたいものである。

これまで、物理学における日本の「秀才学生」とは、どちらかと言えば「翻訳者の」な人達が主流であった気がする。少なくとも、大学受験に強い事は必ずしも物理の理解力と関係あるとは言えず、それどころかじっくり考える力と言う観点からすれば、むしろマイナスになっていると思った方が良い程である。実際、現在においても、教科書の理解が速かったり、試験においても正確で速く答を出す事が、秀才である事の条件であった様に思われてならない。しかし、研究者になった途端、現実とは全く逆で、遅くてもいいから、じっくりしかも深く物理学を理解する事しか、面白くて新しい研究は出来ない。この理由は明らかである。物理を理解すると言う事は自分の中に、自分独自のしっかりした「ピクチャー」を作る事である。新しい事を理解する時には、その自分のピクチャーとの整合性を取る事になるため、当然、時間が掛かってしまうのである。一方、秀才は自分のピクチャーを作らないで、常に新しいキャンバスを用意して解説された事をそのまま書き入れて、そしてそれを直接に言葉として他人に説明する。これは物理の理解と言う点では「自転車に乗れていない」事に対応している。実際、物理の教授達を見ると、物理では「自転車に乗れていない」のだが、しかし理解していると思込み、これまでの古い知識だけに頼って教えている人達があまりにも多いという現実には驚かされる。しかしながら、これからの若い人達は自分の「ピクチャー」をゆっくり作って行き、常に物理で「自転車に乗れる」ように頑張り、楽しく物理学を勉強して行って欲しいものである。そして物理における考える力をしっかり身につけて行く事を切に望んでいる。

この本は科学を学ぶ研究者の立場から書いている。一見、当然に見える事ではあるが、科学とは自然を理解しようとする学問である事を常に認識する事が重要である。科学の研究はとてつもなく面白く楽しいものである事は確かであるが、しかし、科学の研究には重大な「限界」が存在している。それは研究対象であるその「分野」が一度理解されてしまうと、その分野は第一線の研究対象では無くなるという事実である。実はこの事と向き合う事は非常に難しいし、勇気の要る事である。研究者は誰でもその分野で「専門家」になると何時までのその分野にいたがるものである。たとえその研究対象が分かってしまっても他の新しい分野の研究を始める事は至難の業である。このため、自然現象を理解する事をやめて科学を「エンジニアリング」(科学を作る事を)しようとする研究者があとを絶えない。これだと自然現象のチェック(実験との整合性)が入らないため、何でもありの世界になっている。ブラックホールや超弦理論などの研究者の多くはその典型である。その意味においても、物理学は常に難しい局面にいるものであり、この事を理解した上で、自然科学の研究を遂行して欲しいものである。

なお、ある程度理論物理学を理解している若い人々のために、数式を使った新しい重力理論と場の理論についての解説を付録に入れてある。数式は言葉と同じでそれに慣れていないとなかなか自分の中に入ってくる事は難しいとは思ふ。逆に言えば、慣れればその方が簡単であるということの意味している。さらに、これから物理を学ぼうとする若い人達用に、力学、電磁気学、量子力学、場の理論といった基本的で重要な物理学を解説してある。これら基本的な物理学をぶれる事無く、しっかり理解して行けば、一般相対論の問題点だけではなく、今後の物理学をしっかりした物にして行く上において、若い研究者には必ずプラスになると考えている。しかしながら、専門的な記述はどうしても不十分になっているので、もしこのレベルを超えてより具体的な詳しい専門書が必要な場合、拙著「Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory」(第2版, Nova Science 社, 2011) と「Fundamental Problems in Quantum Field Theory」(Bentham Publishers, 2013) を参考にして頂ければ幸いである。但し、前者の場合、かなり専門的で難しい部分も含まれているので、院生諸君にとっては理解できない部分があっても気にすることはないと思われる。一方、後者の本に関してはそれ程難しい記述は入れてなく、場の理論におけるシンプルな部分のみを解説しているのので、院生は勿論、学部4年生でもきちんと理解する事は十分可能であると考えている。

目次

第 1 章	宇宙は点から創生？	1
1.1	ビッグバン模型	2
1.1.1	宇宙の背景輻射	3
1.1.2	ヘリウム原子のアバundance (存在比)	3
1.1.3	双子の星	4
1.2	ビッグバン宇宙論への反証	5
1.2.1	銀河形成	5
1.2.2	反物質世界がない	5
1.2.3	フォトン・バリオン比	6
1.2.4	無限に遠い過去	7
1.3	時間と空間	8
第 2 章	相対性原理と特殊相対論	11
2.1	相対性原理	11
2.1.1	特殊相対論	12
2.2	ガリレオの相対性理論	12
2.3	相対性理論	14
2.3.1	座標の Lorentz 変換	14
2.3.2	相対論における速度の和	15
2.3.3	運動量の Lorentz 変換	16
2.3.4	微分量の Lorentz 変換	18
2.4	相対性理論の具体例	19
2.4.1	光のドップラー効果	19
2.4.2	大気圏で生成された μ -粒子の寿命	20
2.5	相対性理論の適用範囲	21
第 3 章	一般相対論とその問題点	23
3.1	一般相対論の方程式	24

3.1.1	一般相対論の直感的導出	24
3.1.2	一般相対論と重力場	25
3.1.3	エネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$	26
3.1.4	一般相対論の数学は複雑，物理は単純	26
3.1.5	計量テンソル $g^{\mu\nu}$ の問題点	27
3.1.6	物質に対する方程式の欠如	28
3.2	等価原理	29
3.3	重力ポテンシャルと Dirac 方程式	31
3.4	重力問題の方向性	32
第 4 章	新しい重力理論と宇宙論	35
4.1	新しい量子重力の理論	35
4.1.1	古典場と量子場	36
4.1.2	重力を含む Lagrangian 密度	37
4.1.3	重力場の方程式	39
4.1.4	重力場中の Dirac 方程式	39
4.2	光と重力場の相互作用	40
4.2.1	光と重力場の相互作用の検証	40
4.3	重力場中の Dirac 方程式の非相対論極限	41
4.3.1	Foldy-Wouthuysen 変換	41
4.3.2	相対論的な Newton 方程式	42
4.4	重力付加ポテンシャルによる周期のズレ	43
4.5	GPS 衛星周期のズレ	45
4.5.1	静止衛星 (GSS, Geostationary Satellite) 周期のズレ	46
4.5.2	地球の公転の遅れ – うるう秒	47
4.5.3	うるう秒年代測定	48
4.5.4	月の後退	49
4.6	一般相対論の予言	51
4.6.1	一般相対論と観測量	51
4.6.2	一般相対論による付加ポテンシャル	52
4.6.3	重力崩壊	53
4.6.4	水星軌道の進み	53
4.6.5	これまでの理論計算の予言	54
4.6.6	一般相対論の物理的観測量	55
4.6.7	Feynman の非公開研究ノート	56

4.7	新しい宇宙論	57
4.7.1	コスミックファイアボール	57
4.7.2	前宇宙の残骸	57
4.7.3	無限の過去・未来と無限の空間	58
4.7.4	新しい宇宙像	59
4.7.5	宇宙の無限性と背景輻射	60
4.7.6	無限宇宙 (Mugen Universe)	61
4.7.7	無限個の銀河の宇宙	62
第5章	物理学の展望	63
5.1	量子化	63
5.2	Dirac 方程式の導出 (Dirac の手法)	64
5.2.1	Dirac 方程式の直感的導出法	65
5.3	Dirac 方程式の新しい導出法	66
5.3.1	電磁場の Lagrangian 密度	66
5.3.2	ゲージ不変性	67
5.3.3	ゲージ不変な Lagrangian 密度	67
5.4	古典場の理論	69
5.4.1	実スカラー場	69
5.4.2	複合粒子に対する Klein-Gordon 方程式	71
5.4.3	電磁場とスカラー場の相互作用	71
5.4.4	ゲージ場とスカラー場の相互作用	71
5.4.5	Higgs 機構とその問題点	72
5.4.6	将来の展望	73
5.5	量子色力学 (QCD) の問題点	74
5.5.1	自由 Lagrangian 密度のゲージ依存性	75
5.5.2	摂動論が定義できない!	75
5.5.3	QCD における観測量	77
5.5.4	QCD 理論計算の展望	79
5.6	場の量子論 – 無限大と観測量	80
5.6.1	ゲージ理論信仰の崩壊	81
5.6.2	次元正則化	82
5.6.3	朝永の推論	83
5.7	繰り込み理論 (フェルミオン)	84
5.7.1	フェルミオンの自己エネルギー	84

5.7.2	フェルミオンのバーテックス補正	85
5.7.3	Ward の恒等式	86
5.7.4	Lamb シフト計算の困難	87
5.8	繰り込み理論 (フォトン)	88
5.8.1	フォトンのバーテックス補正	89
5.9	カイラルアノマリー	90
5.9.1	三角形ダイアグラム	90
5.9.2	アノマリー方程式の消滅	91
5.9.3	フォトンの自己エネルギーと繰り込み理論	92
5.9.4	Curie の原理 (対称性の保存)	93
5.10	弱い相互作用の繰り込み理論	94
5.10.1	自発的対称性の破れ	94
5.10.2	Lorentz 条件 ($k_\mu \epsilon^\mu = 0$) の導出	96
5.10.3	有限質量ベクトルボソンの伝播関数	97
5.10.4	ベクトルボソンによるバーテックス補正	97
5.11	繰り込み理論のまとめと未解決問題	99
5.12	場の理論のまとめ	100
5.13	量子生物	102
5.13.1	量子生物	102
5.13.2	溶液の物理	103
付録 A	力学	105
A.1	保存力	106
A.2	1次元調和振動子	107
A.3	Kepler 問題	107
A.4	Lagrange 形式	109
A.4.1	最小作用の原理	110
A.4.2	一般座標での Newton 方程式	111
A.5	正準形式	112
A.5.1	正準変換	112
A.5.2	Hamilton-Jacobi の方程式	113
A.6	運動方程式と相対性理論	115
A.6.1	Newton 方程式と Galilei 変換	115
A.6.2	Newton 方程式と Lorentz 変換	115
A.6.3	Maxwell 方程式と Galilei 変換	116

A.6.4	Maxwell 方程式と Lorentz 変換	116
A.7	力学演習問題	117
A.7.1	単振り子	117
A.7.2	スケール変換	118
A.7.3	Kepler 問題 (軌道は楕円)	119
付録 B	電磁気学	123
B.1	Maxwell 方程式	124
B.1.1	Gauss の法則	124
B.1.2	Poisson 方程式	124
B.1.3	Gauss の法則の積分形	125
B.1.4	単極子が存在しない	125
B.1.5	Faraday の法則	126
B.1.6	Ampere の法則	126
B.1.7	電気双極子と磁気双極子	127
B.2	ベクトルポテンシャル (ゲージ場)	128
B.2.1	電子と電磁場の相互作用	129
B.3	電場と磁場のエネルギー	130
B.3.1	クーロン力	130
B.3.2	電場のエネルギー	131
B.3.3	磁場のエネルギー	131
B.4	物質中の電場と磁場	132
B.4.1	鏡像法	132
B.4.2	誘電体	133
B.4.3	磁性体	134
B.4.4	電磁気学の難しさ	135
B.4.5	電流とは何か?	136
B.5	モノポール, EDM と時間反転不変性	138
B.5.1	モノポール	138
B.5.2	EDM	138
B.5.3	モノポールと EDM の Hamiltonian	139
B.5.4	電荷とは何か?	140
B.6	電磁波	141
B.6.1	Maxwell 方程式	141
B.6.2	電磁場のエネルギー	142

B.6.3	電磁波の性質	146
B.6.4	電磁波と場の量子化	147
B.6.5	電磁波の発振機構	147
B.6.6	電磁場の量子化	149
B.6.7	フォトンの状態関数	151
B.6.8	フォトンの偏光	152
B.6.9	偏極ベクトルの群論的解説	153
B.7	電磁気学演習問題	154
B.7.1	例題 (1) : 球の表面に電荷 Q がある時の電場	154
B.7.2	例題 (2) : Biot-Savart の法則	155
B.7.3	例題 (3) : 直線電流が作る磁場	156
付録 C	量子力学	157
C.1	Schrödinger 方程式	157
C.1.1	Ehrenfest の定理	158
C.1.2	束縛状態	158
C.1.3	表示の問題	159
C.2	水素原子	160
C.3	Maxwell 方程式と Schrödinger 方程式	161
C.3.1	類似点	161
C.3.2	相違点	161
C.4	場の理論としての Schrödinger 方程式	162
C.4.1	Lagrangian 密度	162
C.4.2	Lagrange 方程式の導出	163
C.4.3	Schrödinger 場	164
C.4.4	Hamiltonian 密度	164
C.5	量子力学演習問題	166
C.5.1	調和振動子	166
C.5.2	生成・消滅演算子	167
C.5.3	摂動論	168
C.5.4	変分法	169
C.5.5	WKB 法 (準古典近似)	171
C.5.6	Hamilton-Jacobi の方程式	171
C.5.7	量子化とエルミート性	172

付録 D	統計力学	175
D.1	スピンと統計	175
D.1.1	フォトンとボーズ統計	176
D.1.2	フェルミ統計	176
D.1.3	複合粒子のスピンと統計	177
D.2	磁気トラップ法	177
D.2.1	レーザー冷却	178
D.3	古典統計力学は物理的に意味があるか？	179
D.3.1	調和振動子	179
D.3.2	直感的理由	180
付録 E	量子場の理論	181
E.1	経路積分の問題点	181
E.1.1	QED での Wilson のクォーク閉じ込め	181
E.1.2	量子力学における経路積分	183
E.1.3	経路積分による調和振動子	184
E.1.4	経路積分の限界	185
E.1.5	場の理論における経路積分	186
E.1.6	場の理論における Feynman の経路積分	186
E.2	電磁場の Lagrangian 密度	187
E.2.1	電磁場の量子化	188
E.3	Dirac 場の Lagrangian 密度	189
E.3.1	Dirac 場の量子化	189
E.4	量子重力場の理論	191
E.4.1	量子重力場の Lagrangian 密度	191
E.4.2	量子重力の運動方程式	192
E.4.3	重力場の量子化	192
付録 F	原子力事故の検証	195
F.1	JCO の事故	195
F.2	核分裂の連鎖反応	196
F.3	何故，臨界になったのか？	196
F.3.1	最初の中性子源	196
F.3.2	$n-^{235}\text{U}$ 核分裂の平均自由行程（即発中性子）	197
F.3.3	中性子と水分子との衝突	197
F.3.4	$n-^{235}\text{U}$ 核分裂の平均自由行程（熱中性子）	198

F.3.5	中性子の核反応時間	199
F.4	臨界時の総エネルギー	199
F.5	臨界は何故止まったか？	199
F.5.1	7 バッチ目の核分裂	200
F.5.2	8 バッチ目の核分裂	200
F.5.3	核燃料濃縮度で事故は起こったか？	201
F.6	まとめ	202
付録 G	物理屋の数学公式	203
G.1	何故偏微分か？	203
G.1.1	偏微分の定義	204
G.1.2	2 変数関数の偏微分	204
G.2	$\delta(\boldsymbol{r})$ 関数	205
G.2.1	Green 関数	206
G.3	Gauss の定理	206
G.3.1	立方体での Gauss の定理	207
G.3.2	一般の場合の Gauss の定理	208
G.4	Stokes の定理	208
G.4.1	長方形での Stokes の定理	208
G.4.2	一般の場合の Stokes の定理	209
G.5	線形代数	209
G.5.1	エルミート行列	209
G.5.2	ユニタリー行列	210
G.5.3	行列式	210
G.5.4	行列式の公式	211
閑話休題 1	小泉のラウエの斑点	213
閑話休題 2	西島和彦先生との議論	219
閑話休題 3	Max-Planck 研究所での大陸浪人	225
閑話休題 4	テニスの上達法	231
閑話休題 5	物理は 50 歳台から	249

第1章 宇宙は点から創生？

宇宙は広大である。その広大さは、銀河の広がりを見て判断している。およそ1千億個程度の銀河がこの宇宙には存在していると考えられている。銀河は星の集団であり、およそ100億個程度の星から成り立っていると考えられている。これらの星および銀河の運動は基本的には4つの力により記述されるものと考えて良い。星が粒子(核子と電子)の集団から形成され、銀河が星の集団で形成されて、そしてこの宇宙が銀河の集団で形成されている。従って、またこの宇宙がさらに大きな集団(Mugen Universe)の一部であるとしても不思議な事でもないし、十分ありうる事であると考えられる。但し、我々の世界との相互作用は恐らくは無視できるほど小さいであろうから、観測は不可能であろう。しかしながら、現在の宇宙論はこの我々の宇宙が全てであるという描像を取っている。それはアインシュタインの一般相対論を基礎にしたビッグバン模型が宇宙論の中心であり、宇宙の描像はそれから作られているからである。しかしながら、この不思議な模型のために、宇宙物理学が物理屋にとって科学として受け入れがたく、なかなか「物理学」になれない一つの原因であると思われる。多くの学部学生が一度は宇宙物理学に興味を持つ事がよく見られるが、それは宇宙物理学には夢があるからであると思われる。しかし、ちょっと油断すると単なる夢に終わってしまい、科学になり得ない「お話」のレベルになっているため、本当に宇宙物理を物理学として研究したいと思う学生は大半が失望してしまうのである。科学はSFではない。だから、どんな些細な現象の理解でも証明でもほとんどの場合はひどく難しく大変なのである事は言うまでも無い。

宇宙物理学においては、観測を強化して、出来るだけ多くの「同じ状況の現象」を見つけて行く事であろう。科学の本質は、一つの実験に対して、正しく実験を行ったら必ず同じ結果が再現されると言うものである。しかし、宇宙物理における「再現性」とはどういう定義をしたら「実験による再現性」との整合がとれるのかと言う問題をしっかり考えておく事が大切である。

1.1 ビッグバン模型

現在、物理屋の大半はビッグバン模型を信じていると考えられる。しかしながら、その「お話」はとても科学になっているとは言えないものである。つまりはビッグバン模型が物理になっているとは到底言えない模型であるが、しかし基本的にはこの宇宙が膨張している観測事実を基にして、それを時間的に元に戻してゆくと1点に凝縮するではないかという素人的な発想がその出発点である。このような、宇宙が何も無いところから新しく作られるという発想には、西洋社会が慣れ親しんできた「天地創造」の考え方の影響が多分にある気がする。全てのものは何か新しく創生されるという固定概念にとらわれている結果、このビッグバン模型が受け入れられ、そして信じられて来たのではないかと考えられる。一方において、東洋の思想はこれとは異なり、物は形を変えながら繰り返してゆくという思想の方がより受け入れられていると思われる。この思想の科学的な根拠は勿論あるわけではないが、しかしこの宇宙の創造に関しては、繰り返しの考え方に近いものであるとした方が矛盾がなく、ビッグバン模型はやはり「神話」であったと言える事がこの本を読み進みそして理解して行けば、明確になるものと思う。科学的な立場からすれば、このどちらもそれなりの意味を持っているのだが、科学はむしろその独自の立場から自然を理解して行く事を優先して行く事になり、思想との整合性はその後に行う事が最も自然な事である。

ビッグバン模型が出発点としている事、すなわち「何かが爆発して宇宙が膨張したという事」は観測事実であると考えられるが、だからといって宇宙が一点から爆発して膨張したと短絡するのは科学者の考える所ではない。そもそも一点から爆発して膨張したとする時のその一点のエネルギーは何処から来たのか全く分からない。それはこれまで知られているエネルギー源には無いからである。このような御伽噺程度の理論を何故、人々が信じる事になったのであろうか？その根拠になっているのが一般相対論である。実際、アインシュタインは一般相対論を作るにあたり、恐らくは、電磁場と同じような方程式を重力場に対しても作りたいと思った事が出発点であらうという事は想像出来る。しかしながら、電磁場を場の理論として深く理解すると言う事が必ずしも十分ではなかった1910年代であるため、この一般相対論には様々な問題点があり、およそ信頼できるという理論形式ではない。さらに言えば、アインシュタインは自然界において、一般相対論で何を具体的に記述したかったのであろうかと言う、その対象が存在していない。従って、一般相対論は宇宙全体を記述したいと言うような荒唐無稽で抽象的な問題になっているため、自然現象を記

述するという物理にはなっていないのである．このため，一般相対論は数学は複雑，物理は簡単という奇妙な理論になっていると言える．しかし，この事はあとで詳しく解説して行く事にして，まずは観測事実から検討して行きたい．

1.1.1 宇宙の背景輻射

我々の宇宙は光（電波）で満ちている．これは携帯電話の電波が地球上に飛び交っていると言うレベルの話ではない．この宇宙の背景輻射に対応している電波は Penzias と Wilson により 1960 年代に偶然発見されたものである事は良く知られている．彼らは人工衛星からくる電波をより精度良く観測しようとして検出器の改良を重ねていた．当時の人工衛星から発せられる電波は非常に弱く，それをいかに正確にキャッチするかという純粋に技術的な問題で大変な努力をしていた．しかしながら，どの様に検出器を改良してもついにノイズを消す事が出来なかったのである．すなわち，この宇宙は何処から来たかわからない電波で満ちており，そしてそれが宇宙の背景輻射と呼ばれるものである．現在までのところ，この宇宙の背景輻射は完全に等方的である，つまり，宇宙のどの方角から来ているとは言えなく，どこからも来ているという事が観測事実となっている．さらに，この背景輻射の温度分布を測定する事が出来ていて，それが絶対温度で約 2.7 度 K となっており，この温度分布も光が来る方角には依っていない事が観測されている．

1.1.2 ヘリウム原子のアバundance (存在比)

宇宙に存在する原子核を見ると，当然の事ながら陽子が 9 割を超えている．そして次に多いのがヘリウムである．そして原子量が増えるにつれて急速に存在確率は減って行くのである．何故ヘリウムが多いと不思議なのか？それは原子核の作られ方に依っている．もし原子核の生成が星が燃えて行く過程で行われるとするならば，その過程ではヘリウムはほとんど燃えてしまう事がわかっているのです．ヘリウムの量は少ないはずである．ところが，観測事実は宇宙に存在するヘリウムの量は陽子について多いのである．そして，ヘリウムよりさらに重い原子核はより少なくなっていくのが観測されている事実でもある．

この事を理解する最も手取り早い方法は，宇宙初期に何か熱い状態を仮定して，その暑い内にヘリウムを作ると言うものである．その状態の温度が十分熱い場合で，熱的な平衡状態にある時は，中性子と陽子はほぼ同じ割り合いで

存在するはずである。宇宙が膨張して温度が下がり始めると、中性子が崩壊し始める。この寿命は10分少しである。この間にまずは重水素を作る必要がある。近くに陽子と中性子が存在する限り、重水素は簡単に出来る。そして、重水素が沢山作られるとそれらは次々とヘリウムになって行くのである。しかし、宇宙が爆発(膨張)している限り、温度は下がって行き、ヘリウムを作れなくなる。さらに、ヘリウムが2個融合するとベリリウム8になるのだが、これは安定な原子核ではないのでここから先の原子核が簡単には出来ない。このベリリウム8が不安定であるという事が、ヘリウム原子がこの宇宙に数多く存在している最も重要な原因になっていると考えられる。恐らくは、これより重い原子核は星の内部における核融合反応で作られて行くものと考えられている。この宇宙において、エネルギー源として存在しているものに主として3つある。一つは核融合・核分裂等の原子核の束縛エネルギーの開放と関連するものである。もう一つは重力エネルギーである。この重力によるポテンシャルエネルギーはいかなる質量を持った粒子に対しても常に引力であるために、全体としては巨大なエネルギーになっている。最後に、もう一つのエネルギーを挙げよう。これは素粒子のもつ運動エネルギーである。例えば、光子は物質に吸収されない限り、常に一定の運動エネルギーを持っている。波長が十分大きくて電波領域のエネルギーになってこの宇宙にフラフラと存在しているのが、宇宙の背景放射の光子である。この場合、電波領域のエネルギーは通常の原子による吸収ではかなり困難である。すなわち、自然界に存在する無機質による吸収は実質的にはかなり困難であると考えられる。従って、ひとたび生成された背景放射の光子はこの宇宙に長い間、漂い続ける事になると思われる。

1.1.3 双子の星

現在までにいくつかの双子の星(クエーサー)が見つかっていると考えられている。その星達から来る光のスペクトルが良く似ており、この双子の星は同じ星を見ていると考えられた。しかしながら、最近の宇宙物理学における観測では、双子の星は実際に別々の良く似た二つの星ではないかと言う議論がされている。現実的に星の生成を考える場合、その領域における分子雲の構成粒子となる陽子および原子核の分布状況は大雑把に言ってほとんど同じものだとしても矛盾する事はない。従って、双子の星がその生成物質を良く似た別々の星達であるとしても、それ程不思議な現象では無いのかもしれない。

1.2 ビッグバン宇宙論への反証

それでは、一点から爆発したというビッグバン宇宙論に対して、何らかの観測上の反証は存在しているのでしょうか？

1.2.1 銀河形成

実は最も基本的で観測との整合性が取れない問題として、銀河形成がある。ビッグバンは一点から爆発したと考えているので、当然その後のエネルギー放出は等方的であり、また極めてユニフォームであるべきである。この場合、それではどうしたら対称性を壊して銀河形成ができるのであろうか？その答えは、勿論「不可能」である。総計的なゆらぎから銀河を作る事が出来ない事は良く知られているし、直感的にもそれが難しいであろう事は想像に難くない。

最近では、銀河系集団の分布にかなり奇妙な構造がある事が知られている。これは「宇宙の大規模構造」と言われているものであり、何か壁のように並んでいる銀河系集団が発見されている。このような銀河系集団の構造は、ビッグバン宇宙論ではどのようにしても説明不能である。この銀河系集団の大規模構造こそが、新しい宇宙論を考える上で重要な参考になるべきものである。くり返し言う事になるが、理論のモデルは常に観測から出発するべきであり、宇宙論もその例外ではあり得ない。但し、宇宙物理が科学として難しいのは、繰り返しの実験が不可能である事によっている。従って、観測された事実から、整合性を保つ事ができる理論を構築してゆくしか他にしようが無いのである。

1.2.2 反物質世界がない

ビッグバンにおいて宇宙が一点から爆発したとすると、その最初の物質は明らかにエネルギーだけの塊である。従って、それはバリオン数で言ったら、バリオン数はゼロの世界である。ここで、バリオン数とは陽子や中性子の状態を1として定義している量子数であり、従って質量数 A の原子核のバリオン数は A となる。しかし、我々の宇宙は物質の世界(バリオン数がプラス)である。これはどうして可能なのであろうか？現在の所、バリオン数を破る力は実験的に見つかっていない。理論的には、ある時期に「大統一理論」という不思議な理論が流行していた事があったが、この理論は自発的対称性の破れの物理を正しく理解できていなかった頃に作られたものであり、2つの問題点がある。一つは、自発的対称性の破れを応用しているのであるが、基本的なところで完全

に間違っている。場の理論において系が持っている対称性が自発的に破れると言うような事はなく、場の理論の真空（負のエネルギー状態）が、ある種の対称性を持つ場合、それに付随する保存電荷がゼロの場合の真空エネルギーと比べて有限電荷をもつ真空の方がエネルギー的により低くなり、真の真空として実現される事があると言っているのにすぎない。真空が自発的に対称性を破る事など実際には勿論起こっていない。これは単純な間違いである。2つ目の問題点として、「繰り込み群」の応用がある。この「繰り込み群」は繰り込み理論を誤解した事により作られた理論に基づいており、全く意味の無い理論体系である。実際、フォトンの自己エネルギーは繰り込み不要であり、繰り込み群の元の式が存在していない。これらの事より、今となつては、大統一理論に関して言えば、信頼できるできない以前の問題である。1970年代の素粒子理論は極端に言えば、新しければ何でも良いという風潮があったように思われてならない。

実験の観点からしても、バリオン数を破る力は陽子崩壊の実験事実から言って、ほぼ否定されたと見て良いと思われる。直感的にも、陽子崩壊の実験を考える時、1万トンの水の中には約 3×10^{32} 個の陽子がある。もし陽子の寿命が 3×10^{32} 年だとしたら、1年間この水を観測したら1個の陽子崩壊が起こる事に対応している。最近の実験データはすでにこの寿命を超えており、陽子崩壊は起こらない事を示している。また、理論的な必然性はさらに無く、全く必要ないものである。

一方、反物質の存在に関しては、観測の方からすると、現在までにおいて反物質の世界の存在を示す証拠は何処にも見つかっていない。宇宙線の中に反陽子は見つかっているが、これは高エネルギーの宇宙線が他の物質と衝突して生成された反陽子が地球周辺で観測されたものと考えられている。

1.2.3 フォトン・バリオン比

宇宙の背景輻射で見たようにこの宇宙には光（電波）が非常に多い。実際、フォトンの方がバリオンと比べて個数で行って10億倍程多いと考えられている。この観測データをどのように解釈したらよいのであろうか？

理論的にはフォトンは常に真空から作られるのに対して、バリオンは最初にあったものからトータルでは増える事はない。その意味では、フォトンは常に増え続ける事になっている。特にエネルギーの低いフォトン（電波領域）は物質に吸収される可能性が低くて、一度生成されるとそれが消滅する事はかなり難しい事になっている。

さらに、光子は重力と無視できない強さの相互作用をする事がわかって来ているので、光子がバリオンと比べてどの程度の比率が合理的なのかは今後の課題である。しかし、この疑問自体が物理的に意味がある設問かどうかは、実は良くわからない。この事はバリオン自体が何処で作られたかと言う設問と同じ問題となる。この本で取り扱っている新しい宇宙論によれば、この宇宙の存在自体が無限に遠い過去から存在していたと言う事に基礎を置いている。一般相対論ではバリオンもこの空間もビッグバンと共に作られたと言う思想である。しかし物理学では、時間や空間自体の存在は仮定し、その上で物理学を作る事はできるが、時間と空間を認識し理解する事ができない。従って、空間が作られたと考える事には飛躍があり過ぎ、これは科学ではない。

1.2.4 無限に遠い過去

無限に遠い過去にすでにこの宇宙が存在していたという仮定に関しては、「無限に遠い過去」という時間が物理の研究対象にはならないと言う事に基づいている。理解不能である事を議論する事ほど愚かな事はない。従って、この宇宙に存在しているバリオン数は、元々あったものであるとする事が、我々ができる唯一の科学的方法であると考えている。一方において、光子は常にできたり消えたりするために、光子・バリオン比が本当に物理学の対象になると言い切る事ができるかどうか自信はない。しかし、観測事実はそれなりに意味があり、その観測量から何らかの有意な物理的な情報を引き出せるかどうかは今後の研究に待ちたい。

1.3 時間と空間

物理学により自然を記述しようとする場合、必ず、時間と空間がその全ての基礎となっている。宇宙論を議論する時もこの宇宙の広がり（空間）や宇宙の年齢（時間）が研究の対象になっている。しかし、この場合、時間と空間とは一体何者であろうか？良く考えてみるとその時間と空間を理解する事が不可能である事に気付かされる。哲学者の言葉を借りるまでもなく、例えば空間と言っているのは、物質の広がり的事である。物質が存在しない場合、「空間」の認識は出来ない。時間に関してはもっと深刻である。我々は時間と言ってもその瞬間しかわからないのであり、それは時間を認識できた事にはなっていない。従って時間がわかった事にはならない。恐らくは、時間の流れの認識に関しては、何かをあらわす記号により時系列を作り、これにより過去・未来を認識しているものと考えられる。従って、空間の広がりよりもより抽象的な形で時間を認識していると考えて良いと思われる。

物理学では、この時間と空間はパラメータである。すなわち、物質の状態を記述するために必要なパラメータと考えて良く、それ以上の事はわからない。Newton 力学では、物質（正確には質点、すなわち物質の重心）の座標の運動を記述する方程式になっている。この場合、質点の座標が時間と共にどのような変化をするかを記述する学問である。この場合、明らかに空間の座標は質点の座標であり、空間そのものを表しているわけではない。

自然界における物理法則を考える時、常に座標系（慣性系）を導入してその中で物理法則を記述する事になる。その場合、座標系自体を物理学の研究対象にする事は出来ない事である。座標系に対して一つ言える事は、どの慣性系も同等であると言う事であろう。これは相対性原理の基礎になっているが、勿論、証明は出来ない。しかし、現在までのところこの慣性系の同等性の仮定と矛盾している現象は見つかっていない。

このように自然界を記述する物理学は、物質の状態 $\Psi(t, r)$ に対して基本方程式をたてて、それによりあらゆる物理現象を記述しようとする学問である。この場合、時間と空間はパラメータであり、それ自体が研究対象にはなっていない事は前述したとおりである。それは、その物理現象が時間・空間内で起こっており、時間・空間を座標系として利用する事はしても、我々が理解できるのはその物理現象そのものであるという事によっている。

場の理論を正確に理解したならば、アインシュタインの一般相対論が物理学における「理論模型」にはなっていない事が良くわかるものである。アインシュタインは物質が存在すると、その近辺の時間・空間が影響を受けると言う

事を考えて理論体系を作ったが、これが自然現象とはかけ離れている事は場の理論を理解したものにとっては明らかな事である。繰り返すが、時間・空間はあくまでもパラメータであり、物理量は状態 $\Psi(t, r)$ で与えられるからである。

この「時間・空間」と「物理現象」の関係は、演劇における「舞台」と「役者の演技」の関係に似ていると思われる。物理現象は時間・空間の舞台上で起こっている自然の演技であり我々はそれを理解するべく努力しているのである。そして、大切な事は物理学においては自然の演技を理解し評価する事が全ての仕事であり、それ以上の事は不可能であるという事である。時間・空間自体を認識し理解しようとする事は、科学では可能な事ではなくて、それ以外の手法、例えば哲学の問題として考える事になるという事である。しかしながら、Kant の哲学を読む限りにおいては、彼自身も空間の認識は物質があって初めて可能である事を主張している事でもあり、科学的な認識に非常に近いものと考えられる。いずれにせよ、科学においては何を解明しようとしているのかという問題が出発点であり、そこから何が解明できるかをしっかり見て行く事が最も重要である。あとで述べるように、一般相対論における「時空のスケール」の変化という様な問いかけは、科学においては意味をなしていない事がいずれ明確になってくるものである。

第2章 相対性原理と特殊相対論

物理学の基本は相対性原理にある。原理と言うからにはそれ自体は証明出来ない事である。相対性原理とは何か？それは、地球上で発展させられた物理の理論がそれと等速直線運動をしている他の系（慣性系）においてもやはり同じ法則が成り立ち同じ観測量が得られるべきであると言う事である。例えば地球上でバネの実験をしたとする。その時その振動数や振幅が求められる。ここで相対性原理とは等速直線運動をしている電車に乗って同じバネの実験を同じ条件でしたとするとやはり地球上と同じ振動数と振幅が観測されるべきであると言う物である。もしこの事が成り立たないとすると、一体、地球上で発展させられた理論は何だったのかという事になる。地球上だけで通用するような理論を作っても嬉しくも何ともない事になる。その意味においても確かに相対性原理は仮定ではあるが、しかしごく合理的なものである事がわかる。

この相対性原理で最も重要な事はそれぞれの系でそれぞれの「時間と空間」が定義されていると言う事である。1つの系で座標系を定義できると言う事は、その系に観測者も同時に定義出来るという事を意味している。これは非常に大切なポイントであり、特に一般相対論の問題点をしっかり理解するために重要であり、自分の言葉に焼きなおして理解する必要がある。このような事こそ、余程しっかり考えないと本当には理解できないものである。これからもこの本では繰り返し言う事になるが、じっくり考え抜いて自分の物にする事はそう簡単な事ではないが、しかしそれこそが物理の本当の面白さである。

2.1 相対性原理

相対性原理を解説するためにはどうしても2つ以上の「系」を考える必要がある。ここで「系」とは何かを説明しておいた方が良さだろう。我々が住んでいる所、これは地球上である。今の議論には、地球が回転している事は忘れても十分である。この地上で静止している系を「静止系」（または「R-系」と呼ぼう。これは慣性系でもある。一方、この静止系に対して等速直線運動をし

ている電車に乗っている人も地上の「慣性系」と同等の慣性系を持つ。この電車の系を「S-系」と呼ぼう。お互いに相手は等速直線運動をしている系となっている。ここで相対性原理の仮定とは何か？それは「どの系でも物理法則は全く同じであり、またすべての観測量は同じである」というものである。この場合、それぞれの慣性系にそれぞれの観測者が定義されて全ての実験・観測を独立に行う事ができる事、さらにそれらの観測結果は全て一致する事である。これは原理であるから証明は出来ないが、現在までのあらゆる観測事実はこの原理が正しい事を示している。従って、これは原理として信用して十分良い。

2.1.1 特殊相対論

アインシュタインが相対性理論を「特殊」と「一般」に分けた理由は恐らくは一般相対論が重力理論を含んでいると思っただからであろう。相対性理論に一般も特殊もあるはずが無いのだが、この辺も彼がどの程度、相対性原理を理解していたかわからない理由でもある。しかし、ここでの言葉の定義は物理の理解には本質的なことではないので、これまでの慣習通りに使っていく事にしよう。

いづれにせよ、特殊相対論とは相対性原理に基づき、どの慣性系でも物理法則は同じであるという事を意味している。今、慣性系 R-系に対して、もう一つの慣性系 S-系が速度 v で等速直線運動をしているとする。この時、2つの系の変換則は速度 v が光速と比べて十分小さければ、非相対論的変換則 (Galilei 変換) となり、速度 v が光速と同じ程度になった場合は、相対論的変換則 (Lorentz 変換) となる。まずは、速度 v が光速と比べて十分小さい場合の非相対論的変換 (Galilei 変換) について解説して行こう。

2.2 ガリレオの相対性理論

科学史的に厳密な事は別にして、基本的な相対性理論はガリレオにより作られている。今、電車の系である「S-系」が静止系に対して一定速度 v で運動しているとする。この時、電車が走る方向はどちらでも良いからこれを x -軸としよう。ここで大切な事はそれぞれの系に座標系を定義する事が出来るという事である。そしてその座標系には観測者も定義する事が出来る必要がある。これは経験からして、電車の中に人が乗ってれば十分であると考えられる。こ

の時，電車の中の時間も空間も地球上と同等の定義が出来る事が最も重要になる．空間も時間も人間がどれだけ理解し認識出来るか哲学的には難しいところではあるが，慣性系には固有の時間と空間があるとして議論を進めていっても，今の所問題になる現象は見つかってはいない．

今，静止系の座標と時間を $R(t, x, y, z)$ と表記しよう．この時，電車の系の座標を $S(t', x', y', z')$ と表記しよう．但し，電車はゆっくり動いていると考える．ゆっくりという時は，常に何と比べてであるかを考える必要がある．物理で相対性理論を議論する時は，比較する速さは光の速度 c である．光は地球を1秒間に7週半回るくらい速い．従って，光の速さは $c \simeq 6400 \text{ km} \times 2\pi \times 7.5 \simeq 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ である．この時，時間はどの系でも同じであり，従って $t = t'$ となっている．2つの座標系には次の関係式がある．

$$x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \quad (2.1)$$

これを Galilei 変換という．これは2つの座標系の原点同士の関係式と考えてよい．バネの力学を記述する方程式は Newton 方程式である．今の場合，地球上 (R-系) でバネの先に質量 m の質点をつるしてバネの振動の実験をしたとする．適当なある点を原点としてそこからバネの伸びを x とすると $m\ddot{x} = -kx$ が運動方程式になる．ここで k はバネ定数． \dot{x} は Newton 力学の時によく使われている座標の時間微分の表記で $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ であり，従って $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ となる．この場合，座標は質点の座標を表しているのだから，座標が時間によって変化する事になっている．

Galilei 変換から明らかなように，電車の系 (S-系) でも同じバネの実験をすると，この時は運動方程式が $m\ddot{x}' = -kx'$ となる．ここで x' は適当なある点を原点としてそこからバネの伸びを x' とした事に対応しており，これは地球上で行ったバネの実験と同じである．この2つの方程式を見ると形が同じである．数学では方程式の形が極めて重要な役目を果たしている．2つを並べて書くと

$$\begin{aligned} \text{R-系:} & \quad m\ddot{x} = -kx \\ \text{S-系:} & \quad m\ddot{x}' = -kx' \end{aligned}$$

であり，この時，確かに形が同じになっている．従って，この微分方程式を解いた答えも同じ形になっている．すなわち，2つのバネの振動は全く同じになっているというわけである．この微分方程式の解き方はどの教科書にも書いてあるのでここには書かないが，大切な事は結果を覚えておく事である．ちな

みに結果だけ書いておくと

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad \text{但し} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.2)$$

という振動になる．ただしこの時，初期条件 ($t = 0$ で $x = 0, \dot{x} = v_0$) をつけている．当然の事だが， x' に対しても全く同じ解になる．

相対性理論はこれ以上の事は何も言っていないし，物理学における理論としてはこれで十分である．この例を見てもわかるように，それぞれの系で観測者の存在を仮定しているのだが，これが相対性理論の本質である．すなわち，どの慣性系でも観測者が独立に定義される事である．

このガリレオの相対性理論では，それぞれの慣性系における時間は全く同じものとしている．これは我々の経験から言っても当然の事として理解できる事である．しかし同時に，空間だけ変えても本当にそれで良かったのかという疑問は残る．それぞれの慣性系に観測者を定義したら，それぞれの観測者が時間を持っていても良さそうな気がする．実際，粒子の運動が光速に近い程に速い場合の相対性理論ではこの時間の事が重要になる．

2.3 相対性理論

話を進めて行こう．現実の電車だともはやその系が地上の系から見て光の速度に近く走る事はあり得ないことである．実際，恐らく最も速いと思われるロケットの速度は $v \sim 10 \text{ km/s}$ 程度であるが，これは光速と比べて1万倍以上遅いのである．しかし現実の物理でも光速に近い系を考える必要が出てくる場合がある．それは大気圏に突入する素粒子である．これはしばしば光速に極めて近い速度を持っている場合が観測されている．この場合この粒子は相対論的であると言う．ここで相対論的という言葉は，非相対論的という言葉と対比して使われている．粒子の運動が光速と比べて小さい場合を非相対論的と言うからである．

2.3.1 座標の Lorentz 変換

いずれにしても， S -系の速度 v が光速に近い場合の変換則は Lorentz により与えられている．今度の場合， R -系の座標を $R(t, x, y, z)$ とした時， S -系

の座標は $S(t', x', y', z')$ となり，時間は別のものになる．それは，どの系でも観測者が定義されないといけないので，ある意味では当然である．しかし我々の日常の経験とは一致していない．この場合 Lorentz 変換は

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \quad y = y', \quad z = z' \quad (2.3)$$

となっていて，ここで γ は $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ と定義されている．この式がどうして出てきたのか？それは簡単で，この Lorentz 変換の式のみが電磁場の方程式である Maxwell 方程式が S-系でも R-系でも同じ形の微分方程式になって欲しいという要請を充たすからである．逆にいえば，Maxwell 方程式は Galilei 変換だと S-系と R-系では全く異なった形の微分方程式になってしまうのである．但し，ここで言っている Galilei 変換は形が同じで v をそのまま光速に近づけた場合の事である．

Lorentz 変換の式を見ると直ちにわかる事は，もし速度 v が光速と比べて十分小さい場合，

$$x \simeq x' + vt', \quad t \simeq t', \quad y = y', \quad z = z' \quad (2.4)$$

となっていて，Galilei 変換の式と一致している．その意味では Lorentz 変換の式は Galilei 変換の式を含んでいる事になっている．従って，普段地球上で起こる現象は非相対論の近似式で扱ってもめったに間違える事は無いものである．

2.3.2 相対論における速度の和

相対論における速度の和は通常我々が持っている常識では考え難いものになっている．その原因は主として，どの系でも光の速度が一定であるという相対性理論の基本仮定と関係している．逆に言えば，光速を超える事はどのような場合においてもあり得ないという事である．この事は現在では勿論実験事実として十分証明されていて，この「光速不変」の仮定と矛盾する実験事実は全く見つかっていないし十分信じて良い事である．

ここで相対論における2つの速度 V_1 と V_2 の和を求めて行こう．まず Lorentz 変換から

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \quad (2.5)$$

であるから，変換された系での速度は

$$V \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = \frac{V' + v}{1 + \frac{vV'}{c^2}} \quad (2.6)$$

となる．言い換えると速度 V_1 と速度 V_2 の和である速度 V は

$$V = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1 V_2}{c^2}} \quad (2.7)$$

となっていて単なる和ではない．勿論，2つの速度が光速と比べて十分小さい場合，この式は我々が日常よく知っている式 $V = V_1 + V_2$ になっている．

面白い事にもし一方の速度 V_1 が光速である時，速度の和は

$$V = \frac{c + V_2}{1 + \frac{cV_2}{c^2}} = c \quad (2.8)$$

となり，やはり光速になっている．すなわち電車から光を放つとその光の速度はやはり光速 c であるという事を示している．さらには両方の速度が $V_1 = c$ および $V_2 = c$ と光速である時もやはり和の速度は光速 $V = c$ となっている．このような状況は自然界に実現される事はあり得ないであろうが，理論的には光速を超えないという事実を良く表している．

粒子の速度が光速を超えない理由は，速度の定義式からみたら当然の事である事がわかる．すなわち相対論での速度の定義はどうしても運動量を用いて行わざるを得ない．この事は相対論では運動量が物理量になっている事と関係している．相対論での速度の定義は

$$\frac{v}{c} = \frac{pc}{E} = \frac{pc}{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}} \leq 1 \quad (2.9)$$

である事から質点の速度が光速を超える事はあり得ないのである．

2.3.3 運動量の Lorentz 変換

古典力学では質点の速度が物理量になっていて，速度の時間微分が加速度になり，これが Newton 方程式と直接関係するため速度は常に重要な役割をしている．ところが相対性理論を扱う時は質点の運動量が重要な役割をする．というよりも，速度が物理的に重要になっているのは実は古典力学だけである．量子力学では運動量が重要になっているがこれも相対論的量子力学がより基本的な方程式であるからである．

それでは質点の運動量は Lorentz 変換に対してどの様に影響されるのであろうか? この場合, 運動量とともに常にエネルギーも一緒に考える必要がある. それは, 座標では時間と空間座標を一緒に考えていた事と同じである. 今, R-系での質点のエネルギーと運動量を (E, \mathbf{p}) としよう. この時, R-系に対して x -軸に沿って速度 v で動いている S-系においては, この質点のエネルギーと運動量 (E', \mathbf{p}') はどうなるのであろうか? これは Lorentz 変換により与えられる. すなわち

$$p_x' = \gamma \left(p_x - \frac{vE}{c^2} \right), \quad E' = \gamma (E - vp_x), \quad p_y' = p_y, \quad p_z' = p_z \quad (2.10)$$

である. この時, $E^2 - \mathbf{p}^2 c^2$ を計算すると

$$E'^2 - \mathbf{p}'^2 c^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 \quad (2.11)$$

となり, 一定値となる. この一定値は何であろうか? これは系の変換によらない量であり, 質点を考える場合, その質量しかあり得ない事がわかる. 従って, これは

$$E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = (mc^2)^2 \quad (2.12)$$

と書く事ができる. ここで, 運動量 \mathbf{p} がその質量と比べて十分小さい場合,

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + \mathbf{p}^2 c^2} = mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \dots \quad (2.13)$$

となり, 確かに非相対論の「分散関係式」が得られている事がわかる. ここでコメントであるが質点のエネルギーがその運動量とどのような関係式で表されているかを示す式が分散関係式と呼ばれるものである. これは物理では非常に重要な関係式となっている.

後で書くように, この時エネルギーと運動量を一緒に書いた 4 元運動量はかなり便利である. 但し, この時光速 c を $c = 1$ とした単位系を用いる. これは単に簡単にする事以上の意味はない. しかし, とても便利であり, また間違いを避けるのにはベストである. 以下でもしばしばこれを採用して行く事になる. 必要に応じて戻して行けばよい. この時 4 元運動量を $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ と定義して, また 4 次元の内積を

$$p^\mu p_\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 \quad (2.14)$$

と定義すると, 結局

$$p^\mu p_\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 \quad (2.15)$$

となり, 相対論での分散関係式が簡単な形で覚える事が出来るのである.

2.3.4 微分量の Lorentz 変換

Lorentz 変換は Maxwell 方程式を不変にするために考えられた変換式である。この場合

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \quad y = y', \quad z = z' \quad (2.16)$$

の変換に対して，その微分系の変換は公式

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.17)$$

を用いると

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma \left(v \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \quad (2.18)$$

と変換される。これは解き直すと

$$\frac{\partial}{\partial x} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right), \quad \frac{\partial}{\partial t} = \gamma \left(v \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial t'} \right) \quad (2.19)$$

となる。ここで

$$p_x = -i \frac{\partial}{\partial x}, \quad E = i \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.20)$$

と定義してみると

$$p_x = \gamma \left(p_x' + \frac{vE'}{c^2} \right), \quad E = \gamma (E' + vp_x') \quad (2.21)$$

となり，座標の変換則と一致している。さらに，

$$Et - p_x x = E't' - p_x' x' \quad (2.22)$$

が簡単に示す事ができ，4次元の内積 $px \equiv Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}$ が

$$px = Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = p'x' = E't' - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}' \quad (2.23)$$

のように不変である事がわかる。

2.4 相対性理論の具体例

どのような場合に Lorentz 変換の式が必要になってくるのであろうか？一般に運動方程式を考えた時，Lorentz 変換に対して方程式の「形」が不変である事が最も重要である．ここでは，もっと具体的な問題として Lorentz 変換が必要になるいくつかの場合を以下に議論しよう．

2.4.1 光のドップラー効果

相対性理論の場合，もう一つの慣性系が光の速度に近いもので近づいたり遠ざかったりする場合，日常我々が持っている常識と矛盾するので，驚く場合が出てくる．例えば，その慣性系から光を放つとその光の速度はやはり光速 c である．ただし，そのエネルギーが変わるため，近づいてくる慣性系から放たれた光はその波長が小さくなり，逆の場合は大きくなるのである．それは，光のドップラー効果としてよく知られている事であるし，また観測もされている．基本的には，音のドップラー効果と同じであるが，音の場合よりもよりシンプルであり，わかりやすいものである．その理由は簡単で，音の場合は地球上にある空気という系がすでに指定されているため，音源と音の受け側以外に，もう一つ地上という系があり，これが音のドップラー効果を複雑にしている．それに対して，光の場合は光が粒子として伝播して来るために，常に光源と光の受け側の2つしか系が存在していないので，単純に Lorentz 変換式でドップラー効果が理解できるのである．宇宙物理で良くお目にかかる式なので，ここに書いておこう．Lorentz 変換の式は粒子の持つエネルギー E と運動量 p に対しても成り立つものである．すなわち

$$p_x' = \gamma \left(p_x - \frac{vE}{c^2} \right), \quad E' = \gamma (E - vp_x), \quad p_y' = p_y, \quad p_z' = p_z \quad (2.24)$$

となっている．但し，ここでは星が地球から遠ざかって行き，その星から発せられた光の波長が変化する事を示して行こう．星が波長 λ の光を発するとその運動量は $p = \frac{\hbar c}{\lambda}$ となる．従って，星が速度 v で遠ざかっているとすれば，地球上で観測する光の運動量は

$$p' = \gamma \left(p - \frac{vE}{c^2} \right) = \gamma \left(p - \frac{vp}{c} \right) = \frac{p \left(1 - \frac{v}{c} \right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}} = p \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \quad (2.25)$$

となり、光の運動量は減少して見えるのである。これを波長で表せば

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \quad (2.26)$$

となるので、光の波長は大きくなり、これを赤方遷移という。波長が大きくなる事を「Red Shift」というのは、ただ単に可視光においての光の性質から来ている。可視光では、その範囲の波長帯において赤っぽいのは波長が長く、青っぽいのが波長が短いからである。ついでにコメントしておくが、場の理論で赤外発散、紫外発散という言葉がよく出てくるが、これは発散は運動量の積分から来っていて、運動量がゼロのところでは何かの積分が無限大になる時、これを赤外発散と呼んでいる。一方、運動量が無限大になる所で何かの積分が無限大になる時、紫外発散と呼んでいる。これは単なるネーミングであり、物理的な意味は全く無い。

2.4.2 大気圏で生成された μ -粒子の寿命

大気圏に突入した宇宙線(高エネルギー陽子)は大気と衝突して μ -粒子(質量 $m_\mu = 105.6 \text{ MeV}/c^2$) を生成する場合がある。 μ -粒子はその寿命 τ_0 として $\tau_0 \simeq 2 \times 10^{-6}$ 秒程度であり、従ってこれは不安定な素粒子である。ここで問題は、この寿命は地上の系で変更を受けるのであろうかと言う事である。これは相対性理論関連では昔よく議論された問題の一つでもある。この寿命 τ_0 は崩壊幅 Γ により

$$\tau_0 = \frac{\hbar}{\Gamma} \quad (2.27)$$

と書かれている。この場合、崩壊幅 Γ はローレンツ不変な物理量である。従って、寿命もローレンツ変換に対して変化する事はない。つまりは地上でもこの μ -粒子の寿命は変わらない。

• μ -粒子の走行距離 L : ここで μ -粒子の走行距離を計算しよう。その走行距離 L はローレンツ変換の式 $x = \gamma(x' + vt')$ より

$$L = \gamma v \tau_0 \quad (2.28)$$

である。ここでエネルギーが $1 \text{ GeV}/c^2$ の μ -粒子が上空で生成されたとしよう。この時、 $v \simeq c$ であり、また $\gamma \simeq 10.6$ である。従って、この μ -粒子の走

行距離 L は

$$L = \gamma v \tau_0 = 10.6 \times 3 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-6} \simeq 6.3 \text{ km} \quad (2.29)$$

となっている。この事より、上空で生成された不安定粒子が地上で観測される可能性が充分ある事を確かに示している。

- 加速器実験： 大型の加速器によって生成された高エネルギーの不安定粒子の走行距離は良く知られているように、式 (2.28) によって与えられている。そしてこれは実験的にも確かめられている。

2.5 相対性理論の適用範囲

ある理論や理論の模型を作った時に大切な事は、その理論の適用範囲を常にしっかり理解して抑えて置く事である。これはどんな場合でも重要であり、特に相対性理論においてはその適用範囲を吟味しておく必要がある。

前節で議論したように、不安定粒子が光速に近い速度で走っている場合は相対性理論を適用する具体例となっている。この場合、その粒子の持っている寿命は Lorentz 不変な量でありどの系でも変わることはない。そして Lorentz 変換を正しく利用すれば、その不安定粒子の走行距離が計算されるのである。この場合、 γ 倍だけ走行距離が伸びるが、これは Lorentz 変換の持っている性質によっているからであり、運動する系の時間が遅れるわけではない。従って、例えば、双子のパラドックスがよくお話として議論される事があるが、これには注意が必要である。実際、運動系の時計が遅れるわけではないので、これはパラドックスになっていないのである。

相対性理論は「キネマティクス(運動学)」であるため、物理の「ダイナミックス(動力学)」を理解する事とは直接の関係はない。しかし、理論の模型を作ってそれを自然の記述に応用しようとする時、キネマティクスは必ずしっかり満たしている必要があり、満たさなければ模型の意味はない。例えば、ある自然現象を記述するための理論模型を作った時に、その模型の運動方程式は当然 Lorentz 変換に対して不変である必要がある。これが破られていると、系を決めて計算を実行した時、その系毎に異なった結果が出てしまうのであり、物理的に意味はない事が明らかである。しかしながら、Lorentz 変換に対して不変である模型は、どの系で計算しても物理的な観測量は同じになる。従って、

計算を実行する時はなるべく簡単になるような系を選ぶ事が大切である。

さらに、ある種の物理現象において、そのダイナミクスが時間発展に影響しない場合は、キネマティクスだけで全て解けてしまう事がよくある。この場合、逆に言えばキネマティクスはただ単に変換しただけだから、ここから新しい物理が発見される事はまずあり得ない。キネマティクスをいじって何か新しい事が出て来たとしたら、それは計算が間違っているか、または見方が新しくなってこれまでとは見かけ上異なるような結果が現れたものと解釈する事になるものと思われる。しかし、後者の場合、それが結構重要になる事もあるので、それはそれで注意する必要がある。

これまで見て来たように、相対性理論の数学は簡単であるし、その物理も明解であると考えられる。しかし、最も重要なところで良くわからない点がある。それは系の変換として使っている速度 v である。これが物理的にはどう理解できるのか自分にははっきりしていない。速度の概念は古典的なものであり、場の理論の枠組みとどのように整合性を取って行けるのか、これは今後の問題である。

第3章 一般相対論とその問題点

この章では一般相対論の方程式をまず紹介し、その物理における問題点について解説して行こう。一般相対論の数学的な詳しい説明はここでは省く事になる。専門書がいくらでもでているのでそちらを参考にしていきたい。

物理学は自然現象を理解するために、その自然の一部を単純化して重要部分を取り出し、その自然現象を理解できる理論体系を構築する学問である。その最もよい例が Maxwell 方程式である。この理論も含めて、物理のすべての理論体系は現象を再現できるような現象論として作られている。ところが一般相対論に限って、残念ながらアインシュタインは実験ではなくて「思考実験」を原理として出発して理論体系を構築したのである。このため、一般相対論は自然界において何を記述しようとしたのかと言う対象（自然現象）が不明瞭であり、従って現実性が無い理論となっている。

この章では、一般相対論における概念的な困難についてしっかり見て行きたい。また、一般相対論が物理量として予言している水星の近日点移動の問題も具体的な数値とともに解説して行こう。観測との比較でも一般相対論による水星の近日点移動の予言値は観測値とは一致しないことが示されている。さらに決定的な現象として「うるう秒の問題」がある。水星の近日点が移動するならば、当然、地球もそれに応じた変化をするべきである。この当たり前の事が、現代技術の進歩、特に正確な時間測定の長足な進歩により、測定されてきた事は意味深いものがある。実際、地球の近日点移動と同じ現象がうるう秒として非常に正確に観測されていたのである。しかも、この地球の公転の遅れは一般相対論の予言では全く合わないのに対して、ここで紹介している新しい重力理論は水星の近日点移動の観測値の再現とは比較にならないほどの高い精度で観測データと完全に一致している。それは地球の公転が最も正確に観測されていると言う事を考えれば、理論との正確な一致は当然でもある。

3.1 一般相対論の方程式

アインシュタインが一般相対論の方程式を構築した際、その主要目的は電磁場と同じように重力場に対する方程式を導出したいと言う点にあったと考えられる。恐らくは、アインシュタインは重力場に対する Poisson 型方程式から出発したものと思われる。それは

$$\nabla^2 \phi_g = 4\pi G_0 \rho \quad (3.1)$$

と書かれる。ここで、 ϕ_g は重力場であり、 ρ は物質の密度である。この式自体は基本的には正しいと考えられる。それは勿論、実験的に重力場 ϕ_g が $\phi_g = -\frac{MG_0}{r}$ と書かれているからである。ただし、これはあくまでも大雑把に正しいと言っているだけであり、この Poisson 型方程式を導出する Lagrangian 密度がわかっていたわけではない。ここでは、アインシュタインによる一般相対論の方程式がどのように導かれたのかを直感的に理解して行くための解説をして行きたい。一般相対論の方程式の物理を理解するためには、細かい数学は実は不要である。むしろ、いかなる物理現象を一般相対論の方程式により記述しようとしたのかをしっかりと理解する事こそが最も重要であり、この事により物理をより深く理解するための一助になればよい。

3.1.1 一般相対論の直感的導出

一般相対論の方程式は

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 8\pi G_0 T^{\mu\nu} \quad (3.2)$$

と書かれている。ここで $g^{\mu\nu}$ は計量テンソルを表し、 $R^{\mu\nu}$ は Ricci テンソルとよばれる量で計量テンソル $g^{\mu\nu}$ で書かれている。また、 $T^{\mu\nu}$ は物質のエネルギー・運動量テンソルと呼ばれるものである。この式は、もともと重力場に対する Poisson 型方程式を一般化する事を目標にして、求められたものであろうと思われるが、彼が何故一般化を目指したのかの物理的な理由は不明である。恐らくは、Poisson 型方程式だけでは重力場に関して不十分であるとアインシュタインは考えて、結局は電磁場の方程式と同じような式にしたかったのであろうか。ここで

$$g_{00} \simeq 1 + 2\phi_g \quad (3.3)$$

$$T_{00} \simeq \rho \quad (3.4)$$

と仮定することができたとすれば、確かに直感的にはアインシュタインの一般相対論の方程式が導かれる事が納得できるものではある。

3.1.2 一般相対論と重力場

このように、式 (3.3) を仮定すると、この式から確かに重力の Poisson 型の方程式 (3.1) $[\nabla^2\phi_g = 4\pi G_0\rho]$ が導出されている。これは非常に重要な物理的な意味を持っている事は明らかである。実際、この事により「一般相対論の方程式は重力場に関係している」と人々は受け入れたのである。従って、この仮定された式 (3.3) が本当に成り立っているのかどうかと言う問題をきちんと検証する事が極めて重要であるの言うまでもないことである。

- 式 (3.3) の物理的な意味は？： しかしながら以下に見るように、一般相対論を重力の理論と関係つけることは容易なことではない。ここでアインシュタインは「弱い重力場の極限」では式 (3.3) $[g_{00} \simeq 1 + 2\phi_g]$ のように置くことができるかと主張したのである。しかし計量テンソル $g^{\mu\nu}$ は方程式の未知関数であり、何故、それが重力場 ϕ_g と関係つけられてこのようにおけるのかという議論はなされていなく、またその理論的な根拠を見つけることはまったくできていない。さらに進んで、 $g^{00} \simeq 1 - 2\phi_g$ とおくと重力場が斥力になってしまうことがわかる。この不定性からみても「一般相対論は重力理論である」という主張を理論的に正当化することはほとんど不可能であることがわかる。

- 致命的な欠陥： さらに致命的な欠陥として、この式 $[g^{00} \simeq 1 + 2\phi_g]$ 自体が、実は物理的に意味をなしていないのである。 g^{00} の右辺の 1 は座標系の単なる数字である。ところが、 ϕ_g は力学変数であり、この足し算は成立しない。これはカテゴリーの異なる量を無造作に足し算している事に対応している。

もう少し具体的に言えば、これは数字の 1 に新幹線の速度 250 (km/h) を足せと言っている事に対応していて、お話にならない低レベルの間違いである。しかしこの式 $g^{00} \simeq 1 + 2\phi_g$ を認めたため、一般相対論が重力理論であると長い間、人々は思い込んできたものであり、この誤解の事実はどうしようもない程に重いものである。実際問題として、このような基本的な考察が一般相対論関係では行われていなかった事の方がより深刻な問題であり、一般相対論に対して現象論的そして実証的な検証が欠如している事と関係している。

3.1.3 エネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$

一般相対論の式で右辺に現われているのは、エネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ であるが、実はこの物理的意味はあまり明確とはいえない。物質が作っている物理量ではあるが、物質による密度 ρ というスカラー量からテンソル量を作る物理的な理由はない。さらに、このエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ は、フェルミオンの「場の理論」を知らない限り定義するのが難しい。実際、粒子描像でのエネルギー・運動量テンソルが物理的に明瞭に定義できるかどうかは良くわからない。一般相対論では、 $T^{\mu\nu}$ は星の分布関数から作られると仮定されている。その意味では、 $T^{\mu\nu}$ を現象論的に作ることは可能でも、これが基本的な物理量にはならないことに注意する必要がある。これは電磁場の方程式と比較するとより明確になる。Maxwell 方程式の右辺にででくるカレント ρ と j は物質が作る電荷密度と電流密度であるが、これらは量子力学の方程式をフェルミオンの多体問題として解くことにより原理的には求められる。これに対して、 $T^{\mu\nu}$ は方程式の中での役割がこのカレントに近いものではあるが、しかしその物理的な意味合いはほど遠いものである。 $T^{\mu\nu}$ は星の分布関数から作られており、その分布は重力下の運動方程式により決定される。従って一般相対論においては、その方程式以外に星の分布関数を定めるための「重力下の運動方程式」が暗黙の裡に仮定されている。

3.1.4 一般相対論の数学は複雑，物理は単純

物質があった時にどのような重力場ができるかと言うのが重力場に対する Poisson 型方程式であったのに対して、一般相対論の方程式は物質があった時に空間を測る計量テンソル $g^{\mu\nu}$ がどうなるかと言う事を決める方程式になっている。重力場を求めるべき所なのに、何故、計量テンソル $g^{\mu\nu}$ を求める問題にすりかわってしまったのであろうか？さらに、アインシュタインは何故そのような事をしたかったのであろうか？この疑問に対しては、ここでは答えはない。恐らくは科学的にはある程度答えられる事なのかもしれない。いずれにしてもアインシュタインにとって、重力が Poisson 型方程式を満たす単純なスカラーであろうとはとても考えられなかったのであろうか。

3.1.5 計量テンソル $g^{\mu\nu}$ の問題点

計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が座標に依存していると仮定されているが、この座標は何処から測られるのであろうか？これは一般相対論の方程式を見ればわかるように物質場の重心からである。従って、物理的には物質全体が作る重力場を通して計量テンソルが決定されるものとなっている。この事を Maxwell 方程式と比較して考えてみよう。Maxwell 方程式においては、電荷密度と電流が存在した時、それに応じて電場 E と磁場 B が求められるが、この時、電場と磁場の座標系は常に電荷密度と電流をあらわす座標系を起点として測られている。従って、電場と磁場は物質の重心を原点として測られているのであり、この事で物理的に問題になる事は勿論、あり得ない。それは Maxwell 方程式がどの慣性系でも成り立ち座標の取り方には依存しないからである。

しかしながら、この時、それが計量テンソル $g^{\mu\nu}$ だとすると話は別で、これは問題になる。それは計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が時空を測る物差しに対応していると考えているため、物質が存在している「時空」がその計量を変えてしまうと、それは最も重要である相対性原理と明らかに矛盾する事になっている。これはまさに、等価原理が相対性原理と矛盾するという事と同じ意味合いである。この等価原理については、後程、詳しく議論して行くので、その内容をしっかり考えて理解して貰いたい。

- 時間と空間座標は独立： ここで座標についてであるが、一般相対論の計量テンソル $g^{\mu\nu}$ やエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ の時間と空間座標は独立である。しかしながら、Newton 方程式では質点の空間座標が時間の関数になっている。このため、その質点を区別することはできなく、従って $T^{\mu\nu}$ を表現することはできない。一方、場の理論では空間と時間は独立であり、粒子を表すのは状態関数であるため確かに、 $T^{\mu\nu}$ を表現することは可能である。

- 座標系の時間とは何か？： 計量テンソル $g^{\mu\nu}$ が時間の関数であるとしているが、その時間は座標系の時間である事になっている。しかし座標系の時間とは物理的にどう言うものなのであろうか？通常感覚では、これは観測者の時間である。そして質点の運動を記述するときの時間は観測者がその質点の座標を時間の関数として記述するので、時間の起点は観測者が決める事ができる。

しかし今の場合、 $g^{\mu\nu}$ の時間の起点はどのように選ばよいのであろうか？一般相対論の方程式 (3.2) を見る限りでは、その起点は右辺の質量分布が与えられたときを時間の起点にしているのであろう。そうだとすると、右辺は一般相対論とは無関係に決定されているので、時間の起点は無限の過去と言う事になっている。しかしながら、方程式の時間の起点の問題さえもはっきりとはわ

かってはいない状態でその方程式を解いたとしても一体、人々は何を理解したいのであろうか？

3.1.6 物質に対する方程式の欠如

アインシュタインは重力場に対する Poisson 型方程式だけでは、何かが不十分であると思ったのであろう。前述したように、それは恐らくは、電磁場の方程式の事が頭にあったからだと考えられる。そのために、テンソル型の方程式に持って行きたかったのであろう。しかしながら、一般相対論の方程式だけでは、物理学としては不十分なのである。この一般相対論の枠組みでは、物質が高速で運動して相対論的になった時に、その物質が重力の影響をどの様に受けるかの方程式が欠如している。そして、これこそが最も重要な問題である。

- 相対論的粒子に対する方程式： すなわち、高速で運動する陽子が重力場の下でどの様に運動するのかと言う基本的な問題が設定されていない。具体的に言えば、重力ポテンシャルがあった時に、相対論的なフェルミオンが Dirac 方程式によりどの様に決定されるのかと言う基本的な問題が解かれていないのである。しかしながら、この一般相対論が作られた当時は、フェルミオンに対する Dirac 方程式どころか、Schrödinger 方程式も知られていない。従って、物質に対しては Newton 方程式のみが基本方程式でありこれは場に対する方程式になっていないので、ある意味での困難さがでて来ているはずであった。一つには、Newton 方程式では座標が質点をあらわしているが、これだとその質点を区別したい時にどうして良いかわからなくなっている。さらには、計量テンソルにあらわれる座標はその空間の点を表しているのであろうが、その点が質点とどのような関係になるのかが不明になる。場の理論では、空間と時間は独立であり、それらが関係する事は無い。そして場によって粒子を表す時に、その場が空間と時間に依存しているのである。一方において、Newton 力学は粒子の座標が時間とともにどのように動くかを表しているのである。従って、空間座標と時間の区別の仕方が場の理論とは全く異なり、同じ理論体系の中に組み込む事は、基本的に不可能な問題である。その意味では、時代背景から考えて、アインシュタインが一般相対論を考えて、このような場に対する基本方程式を作ろうとした事自体がもともと無理があったという事である。

3.2 等価原理

アインシュタインは一般相対論を構築する際、実験から出発しないで、等価原理という思考実験により考案した「原理」から出発してしまった。もし彼が Newton 方程式を相対性理論に合うように、高速粒子に対しても成立すべき方程式を作ろうとしたならば、それ程大きな間違いは犯さなかったと思う。物理学において、一般相対論を除く全ての理論は実験事実を記述する事を目的として方程式を作っている。Newton 方程式は質量 m の質点に力 F をかけるとその質点に対する方程式は $m\ddot{r} = F$ あり、これが古典力学の物理現象をうまく記述してくれる事がわかっている。また、Maxwell 方程式は4つの微分方程式から成立しているが、それぞれの方程式は電磁気的な現象を記述する方程式を統合したものである。例えば、Gauss の法則は電場 E に対する方程式であり、電荷分布 $\rho(r)$ に対して $\nabla \cdot E = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$ と書かれているが、これはクーロン力を良く記述しているし全ての実験と矛盾がない。さらに、水素原子における電子のエネルギースペクトルは Dirac 方程式によってほぼ完璧に再現されていて、相対論的量子力学の正しさは証明済みである。

- 等加速度運動系： それでは「等価原理とは何か」が問題となってくる。原理というからにはそれを証明する事は出来ない。さらには、この原理は何かの観測量として実験的にわかっている事ではない。何が等価であるのか？それは、「一様重力場での物理と等加速度運動をしている系での物理が同じである」と言うのが仮定である。これは非常に強い要請になっている。例えば、一様重力場での粒子の加速度は $\ddot{z} = -g$ であるから、確かに重力場における加速度と重力定数は同じになっている。しかし、これは Newton 方程式そのものであり、原理でもなんでも無い事になり、ここからは新しい物理は出て来ない。ところが、アインシュタインは等加速度運動系という非現実的な系を仮定してしまった。実際、エレベーターの系を考えて、その系での物理を考えるとどうしても光が曲がるか空間が歪むかのどちらかの結果を考えざるを得なくなり、この原理に従ったら、当然重力場において空間が歪むという奇妙な仮定を置かざるを得なかったのである。

- エレベーターの箱とその空間： もう少し専門的に言えば、エレベーターの系と言っても、空間が動いているわけではなくエレベーターの箱が動いているだけである。それは明らかで、箱が存在しないエレベーターの系は定義できないからである。一方、慣性系の場合、空間がその系ごとに定義できており、またその慣性系における観測者の存在も定義される。等速直線運動をしている電車において、その電車の箱を取っ払ったとしてもその空間は定義されている。このた

め、観測者の存在を仮定することができるのである。これらの事はアインシュタインが相対性原理(どの慣性系でも観測量は同じである)をきちんとは理解してはいなかったのではないかと疑わざるを得ないものとなっている。

● 空間と座標系：ここで「慣性系の空間」とは何かをもう少し詳しく解説しよう。今、地上の静止系を座標系 A として導入し、観測者 A は原点にいるとしよう。この時、等速直線運動をしている電車を考え、その電車の運動座標系 B を定義して、観測者 B はその座標系の原点にいるとしよう。ここで物理において使われている「空間」とは、座標系 B が動いているためその空間と一緒に動いているという言い方をしている。この時、電車の箱が取り扱われたとしても観測者と座標系は何も影響を受けない。そしてそれぞれの系で同じバネの実験をするとすべて同じ観測量が得られることがわかり、これが相対性原理の根幹となっている。一方、等加速度運動系で同じことをしようとしても、ある速度(加速度)で箱が取り除かれると、観測者はその系に存在することはできない。従って、物理で使う空間とは、結局、慣性系で定義された座標系とその観測者の事だと考えれば間違えることはない。

● Gedanken Experiment (思考実験)：物理学で最も大切な事は、常に実験から出発してその観測事実を如何に整合性を保った理論で理解できるかと言う事である。これに対して、一般相対論においてアインシュタインは「Gedanken Experiment (思考実験)」を基にした「原理」から出発してしまったのである。実際、エレベーターの系を考えてそこで光が曲がったり空間が歪んだりしたら、それは仮定した「原理」が正しくない事を意味していると考えべきであった。この事は、物理の専門家ではない人達や若い人達がむしろ正確に理解できるのではないかと思われる。しかし、それ以上に「Gedanken Experiment」から理論を構築しようという姿勢は科学者としては絶対に避けるべきものである事は言うまでもない。科学は自然を理解しようとする学問であり、物理学の理論は自然現象を数学の言葉を使って理解を深める事を目的としているからである。

3.3 重力ポテンシャルと Dirac 方程式

現在知られている基本的な相互作用は電磁氣的な力，弱い相互作用，強い相互作用そして重力である．力の強さを示す結合定数という言葉でいうと，重力は最も弱い．実際，弱い相互作用と比べても重力は30桁以上も小さい．重力の次に弱いのが弱い相互作用である．この力は，中性子が β 崩壊する時や π 中間子が崩壊してミューオンとニュートリノになって行く過程を記述する事ができる．これらの相互作用と比べると，電磁氣的な力はかなり強い相互作用であると言える．実際，我々の物質の世界は基本的には電磁氣的な力で支配されている．原子や分子が出来ているのも，全て電磁氣的な力である．最後に，最も強い力として強い相互作用があり，これは原子力エネルギーや太陽のエネルギー源になっている．星の内部で起こっている核融合はまさに強い相互作用による核子間の束縛エネルギーをうまく利用する事により得られている．

重力は星の生成に大きな影響を与えているが，それは何故であろうか？重力は力の強さとしては一番弱いのであるが，しかしながら2つの重要な性質のために，大きな影響を星の形成では発揮する事になるのである．その2つの性質とは，力の到達距離が $\frac{1}{r}$ である事および常に引力である事である．特に，重力は常にどんな場合でも引力であり，おまけにその力は遠距離まで及ぼすため，いずれは全ての核子は引き寄せられて星を形成して行く事になっている．

- 量子数と電荷： 重力以外の力は基本的に電荷に対応する「量子数」が重要な役割をする．電子と陽子の間のクーロン力は引力である．これは，電子がマイナスの電荷という量子数を持っているのに対して陽子はプラスの電荷の量子数を持っている．同じ電荷の場合には斥力であり，異なる電荷間では引力になっている．一方，重力の場合は常に引力であり，粒子間の重力はその質量にのみ依存している．従ってその力は弱くても常に引力で長距離力であるため，結局，最後には重力が他のどの力よりも勝ってしまうのである．

- 相対論的な陽子： 粒子が高エネルギーになると相対論的な陽子の運動を重力場の中で考える事が必要となる．ところが重力ポテンシャルを Dirac 方程式のどの部分に入れたら良いのかという基本的な問題が未解決のままであった．この事は1970年の始め頃までは深刻な問題として人々の興味を引いていたが，その後パッタリと議論が途絶えてしまった．その主な原因は一般相対論への信奉であろう．ところが一般相対論は場の理論ではなく，その方程式は計量テンソルに対するものである．従って，正常な場の理論の枠組みの中に重力を入れる事が，結局，現代物理の最も重要な課題である事は当然である．

3.4 重力問題の方向性

ここで問題を整理してみよう。まず，Newton 力学では重力がある場合の方程式は良くわかっていて，実際，Kepler の法則にしても重力下での Newton 方程式を解けば問題なく理解されている。そしてその Newton 方程式はどのように導かれるのかというと，これはよく知られているように Schrödinger 方程式からきちんと導かれるものである。Schrödinger 方程式は場に対する方程式であるから，Newton 方程式を導くには何らかの近似をする必要がある。直感的にわかりやすいのは Ehrenfest の定理として知られているように，演算子（座標と運動量）の期待値を取る事である。この手法により，Schrödinger 方程式から Newton 方程式が導かれる。そして Schrödinger 方程式は非相対論の近似をすれば Dirac 方程式から求められる事から，結局，Dirac 方程式から，Newton 方程式が導かれる事を意味している。

- Dirac 方程式と重力ポテンシャル： 逆に言えば，Dirac 方程式の中に重力ポテンシャルを入れられないとしたら，それは最もよく知られている重力ポテンシャルの場合の Newton 方程式が求められない事を意味している。この事より，Dirac 方程式の中に重力ポテンシャルを入れた方程式を考えるのは一番最初にされるべき最も重要な事である。この問題が未解決のまま重力の問題を考えてきたために，重力の問題解決に対する正しい方向性を見失っていたと言える。恐らく，1960年代の多くの物理屋はこの問題をかかなり深刻に考えていたと思われるが，ゲージ理論信仰の魔物により，この手の研究はすべて避けられてしまったものと考えられる。

- クーロン場の Dirac 方程式： ここで少し数学を使ってこの問題を見て行こう。まず，重力ポテンシャル中の Dirac 方程式を議論する前に，クーロンポテンシャル $V_c(r) = -\frac{Ze^2}{r}$ 中の質点（質量 m ）に対する Dirac 方程式を書くと

$$\left(-i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + m\beta - \frac{Ze^2}{r}\right) \Psi = E\Psi \quad (3.5)$$

となっている。一方，重力ポテンシャル $V(r) = -\frac{G_0mM}{r}$ の場合，もしクーロンと同じだとすると，式 (3.5) と同様に

$$\left(-i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + m\beta - \frac{G_0mM}{r}\right) \Psi = E\Psi \quad (3.6)$$

となる。この場合，非相対論化をしてもクーロンと同じで影響はない。

- 重力場の Dirac 方程式： 実際問題として正しい方程式は

$$\left[-i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \left(m - \frac{G_0 m M}{r} \right) \beta \right] \Psi = E \Psi \quad (3.7)$$

であることがわかっている．しかしながら，これまでこのような重要な問題を未解決のまま放置していた事自体が最も深刻な問題であると言える．

- スカラー場によるポテンシャル： 第4章で詳しく議論するように，新しい量子重力理論によって，式(3.7)の Dirac 方程式が導出されている．すなわち，電磁場の場合とは異なっていたのである．この事は水星の近日点移動の問題を取り扱う時に，重大な効果を引き起こす事になる．それはクーロンポテンシャルの場合，非相対論の極限をとっても全く影響する事はなかったが，スカラーポテンシャルとして入ってくると，非相対論の極限において重力の付加ポテンシャルを新しく生み出すことになっている．これはベクトルポテンシャルによる Zeeman 効果の場合と同じ機構である．この新しい付加ポテンシャルが水星の近日点移動の問題を見事に解決している事がわかっている．

- 繰り込み理論： 何故，スカラー場によって重力相互作用がうまく記述されるのかと言う問題はかなり難しく，実は繰り込み理論と密接に関係している．実際，この繰り込み理論を深く理解することが，この新しい重力理論を理解するための必須条件である．繰り込み理論とは，量子場の理論で摂動計算した時に現れる無限大をうまく処理して，観測量を有限量として求めて実験と比較する数学的な技法である．具体的には，場の量子化を実行すると，2次の摂動計算であるフェルミオンの自己エネルギーに Log 発散の無限大が現れてしまう．自己エネルギーは観測量ではないのでそれが無限大になっても気にする必要はないが，問題は観測量に無限大が出た場合である．特に，量子電磁力学における異常気能率補正を計算するとその計算結果に Log 発散が現れることが知られており，これが最も深刻な問題点であった．そしてこの無限大をうまく処理して，電子の異常気能率の実験値を正確に再現したのが繰り込み理論である．しかしながら，この繰り込み理論にも様々な問題点が浮上している．特に，観測量である電子の磁気能率補正の計算において，その計算手法に一部，誤りがあることが見つかっている．そして現在の量子場の理論において摂動計算を実行した場合，どの観測量に対しても繰り込みが不要であるという可能性が指摘されている．この問題は第5章でもう少し詳しく議論して行こう．

第4章 新しい重力理論と宇宙論

この章では新しい量子重力の理論を紹介し、またそれに基づいた宇宙論を解説して行きたい。従って、この章は少し難しくなっているかも知れない。とはいえ、この解説は到底厳密とはいえないレベルなので、もっとしっかりした物理の内容は参考文献を読んで理解してもらおう事としよう。

4.1 新しい量子重力の理論

重力の量子論を作るという事は何を物理的には意味しているのかをまず考える必要がある。最も基本的な意味は明らかである。それは、まずは、重力ポテンシャルがある時の Dirac 方程式をどのように書けるかという事である。これがすべての出発点になる。逆に言えば、これさえも出来なかつたら、それ以上の重力理論を考える物理的な意味は無い。

しかしながら、現在良く使われている量子重力は重力場の量子化という意味を含み、そちらの方がより本質的であると考えている物理屋が多いように見受けられる。ところが、一般相対論は重力場に対する方程式ではなく、計量テンソルに対する方程式であり、そもそもその物理的な意味が不明である。その物理的に不明瞭な場の量を量子化するといっても、なんの事かわからないのは当然である。まずは量子重力に関してその物理を明確にして行こう。そしてそのためには、粒子間の重力ポテンシャルを与える Lagrangian 密度を求めてこの Lagrangian 密度からの Lagrange 方程式から重力ポテンシャル中での粒子の運動を記述する Dirac 方程式を求めるとい事が、最も重要な課題となっている。

さらには、重力ポテンシャル中での新しい Dirac 方程式が求められた事に対して、その非相対論的な極限の方程式を求め、それを古典力学の方程式に持つて行く作業を実行する必要がある。実際、このようにして Newton 方程式を求めたところ、新しい重力として付加ポテンシャルを含めた重力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2} \left(\frac{GmM}{r} \right)^2 \quad (4.1)$$

と求められる．この第2項である重力付加ポテンシャルが水星の近日点移動，GPS衛星の遅れ，そして地球の公転によるうるう秒の是正の問題をすべて解決している．また，この重力付加ポテンシャルは長い間，Newton方程式のなかで議論されてきた重力ポテンシャルを修正した新しいポテンシャルとなり，これは19世紀半ば以来の変更と言えるものと考えられる．

ここで注意しておきたい事が一つある．歴史的に言って相対論的效果を最初に具体的に検証したのは，Michelson-Morleyの実験である．この場合，地球上で観測できる最も速いものは地球の公転速度であり，Michelson-Morleyはこれを利用して光の速度が地球の公転速度の影響をどのように受けるかを検証したわけである．結果は良く知られているように，光速は地球の公転速度の影響を受けていなく，光速不変の法則へと発展して行くのである．この時の相対論的效果は

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 \sim 1.0 \times 10^{-8} \quad (4.2)$$

である事が光速 c と地球の公転速度 v を入れれば求められる．一方，水星の近日点移動 ($\Delta\omega/\omega \sim 5 \times 10^{-8}$) も地球の公転によるうるう秒の効果 ($\Delta T/T \sim 2 \times 10^{-8}$) も，ともに丁度，相対論的效果の大きさそのものである．従って，直感的に言ってもこれらの効果が相対論的な重力付加ポテンシャルによって再現される事は，至極当然の事と納得できるものである．

4.1.1 古典場と量子場

場の理論を考える時，その場が普通の関数 (c -数) である場合を古典場という．例えば，Schrödinger方程式を考える時，状態 $\psi(t, \mathbf{r})$ を波動関数と呼んだり状態関数と呼んだりする．この $\psi(t, \mathbf{r})$ は座標 (t, \mathbf{r}) によっている事からわかるように「場」そのものである．しかし，この $\psi(t, \mathbf{r})$ は関数ではあるが，オペレータではない．このように場が c -数の関数である時，古典場であるという．これは勿論，量子場を考えているから，古典場という言葉を使っているが通常の波動関数の事である．

それではどのような時に量子場を考える必要があるだろうか？これは電磁場で考えるとわかり易い．Maxwell方程式に出てくる電場と磁場は古典場である．この式の中では，場を量子化する必要がない．しかしながら，水素原子において，電子が $2p_{\frac{1}{2}}$ の状態から $1s_{\frac{1}{2}}$ へ遷移する時，光が放出される現象が知られている．これは，電磁場の理論の立場からすると光が全く存在しない状

態から、突然光が生まれてくる事に対応している。これは、光が真空から作られるという事を理論の中に組み入れる必要がある事を示しているものであり、これは場がオペレータになる事を意味している。この様に、場が出来たり消えたりする状態を生成・消滅演算子により記述する事を「場の量子化」と言う。現在までのところ、実験を記述するために場を量子化したという事以上には、理論的にわかっているとは言えないが、同時にこの手法により現象を記述した場合、それと矛盾する実験はまだ見つかっていなく、理論的な整合性は十分であると考える良い。

4.1.2 重力を含む Lagrangian 密度

電子と電磁場の相互作用を記述する Lagrangian 密度は、現代物理学の最も大きな成功を収めた理論である。場の量子化まで考慮した量子電磁力学は、現在までの全ての実験と矛盾する事はなく、極めて信頼性の高い理論体系となっている。

重力を入れた理論を考える時、当然の事として、最も信頼されている量子電磁力学の理論体系に何とかこの重力の相互作用を組み入れる事が自然な事であると考える。この場合、出発点として重要な事は、重力場を考える場合、これはゲージ理論では不可能であるという事である。その理由は簡単で、ゲージ理論だとその理論が持っている特性として、粒子間の相互作用は必ず斥力と引力の両方が現れてしまい引力だけが必要な重力理論には適していない。

それでは重力場はどんな場であったら常に引力を与えるのであろうか？この答えは、非常に簡単である。すなわち、重力の場が「スカラー場」であれば、その場を媒介とした相互作用は常に引力になっている。ここで、具体的な Lagrangian 密度を書いておこう。質量 m を持つ質点 ψ が電磁場 A_μ と重力場 \mathcal{G} と相互作用する場合の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - m(1 + g\mathcal{G})\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\mathcal{G}\partial^\mu\mathcal{G} \quad (4.3)$$

と与えられている。ここで \mathcal{G} は質量のないスカラー場となっている。この Lagrangian 密度をしっかりと理解する事はそれ程やさしいとは言えないが、しかし専門的に研究して計算をする事以外は、読み飛ばしても全く問題ない。

それでは人々は何故このスカラー場による重力を考えなかったのだろうか？その答えは、恐らくは、スカラー場だと、繰り込みが出来ないと思い込んでいた事が主因であろうと思われる。さらには、繰り込みと関係しているわけだ

が、この数十年間、人々は基本的な相互作用の形はゲージ理論であるべきであるという根拠のない「信奉」に振り回されていたのである。量子電磁力学による繰り込み理論が大きな成功を収めたため、量子電磁力学の基礎であるゲージ原理が本質的であると思いついた節がある。ゲージ原理自体は単に数学的なものであり、確かに物理にそれを応用して、特に量子電磁力学では予想以上に上手く行った事は事実である。しかしだからといって、ゲージ原理が何処でも一般的に通用するかどうかは、全く別次元の問題であり、それはそれぞれ実験によって決定されるべき物である。

この繰り込み理論に関しては第5章でもう少し詳しく議論する事になるが、物理的な観測量に \log 発散がでてきたらそれはその理論形式が健全ではない事を意味している。どう考えてみても、観測量に発散が出たら、これはやはり理論的な枠組みの何処かに欠陥があると考えらるべきである。その発散を自己エネルギーの発散を利用して「波動関数に繰り込む」という繰り込み理論の処方箋には無理があるという気がしている。恐らくは、発散が出るのは自己エネルギーだけであり、これは観測量ではないので気にする必要は無い。そして、観測量は正しく計算したらすべて有限量として求められるべきである。ここで繰り込み理論について一つだけ注意しておこう。物理的に言って、電子やフォトンの自己エネルギーが発散して無限大になっても、これらは観測量ではないので全く問題ない。ところが、場の理論の教科書において人々はこの自己エネルギーの発散を常に問題視していて、これを何とか処理しようとする試みが教科書では紹介され、解説されている。特に、質量の繰り込みという物理的には意味がないと考えられる問題も議論されている。尤も、今、繰り込み理論を勉強している物理の院生からしたら「質量の繰り込みのどこがいけないのですか？」と質問されそうである。これに答えるには、まず、「電子の自己エネルギーはある物理過程を計算した結果」であることを説明することになるだろう。電子がフォトンを出して直ちにその同じフォトンを受取るという過程である。その後、人々はこの自己エネルギー計算の結果をまた元の Lagrangian 密度に足す作業をしている。しかしある物理過程として計算した自己エネルギーを Lagrangian 密度に何故、付け加えてよいのかという物理的な理由を述べることは誰もできていない。人々は2次の摂動計算ででてきた無限大を打ち消すために、カウンター項として導入すると説明するが、自己エネルギーが無限大になっても誰も困らないのである。しかし人々はそれが繰り込みの手法であると主張しているが、しかしこれはかなり無理な計算過程である。繰り込みの処方箋自体がそのトリックとして数学的には良いのかも知れないが、物理的には正当化できない作業を重ねていることがわかる。

4.1.3 重力場の方程式

上記の Lagrangian 密度が決められると、重力場に対する方程式は Lagrange 方程式から求められる。この方程式は時間によっている方程式になっているが、外場である物質場が時間によらない場合は、一般に静的近似をする事が出来る。この場合、重力場 \mathcal{G}_0 に対する方程式は

$$\nabla^2 \mathcal{G}_0 = mg\rho_g \quad (4.4)$$

と求められる。この時、 $m\rho_g$ は物質の密度に対応する。結合定数 g は重力定数と $G = \frac{g^2}{4\pi}$ により結びついている。これは、基本的には重力場に対する Poisson 型方程式になっていて、確かに観測されている重力場を再現できている。

4.1.4 重力場中の Dirac 方程式

上記の Lagrangian 密度から質量 m の質点に対して、重力場とクーロン力がある時の Dirac 方程式は

$$\left[-i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + m\beta(1 + g\mathcal{G}) - \frac{Ze^2}{r} \right] \Psi = E\Psi \quad (4.5)$$

と求められる。ここで重力場が質量 M の原子核によって作られるとするならば

$$\left[-i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \left(m - \frac{GmM}{r} \right) \beta - \frac{Ze^2}{r} \right] \Psi = E\Psi \quad (4.6)$$

となり、前章で議論した重力場中の Dirac 方程式が得られた事になっている。これは非常に重要な方程式になっている。基本的な Lagrangian 密度から質点に対する重力場下での Dirac 方程式が初めてしっかりと求められたことになる。電子や陽子などの素粒子に対してこの重力場中の Dirac 方程式が重要になるような現象はそれ程無いかも知れない。可能性としては中性子星の表面での粒子の運動が相対論的になればあるいは必要になるかも知れない。しかし、後で見るように、この式を非相対論に直し、それを古典論に持って行くとこの時初めて重力場中の Newton 方程式が Dirac 方程式から矛盾無く求められた事になっている。

4.2 光と重力場の相互作用

上記の Lagrangian 密度は光と重力が相互作用する可能性を示している．実際，光とフェルミオンの真空偏極を考慮し，この真空偏極しているフェルミオンが重力と相互作用する Feynman グラフの4次の項を考えると，確かに光が重力と相互作用する事が証明出来るものである．ここで重要な点は，重力とフェルミオンの相互作用が重力と反フェルミオンの相互作用と同じ符号になるという事である．通常の QED を考えた時は，光により真空偏極したフェルミオンと反フェルミオンはゲージ粒子と相互作用すると符合が反対になり，お互いに打ち消し合い結果的にゼロになってしまうのである．この点が重力との本質的な相違であり，従って重力と光が相互作用するのである．

この4次の Feynman グラフの計算で驚く事は，見かけ上このグラフは Log 発散する様に見えるが，実際には有限で値が求まるのである．Log 発散に対応する項は，劇的にそしてキネマティカルに打ち消し合い有限項のみが残る．この辺の事情は $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ の Feynman グラフの計算をした事がある人は直ちに理解できる事である．ちなみに，この $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ の Feynman グラフの計算法は西島和彦の教科書「Fields and Particles」に大変丁寧に書いてあるので，一読してみる価値が十分あるものである．

4.2.1 光と重力場の相互作用の検証

この光と重力場の相互作用による物理的な効果はどのように検証できるのだろうか？光と重力の相互作用による散乱断面積は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha_g^2}{16k^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (4.7)$$

と書かれている．ここで， k と M は光子の運動量と重力中心の質量を表している．また， α_g は

$$\alpha_g = \frac{G\alpha m_t^2 M}{2\pi} \quad (4.8)$$

と定義されている．光と重力場の相互作用を検証するために一番良いと思われることは2つの衛星間にレーザーを飛ばして，その光が地球重力により散乱される時の散乱断面積を測定する事であると思われる．これは，不可能な実験ではないと考えられるが，より良い実験に関しては今後の課題である．

4.3 重力場中の Dirac 方程式の非相対論極限

重力場中の粒子に対する Dirac 方程式が

$$\left[-i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \left(m - \frac{GmM}{r} \right) \beta \right] \Psi = E\Psi \quad (4.9)$$

と求められた事より，その非相対論極限の方程式を求めて，それから新しい Newton 方程式を求める必要がある．この事により，重力ポテンシャルも変更を受ける事になる．そして新しく求められた重力付加ポテンシャルが水星の近日点移動と GPS 衛星の軌道の時間の遅れが矛盾なくに説明される事がわかるのである．さらには，地球の公転における遅れ具合も重力付加ポテンシャルは 0.621 秒/年 と予言しているが，これははうるう秒として観測されてきた観測値 0.625 秒/年 とぴったり合うのである．さらに月の後退が観測されているが，月の運動も当然，重力付加ポテンシャルの影響を受けており，実際，月の後退の観測値が理論計算と良く一致している事がわかるのである．

4.3.1 Foldy-Wouthuysen 変換

重力場中の Dirac 方程式の Hamiltonian は

$$H = -i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \left(m - \frac{GmM}{r} \right) \beta \quad (4.10)$$

で与えられる．この Hamiltonian を Foldy-Wouthuysen 変換して，非相対論的な Hamiltonian を求める事は難しい事ではない．この Foldy-Wouthuysen 変換はユニタリー変換なので，常に信頼できるものである．その結果だけ書くと，

$$H = m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{GmM}{r} + \frac{1}{2m^2} \frac{GmM}{r} \mathbf{p}^2 - \frac{1}{2m^2} \frac{GMm}{r^3} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{L}) \quad (4.11)$$

となる．興味があるのは，古典近似をした後のポテンシャルなので，因数分解仮説

$$\left\langle \frac{1}{2m^2} \frac{GmM}{r} \mathbf{p}^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2m^2} \frac{GmM}{r} \right\rangle \langle \mathbf{p}^2 \rangle \quad (4.12)$$

は，良い近似である．さらに，Virial 定理

$$\left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{m} \right\rangle = -\langle V \rangle \quad (4.13)$$

を用いると最終的な重力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2} \left(\frac{GmM}{r} \right)^2 \quad (4.14)$$

となる．第2項が新しい重力の補正項であり Zeeman 効果と導出が似ているが，これを重力付加ポテンシャルと呼ぼう．電磁場の場合，クーロン力ではこのような非相対論の極限で新しい項は出てこないが，重力はスカラーで入っているので，このような新しい項が現れたのである．電磁場の場合ベクトルポテンシャルの部分は非相対論の極限をとると新しい項が現れてくる事は良く知られているが，重力の補正項もこれと似ていて新しい項が現れてくるのである．

4.3.2 相対論的な Newton 方程式

最近の研究(半澤・藤田論文)により，Dirac 方程式から相対論的な Newton 方程式が直接求められる事が分かっている．この結果だけを書いておこう．

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{m}{E} \nabla \left(-G \frac{mM}{r} \right) \quad (4.15)$$

ここで E は粒子のエネルギーであり，この式は粒子が散乱状態の場合にのみ正しい式であり，束縛されている場合には使えないものである． E は粒子のエネルギーであり $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ と書かれている．ここで $E \simeq m$ と近似すると方程式は

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \simeq e\mathbf{E} + e\mathbf{v} \times \mathbf{B} - G \frac{mM}{r^3} \mathbf{r} \quad (4.16)$$

となり，通常重力ポテンシャルに対応している．もう少し近似を上げると非相対論の場合， $E = m + \frac{p^2}{2m} + \dots$ と展開されるため，重力ポテンシャルに新しい重力付加ポテンシャルが現われる事がわかり，これは基本的には束縛状態の重力付加ポテンシャルに対応している．

4.4 重力付加ポテンシャルによる周期のズレ

重力ポテンシャルは Newton 以来、約 250 年間に渡り $V(r) = -G\frac{Mm}{r}$ という形で使われてきている。この重力ポテンシャルに新しい重力付加ポテンシャルがついたらどのような影響が出てくるのかと言う問題は非常に興奮する問題である。以下において、この重力付加ポテンシャルが水星の近日点移動、GPS の時間の遅れ問題、地球の公転によるうるう秒の問題そして月が後退している問題にどのような影響を与えるのかと言う事を議論して行こう。ここで新しい重力項が

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2} \left(\frac{GmM}{r} \right)^2 \quad (4.17)$$

と表せられたことは重要な意味を持っている。Newton 方程式は

$$m\ddot{r} = -\frac{GmM}{r^2} + \frac{\ell^2}{mr^3} + \frac{G^2M^2m}{c^2r^3} \quad (4.18)$$

となっている。この式を解く事は簡単であるが、その前にいくつか物理量を定義しておく。まず、新しく角運動量 L を

$$L^2 \equiv \ell^2 + \frac{G^2M^2m^2}{c^2} \quad (4.19)$$

と定義する。但し、力学的な保存量は ℓ である事に注意する必要がある。さらに角速度 ω と R を

$$\omega \equiv \frac{\ell}{mR^2}, \quad R \equiv \sqrt{ab} = \frac{\ell^2}{GMm^2(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{4}}} \quad (4.20)$$

と定義する。ここで a, b および ε は長軸半径、短軸半径そして離心率を表すが観測量に現われるのは R である。また、 ω と関係して

$$\Omega^2 \equiv \omega^2 + \frac{G^2M^2}{c^2R^4} = \omega^2 \left(1 + \frac{G^2M^2}{c^2R^4\omega^2} \right) \equiv \omega^2(1 + \eta) \quad (4.21)$$

と定義する。ここで η は

$$\eta = \frac{G^2M^2}{c^2R^4\omega^2} \quad (4.22)$$

である。この時、軌道を与える式は直ちに解けて

$$r = \frac{A}{1 + \varepsilon \cos\left(\frac{L}{\ell}\varphi\right)} \quad (4.23)$$

となる．ここで A と ε は

$$A = \frac{L^2}{GMm^2}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{m(GmM)^2}} \quad (4.24)$$

で与えられる．物理的な観測量は $\dot{\varphi} = \frac{\ell}{mr^2}$ を周期 T に渡って積分する事により得られる．

$$\frac{\ell}{m} \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = A^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(1 + \varepsilon \cos\left(\frac{L}{\ell}\varphi\right)\right)^2} d\varphi \quad (4.25)$$

これは直ちに計算されて

$$\omega T = 2\pi(1 + 2\eta)(1 - \varepsilon\eta) \simeq 2\pi\{1 + (2 - \varepsilon)\eta\} \quad (4.26)$$

となる．ここで ε は十分小さいと仮定しているが厳密解も知られている．この事より，新しい重力項により引き起こされる効果は周期が少しずれる事を表している

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{th} \simeq (2 - \varepsilon)\eta \quad (4.27)$$

と書くことが出来る．この式から分かるように周期が増えており，これは確かに時間の遅れに対応している．ここで式(4.26)は $\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{th} \simeq (2 - \varepsilon)\eta$ と書いて角速度 ω の進みと見る事も可能である．しかし，物理的に計算されたのは周期であり，角速度の進みは便宜上の表現である．

- 水星の近日点移動： 水星の近日点移動の問題はアインシュタインがその解決を一般相対論により試みた事でもよく知られている．実際には一般相対論だと観測値を正しく再現する事は出来ないが，水星の近日点移動の観測値がよく知られた重力より他に何かあるという事を示唆していた事は間違いない．

- 水星の近日点移動の観測値： 水星の近日点移動の観測値はもともとは角速度 ω の進みとして測定されたものと考えられている．それを角度のズレとして現在使われているため，色々な意味での混乱が生じている．これまで通り角度のズレとした場合

$$\Delta\theta \simeq 42'' \text{ per } 100 \text{ year}$$

となっている．水星の周期は 0.24 年である事から，一周回る毎での近日点移動比 $\delta\theta$ は

$$\delta\theta \simeq \frac{42}{3600} \times \frac{1}{360} \times \frac{0.24}{100} \simeq 7.8 \times 10^{-8} \quad (4.28)$$

となる．これは角速度 ω で測定されたとしたならば，このズレは角速度 ω の進みに対応している．その意味で人々は水星の近日点移動を進みと解釈したものと考えられる．一方，理論計算では

$$\eta = \frac{G^2 M^2}{c^2 R^4 \omega^2} \simeq 2.65 \times 10^{-8} \quad (4.29)$$

となる．ここで，水星の軌道半径と太陽質量は

$$R = 5.73 \times 10^{10} \text{ m}, \quad M = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg} \quad (4.30)$$

である事を用いている．これより理論の近日点移動比 $\delta\theta_{th}$ は

$$\delta\theta_{th} \equiv \left(\frac{\Delta\omega}{\omega} \right)_{th} \simeq 4.8 \times 10^{-8} \quad (4.31)$$

となり，観測値と良く一致することがわかる．実際，水星の近日点移動の観測値が 100 年間における移動の観測値である事を考えれば，この理論と実験の一致は非常に良いものであると言えよう．

4.5 GPS 衛星周期のズレ

GPS(Global Positioning System) 衛星に対する新しい重力ポテンシャル項の影響はかなり大きい事がわかる．従って，これは必ず GPS 衛星により明確に検証できるはずである．GPS 衛星は地球の周りを一日に 2 回周回している様に軌道が設定されている．従ってその周期は半日である．GPS 衛星の場合，軌道半径 R ，地球の質量 M それと角速度 ω は知られていて，それぞれ

$$R = 2.6561 \times 10^7 \text{ m}, \quad M = 5.974 \times 10^{24} \text{ kg}, \quad \omega = 1.4544 \times 10^{-4} \quad (4.32)$$

である．これより

$$\left(\frac{\Delta T}{T} \right)_{theory} = 3.38 \times 10^{-10} \quad (4.33)$$

となり、この分だけ周期が長くなっている．このため、Newton 軌道から推測した時間からはこれに対応する時間だけ遅れる事になる．

• GPS 衛星時計の遅れ： 衛星側の内蔵時計では毎秒 100 億分の 4.45 秒を遅れとして補正されている事が知られている [8]．これは

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{GPS} = 4.45 \times 10^{-10} \quad (4.34)$$

に対応している．但し、衛星の時計をこの量だけ遅らせたのは一般相対論の効果とされているが、その計算の理論的根拠は不明である．通常一般相対論による周期のズレの計算では $(\frac{\Delta T}{T})_{GR} \simeq 0.10 \times 10^{-10}$ となり、これよりもはるかに小さい値である．それにもかかわらず、この内蔵時計で採用されている遅れの値 (100 億分の 4.45 秒) は式 (4.33) の値より 3 割程大きいだけであり、確かに大雑把な遅れをうまく表現している．しかしながら詳細に見ると補正量が 3 割程大きすぎるため、地上でも補正せざるを得ないものとなっている．現実問題として、地上の基地局では多少の地上補正をしていると言われているが、地上での補正がどの程度なのかの具体的な数値は明らかにされていない．

• GPS 衛星軌道のズレ： 今、GPS 衛星の角度のズレの式は $\Delta\theta = 2\pi(2-\varepsilon)\eta$ である．これより 1 年間で GPS 衛星のズレを地上に対応するものとして測ったとすると $\Delta\ell_{GPS} (one\ year) = \Delta\ell \times 2 \times 365.25 \simeq \boxed{9.93\ m}$ だけ遅れる事になる．サイエンスとしてみると、GPS 衛星の軌道が Newton 軌道からどれだけズレるかをきちんと測定する事が大切であり、その事は GPS 衛星の情報を総合的に検証する事ができれば、現在でも十分可能な事である．

4.5.1 静止衛星 (GSS, Geostationary Satellite) 周期のズレ

静止衛星の場合、軌道半径 R 、地球の質量 M それと角振動数 ω はそれぞれ

$$R = 4.216 \times 10^7\ m, \quad M = 5.974 \times 10^{24}\ kg, \quad \omega = 7.29 \times 10^{-5} \quad (4.35)$$

である．これより

$$\left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)_{theory} = 2.115 \times 10^{-10} \quad (4.36)$$

となり、この分だけ周期が長くなっている．従って、1 年では

$$\Delta T_{one\ year} = 6.675 \times 10^{-3}\ s \quad (4.37)$$

となっている．今，地上でみたらこの GSS がどれだけずれるかの計算を行う．1 周期あたりの GSS の角度のズレは

$$\Delta\theta = 2\pi \times (2 - \varepsilon)\eta = 1.330 \times 10^{-9} \quad (4.38)$$

である．よって 1 周期あたりに GSS が地上でずれる距離は

$$\Delta\ell = \Delta\theta \times R_e = 8.47 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (4.39)$$

これより 1 年間で GSS が地上でずれる距離は

$$\Delta\ell_{GSS} \text{ (one year)} = \Delta\theta \times R_e \times 365.25 \simeq 3.09 \text{ m} \quad (4.40)$$

であり，この分だけ遅れる事になる．これは静止衛星の軌道が 1 年間で

$$\Delta\ell_{GSS} \text{ (one year)} = \Delta\theta \times R \times 365.25 \simeq 20.4 \text{ m} \quad (4.41)$$

だけずれる事を意味している．

静止衛星側の内蔵時計の補正が行われているかどうかかわからないが，もし毎秒 100 億分の 2.12 秒の遅れが補正されていれば地上での補正は不要である．ただし，静止衛星の場合，そのデータを送信する事が目的なので，内蔵時計の補正は恐らくはそれ程必要ではないものと考えられる．

4.5.2 地球の公転の遅れ – うるう秒

水星の近日点のズレばかりにこれまでの物理的な興味もたれてきたが，水星が Newton 方程式の予言よりも少しずれて回転するならば，当然，地球も同様に公転がずれてくるはずである．実は地球の公転のズレもそれ程水星と比べて小さいわけではない．実際，

$$\eta = \frac{G^2 M^2}{c^2 R^4 \omega^2} \simeq 0.992 \times 10^{-8} \quad (4.42)$$

である．ここで

$$R = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}, \quad M = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}, \quad \omega = 1.991 \times 10^{-7} \quad (4.43)$$

を用いている．これより周期のずれは

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{th} \simeq (2 - \varepsilon)\eta \quad (4.44)$$

で与えられる．従って1年間における地球公転周期は

$$\Delta T_{Orbital\ Motion} = 0.621\ \text{s/year} \quad (4.45)$$

だけ大きくなっているため，これは確かに遅れになっている．従って，この事はうるう秒の補正が必要である事を示している．実際，うるう秒の補正は1972年6月から始まりこれまで40年間に25秒補正している．従って1年間での観測値は

$$\Delta T_{Orbital\ Motion}^{Obs} \simeq 0.625 \pm 0.013\ \text{s/year} \quad (4.46)$$

である．これは式(4.45)の理論値と完全に一致している．

このうるう秒の起源は地球の公転運動から Newcomb が定義した正確な秒時間と原子時計による精密測定による秒時間が少しずつれているという事からきている [9]．すなわち Newtonian 時間がほんの少しだけずれてしまうという事であり，これはそのまま重力付加ポテンシャルの影響そのものである事がわかる．

4.5.3 うるう秒年代測定

地球の公転がこれまで考えてきたよりも1年間で0.62秒遅く太陽の周りを回っていると言う事は当然古い建築物の年代測定に応用する事が出来る．ピラミッドとか石造の古い建物はしばしばその建物のある場所が特別に作られている．例えば，春分の日には太陽がある場所に来るように作られている場合がある．その場合，現在の春分の日における太陽の場所と比較すれば，その建築物が建造された年代がかなり正確にわかる事になる．1000年間で10.3分程度遅れているはずだから，割合簡単に年代測定が可能であると考えられる．

4.5.4 月の後退

月も重力付加ポテンシャルの影響を受けている．ここでは，このズレの量が月の軌道の後退と関係している事を示し観測量と比較しよう．実際，月は1年間に 3.8 cm 後退している事が観測されている．

- 月の軌道のズレ： 月の軌道の場合もズレを表す式はおなじである．ここで η は

$$\eta = \frac{G^2 M^2}{c^2 R^4 \omega^2} \quad (4.47)$$

である．この式で G と c は重力定数と光速， M は重力中心の質量（ここでは地球の質量）， R は軌道半径である．また ω は角振動数で Newton 周期 T_0 と

$$\omega = \frac{2\pi}{T_0} \quad (4.48)$$

と結びついている．月の場合，軌道半径 R_m ，地球の質量 M それと角振動数 ω はそれぞれ

$$R_m = 3.844 \times 10^8 \text{ m}, \quad M = 5.974 \times 10^{24} \text{ kg}, \quad \omega = 2.725 \times 10^{-6} \quad (4.49)$$

である．これより

$$\frac{\Delta T}{T_0} = 2.14 \times 10^{-11} \quad (4.50)$$

となる．今，月がその軌道からどれだけずれるかの計算を行う．角度のズレの式は

$$\frac{\Delta \theta}{2\pi} = \frac{\Delta T}{T_0} = (2 - \varepsilon)\eta \quad (4.51)$$

だから，今の場合の軌道のズレ $\Delta \ell_m$ は1周期につき

$$\Delta \ell_m = R_m \Delta \theta \simeq 0.052 \text{ m} \quad (4.52)$$

となる．よって1年間で月のズレは

$$\Delta \ell_m (\text{one year}) = \Delta \ell_m \times \frac{3.156 \times 10^7}{2.36 \times 10^6} \simeq 69.5 \text{ cm} \quad (4.53)$$

だけ軌道が遅れる事になる．

●月の後退: 観測量: 月の軌道は楕円なのでこの軌道のズレは後退したように見える部分がある. 軌道の式は

$$r = \frac{R_m}{1 + \varepsilon \cos \theta} \quad (4.54)$$

与えられるとして十分である. 今, 月の場合, 離心率 ε は十分小さいので上の式を ε で展開すると

$$r \simeq R_m(1 - \varepsilon \cos \theta) \quad (4.55)$$

となる. 従って, 軌道のズレ Δr は $\theta \simeq \frac{\pi}{2}$ の時を見ると1年間では

$$\Delta r \simeq R_m \Delta \theta \varepsilon \simeq \Delta \ell_m \text{ (one year)} \varepsilon \simeq 3.8 \text{ cm} \quad (4.56)$$

となっている. 一方, 月の後退の観測値 Δr_m^{obs} は

$$\Delta r_m^{obs} \simeq 3.8 \text{ cm} \quad (4.57)$$

と観測されている. これは計算値と良く一致している.

この月の後退の測定はドップラー効果を用いた場合, この精度で可能であると思われる. しかし, 月と地球の絶対距離の測定から 3.8 cm を求める事は不可能である. それは光速の精度が

$$c = (2.99792458 \pm 0.000000012) \times 10^8 \text{ cm/s} \quad (4.58)$$

であり, 8桁の精度しかないのであるが, 月と地球の絶対距離 $R_m = 3.85 \times 10^8 \text{ m}$ と比べて $\Delta r_m^{obs} \simeq 3.8 \text{ cm}$ は10桁目であるため直接測定は不可能である.

また, もし本当に月が後退しているとしたらエネルギー保存則が局所的にせよ破れる事に対応している. 月の運動の全エネルギーを E とした場合, エネルギーのズレ ΔE は

$$\Delta E \simeq -2E \frac{\Delta r_m}{R_m} \quad (4.59)$$

となり, E が負である事から, エネルギーが増える事に対応している. しかも破れているレベル δ が $\delta \sim 10^{-10}$ では物理的に到底容認できる事ではない.

4.6 一般相対論の予言

ここでは一般相対論が物理的観測量として予言している水星の近日点移動の問題を議論して行こう。実際、観測量と比較した場合、一般相対論の予言値はその観測値を再現できない事をここで示すことになる。これまで一般相対論関係の教科書では、水星の近日点移動の観測値が3桁の精度で再現できるものとして紹介されている場合がある。しかし実際は観測量を計算する過程で物理的に正当化できない手法を用いているので、そのことに関してもきちんと解説しておく必要がある。

さらに決定的に重要な観測量として、うるう秒の問題がある。水星の近日点が移動するならば、当然、地球もそれに応じた変化をするべきである。この当然の事が、現代技術の進歩、特に正確な時間測定の長足な進歩により、測定されてきた事は意味深いものがある。実際、地球の近日点移動と同じ現象がうるう秒として非常に正確に観測されていたのである。しかも、この地球の公転の遅れの観測量は新しい重力理論によって完璧に再現されるのに対して、一般相対論の予言では全く再現できていない。これは明らかで、一般相対論のこれまでの計算では、軌道が円の場合、そもそも近日点が存在しないため、近日点移動を計算することができないのである。しかし、実際問題としては、近日点移動も観測量と関係するためには周期を計算する必要がある。理論と実験を比較するためには、何が観測量かという問題をしっかり理解することが最も重要である。さらに、この地球のうるう秒の問題に加えて、GPS衛星の周期のズレの問題もあり、この問題も次章で議論して行こう。

4.6.1 一般相対論と観測量

一般相対論を応用して、実際の観測量と結び付けようとする作業はこれまで沢山のされてきている。ここではその解説を簡単にして行こう。まずは一般相対論が古典力学の方程式に与える影響を評価する事が最も大切である。実は、この記述はブラックホールの予言の問題と密接に関係している。従って、まずはこの一般相対論が予言する高次の効果として、一般相対論による付加ポテンシャルの問題から解説して行こう。

4.6.2 一般相対論による付加ポテンシャル

一般相対論の効果を近似的に無理やり付加ポテンシャルで表すとその付加ポテンシャルを加えた重力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} - \frac{3}{mc^2} \left(\frac{GmM}{r} \right)^2 \quad (4.60)$$

となる。但し、一般相対論の高次項はポテンシャルでは書けないと言われることがある。しかしながら、もしそのことが事実だとしたら、それは一般相対論が内部に深刻な問題を含んでいる事を示している。ニュートン方程式は量子論における期待値として求められているので、すでに観測量と直接に結びつくべき方程式である。従って、この方程式に対する如何なる高次の修正効果も必ず、ポテンシャルの言葉で表現される必要がある。

ここでは、人々が主張している φ 依存性の変化分(後で、式(4.66)で与えられている)を再現するようなポテンシャルとして上記のポテンシャル(4.60)は求められている。この時、ニュートン方程式は

$$m\ddot{r} = -\frac{GmM}{r^2} + \frac{L_g^2}{mr^3} \quad (4.61)$$

となっている。ここで、 L_g^2 は

$$L_g^2 \equiv \ell^2 - \frac{6G^2M^2m^2}{c^2} \quad (4.62)$$

と定義されている。さらに新しく角速度 Ω_g を

$$\Omega_g^2 \equiv \omega^2 - \frac{6G^2M^2}{c^2R^4} \equiv \omega^2(1 - \gamma) \quad (4.63)$$

で定義しておく。ただし、 γ は

$$\gamma = \frac{6G^2M^2}{c^2R^4\omega^2} \quad (4.64)$$

である。

4.6.3 重力崩壊

ここで重要な事は、もし L_g^2 の式で右辺の第2項が第1項よりも大きくなるとこれは重力的に不安定となることである。 r が小さい所では必ず引力が勝ってしまい、角運動量でこれまで崩壊を止めていたのに、もはや止める項がなくなり重力崩壊してしまう。これがブラックホールであり、その条件は

$$R \leq \frac{\sqrt{6}GM}{c^2} \quad (4.65)$$

と表されている。式の細かい係数 ($\sqrt{6}$) はこれまでの計算と異なることはあるが、式 (4.65) が基本的には通常言われているブラックホールの条件と確かに一致している。

● 解が存在しない! : しかしながらこの場合、式 (4.66) でわかるように、 L_g^2 が負であるため軌道の半径 r が負となっていて、これは物理的に意味のある解ではない。従って r が実数では求まらなく、このニュートン方程式には解なしとなっている。ブラックホールの条件 (4.65) を満たさない場合でも、自然界を記述する基本方程式がこのような特異な振る舞いを内包していることは通常ではあり得ない。これはポテンシャル (4.60) におけるニュートン方程式が自然界を記述する方程式ではないことを意味している。

● 相対論的な効果? : ここで一般相対論の専門家は「式 (4.65) を満たすような場合でもニュートン方程式が成り立つのか?」と質問して来ると思われる。この場合、確かに相対論的な効果が効いてくる可能性がある。ところが一般相対論は運動力学の方程式ではないので、この力学の問題に関しては初めから全く無力である。この場合は別の新しい相対論的な方程式を構築する必要がある。実はそれこそが量子場の理論に基づいた新しい重力理論なのである [2, 3]。

4.6.4 水星軌道の進み

それでは、この一般相対論による付加ポテンシャルはどのような水星の近日点移動を予言するのであろうか? ニュートン方程式に対する軌道の解は

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos\left(\frac{L_g}{\ell} \varphi\right)} \quad (4.66)$$

と書けており、ここで A_g は

$$A_g = \frac{L_g^2}{GMm^2} \quad (4.67)$$

で与えられている．物理的な観測量は前述したように積分量であり，今の場合のニュートン方程式で保存量である角運動量から $l = mr^2\dot{\varphi}$ より，

$$\frac{l}{m} \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = A^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\{1 + \varepsilon \cos(\varphi(1 - \gamma))\}^2} d\varphi \quad (4.68)$$

と積分すれば良く

$$\omega T \simeq 2\pi\{1 - (2 - \varepsilon)\gamma\} \quad (4.69)$$

が直ちに求められる．しかし一般相対論による付加ポテンシャルで引き起こされる効果は

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{th} \simeq -(2 - \varepsilon)\gamma \quad (4.70)$$

となり角速度の遅れを与えている．これは，一般相対論の予言値が観測値と矛盾している事を明確に示している．この事より，一般相対論は概念的な困難だけでなく，観測量との比較からも正しい理論ではない事が示されている．

4.6.5 これまでの理論計算の予言

それでは，これまでの人達は何故一般相対論の予言値が水星の近日点移動の観測事実を再現できると思ったのであろうか？その答えは簡単である．これまでの理論計算においては，角度のズレだけで観測量と結びつけられると思いだんだ事によっている．水星の軌道を与える式は

$$r = \frac{A_g}{1 + \varepsilon \cos\left(\varphi\left(1 - \frac{1}{2}\gamma\right)\right)} \quad (4.71)$$

と表された．ここで角度の式には L_g^2 の具体的な式を入れてある．但し， γ は充分小さいとしている．この時，水星の近日点は軌道の式から

$$\varphi\left(1 - \frac{1}{2}\gamma\right) = 0 \quad (4.72)$$

で与えられるが，この場合明らかに $\varphi = 0$ となってしまう．そこで人々は

$$\varphi\left(1 - \frac{1}{2}\gamma\right) = 2\pi \quad (4.73)$$

が近日点を与えるからと言ってこの式から角度のズレを求めたのである．この場合，確かに

$$\varphi \simeq 2\pi + \pi\gamma \quad (4.74)$$

が求められて，水星の近日点移動が $\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\gamma}{2}$ となっている．そしてこの物理量は観測値を良く再現していた．しかし，この式には数学的に明らかな矛盾点がある．それは， φ は常に $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ で定義されているという事である． φ が 2π を超える事はあり得ない事であり，定義されていない．

さらに近日点の問題において，実際には軌道を一周回って初めて近日点が変わることに注意する必要がある．それはすなわち，軌道を一周まわる操作を必ずしなければならぬ事を意味しており，一周回ると言う事は結局，周期を計算することに対応している．

4.6.6 一般相対論の物理的観測量

それではこれまでの計算結果 (4.74) に対応する正しい観測量はどのように計算したら良いのであろうか？これはやはり周期に対応する量を計算する必要があり，それは

$$\omega T \simeq 2\pi(1 + \varepsilon\gamma) \quad (4.75)$$

と求めればよい．従って，この効果は

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{th} \simeq \varepsilon\gamma \quad (4.76)$$

となり，確かに角速度 ω の進みを与えている．しかしながら，この場合の角速度 ω の進みは離心率 ε に比例しており，水星の近日点も $\varepsilon = 0.2$ であるため，理論値は観測値よりはるかに小さくなる．さらに，GPS 衛星や地球の公転の場合，離心率 ε がほとんどゼロであるため，これだけを取ったとしても，一般相対論は GPS 衛星と地球の観測値を再現できていない事が良くわかるものである．

4.6.7 Feynman の非公開研究ノート

観測値が $\omega T = 2\pi$ からのズレであるという視点は、過去において何人もの物理屋が検証した事と思われる。そのうちの一人は Feynman であり、彼は非公開の研究ノートで同じような計算をしている。しかし Feynman の時代では水星の近日点移動のデータしかなかったので、一般相対論による計算結果が観測値の3分の1でも彼はこの程度でも良いのだらうと思ったようである。実際、観測値自体が非常に古いものであり、またズレの方向が正しい事でもあったので、この段階での結論としては理解できるものである。もし GPS と地球公転の近日点移動のデータがわかっていたら、彼も恐らくは一般相対論を疑った事であろう。ここでこれまでの計算結果を表にまとめておこう。ここで一般相対論としてあげてある数値は式 (4.76) による計算であり、Feynman の予言値もこれと同じである。

近日点移動の観測値と予言値の比較

	水星 ($\Delta\omega/\omega$)	GPS ($\Delta\omega/\omega$)	地球の公転 ΔT
観測値	8.0×10^{-8}	4.5×10^{-10}	$0.625 \pm 0.013 \text{ s/year}$
新しい重力理論	4.8×10^{-8}	3.4×10^{-10}	0.621 s/year
一般相対論	3.3×10^{-8}	0.10×10^{-10}	0.031 s/year

このように、観測値をしっかりと検証する事は常に重要である事がよくわかる。これまで見てきて明らかになったように、一般相対論はその理論の出発点から問題を含んでおり、さらにその理論モデルの予言値は観測値を再現できていない。さらに、次章で見るように量子場の理論による新しい重力理論が発見され、その理論の予言値が観測値を良く再現している。その意味においては、一般相対論は単純に不要な理論となっただけであり、物理学の理論体系からすれば特に影響されることはない事も確かである。

4.7 新しい宇宙論

一般相対論が否定され、通常の場合の理論で重力がきちんと理解できるようになったという事は、即ち、宇宙論に大きな影響をもたらす事は明らかである。この場合、ビッグバンではなくて、全くそれとは異なる宇宙論を考えて行く必要がある。それともう一つ重要な要素がある。それは、光が重力と相互作用するのである。この相互作用は光が真空偏極してその時のフェルミオンが重力と相互作用する Feynman グラフの4次の項としてでてくるものである。従って、強い重力源のところでは、光は散乱する可能性がある。これらの情報をもとにして、新しい宇宙像を考えて行きたい。

4.7.1 コスミックファイアボール

現在、多くの銀河は全体として膨張している事がわかっているが、しかしいづれは必ず重力による引力により引き合い融合する事になる。それが大雑把に何時であるかは、ある程度は計算出来ると思うが、それ程興味のある物理学上の対象にはならないし、あまり興味が湧く事でもない。しかしながら、膨張が止まった段階で、沢山の銀河は少しずつ融合しながら、より大きな銀河団を作って行く事であろう。そしてそれを繰り返す事により、最終的には、2個か3個の大銀河団になって行き、それらが最後の衝突を起こす事になるであろう。その最終的な衝突で作られた物を「コスミックファイアボール」と呼ぶ事にした。このコスミックファイアボールの状態は非常に熱いものになっている事と考えられ、それは恐らくはこれまで考えられて来たビッグバンの状態の中でバリオンと電子の世界になった状態に似ているものと考えている。従って、この場合は最初にヘリウムまでは作られるであろうが、その後はやはり急速に冷えて行き、重い原子核の生成はこのコスミックファイアボールの段階では、作り難いものであると考えても矛盾は無いものと思われる。

4.7.2 前宇宙の残骸

この新しい宇宙論によると、銀河と宇宙の形成は繰り返す事になる。この宇宙の形成は約150億年程の昔に大方作られたものと考えられているが、それではその前の宇宙はどうであったのであろうか？恐らくは、今の宇宙の様に沢山の銀河が融合してコスミックファイアボールになったと考えられるが、何か、その爆発の「残骸」に対応するものがあれば、よりわかり易いと思われ

る．その残骸に対応するものとして考えられるものは、やはり銀河の大構造であろう．この銀河の大構造に関する詳しい内容は、宇宙物理学の専門書を参照していただく事にしたいが、銀河団の空間的分布がある所でかなり偏っているという事である．それはまるで壁を作っている様に並んで見える場合が観測されているのである．これは、最終段階の銀河団の衝突の仕方と密接に関係している物と思われる．

それ以外の前宇宙の残骸としてフォトン・バリオン比があるだろう．この事は、第1章でも議論しているが、この宇宙はフォトンの数がバリオン数より大幅に多いが、この理由は物理学では現在までのところ、解明されていない．この宇宙のバリオン数に関しては、恐らくこれは物理の対象にはならないと思っている．つまり、このバリオン数を持つ宇宙が無限に遠い過去からずっとあったと考えるしか他に仕様がなない．しかし、フォトンは何時でも作られるので、増える事は確実である．しかしどの様に増え、そしてどの程度がこの宇宙の外に逃げて行くのかは、まだ良くわからない．いずれは、ある程度の計算は出来るかも知れない．

4.7.3 無限の過去・未来と無限の空間

この新しい宇宙論の描像によれば、無限に遠い過去から無限に遠い未来まで同じ事（銀河と宇宙の生成）を繰り返してきたし、また将来も繰り返す事になる．それでは、無限の過去・未来とは一体何なのであろうか？これこそは、確かに永遠の課題であろう．しかし、はっきりしている事は、人間は有限量しか理解出来ないのである．無限と言葉で言っても、実際は何もわかっている訳ではない．数学者に言わせれば、人間は所詮数える事しか出来ないのであるという事になる．そして、脳科学者に言わせれば、人間の脳はせいぜい1兆個の脳細胞により思考しているから、無限の過去・未来を理解する事は不可能であるという事になる．

さらに言えば、空間的にも宇宙は無限であるとしても、なんら矛盾が無い．これまでは、宇宙が無限であるとしたら Olbers のパラドックにより、星の光を全て足すと必ず無限大の光になってしまうから、宇宙が無限では困ると言う事が考えられてきた．この事も人々がビッグバン宇宙論を支持する一つの根拠でもあった．しかしながら、Olbers のパラドックには基本的な仮定として、星が常に一様に分布しているという事がある．この新しい宇宙論の場合、明らかに一つの宇宙がほとんど閉じた形で成立しており、一様性の仮定が成り立っていない．さらに、光が重力と散乱する事より、必ずしも全ての光が遠方

まで届くわけではない。さらに言えば光速は有限速度であり無限の彼方から光が届くには無限の時間が掛かることになっている。従って、この我々の宇宙と同じ様なレベルの大宇宙が他に無限個あったとしても、別に驚く事ではない。ただ、残念ながら我々にはそれ以上理解できないし、また他の大宇宙との相互作用もほとんどゼロに近いであろうから、物理学の対象にはならない事も確かである。それ以上に、人間には無限の空間と言う事を理解する事が出来ない。どんなに想像したとしても、それは所詮有限の空間なのである。

ある意味で、ビッグバン宇宙論はこの宇宙を有限の空間に閉じ込めたいと言う一種の人間の願望があったように思われる。もう少し強く言えば、人間がわからない事はないと言う一つの驕りがあったように思われてならない。確かに、数学的な「無限」は理解し、それをある程度コントロールする事は可能であるかも知れない。例えば、場の理論模型において、熱力学極限の問題で箱の大きさ L を無限大にする事により物理的な観測量と結びつける事が出来るが、この時 L を無限大にするという意味は、その模型にあらわれるあらゆる長さスケールと比べて L が十分大きいと言っている事なのである。しかしながら、自然界での「無限」はどの様に人間が考えてもそれを理解する事は全く不可能な事である。それは、宇宙では比較すべき長さスケール自体が存在しなく、言い換えればその長さスケール自体が無限であったら、もはや理解不能であるという事は誰でもわかる事である。さらに言えば、これは科学の本質と関係している。科学は観測した事実を理解する事がすべてであり、観測出来ない事を理解しようとする事、あるいは理解したいと思う事は、科学ではない。

4.7.4 新しい宇宙像

これまで見てきたように新しい宇宙像とは、沢山の銀河が形成され全体が膨張し続けて行き、その膨張エネルギーを使い果たしたある段階から今度は収縮に転じて行き、いずれはまたコスミックファイアボールになり、爆発して膨張するという現象を繰り返して行くのであろうという物である。この場合、この宇宙に中心はあるのであろうかと言う疑問を持つのは至極当然である。惑星系も銀河系も全てその中心に重い星が存在しているからである。しかしながら、銀河全体を見るに及び、これはむしろ原子核の多体系に近いのであろうと想像できる。原子核の場合、それは陽子と中性子によって作られている。ところがこの物体には中心となるものが存在していない。それぞれの核子が平等の役割を果たして、原子系のように、その中心に原子核があるという系ではないのである。今の場合、一つの核子からすると、その原子核の中心が何処であ

るかという設問に対しては、どのようにしても答える事は出来ないのである。但し、その原子核全体を見渡す事が出来れば、その中心が大雑把には何処にあるかが、平均値としてわかる事にはなっている。但し、それぞれの核子が動いている限り、実際問題としてその中心を示す事は原理的に出来ない事である。この宇宙全体の中心の問題もこれに極めて近いものであると考えられる。平均したら、この宇宙の中心がどのあたりにあるのかはもし宇宙全体を見渡す事が出来たら、大雑把には議論出来る可能性はある。しかし、宇宙の一部に存在する観測者からこの宇宙の中心を探る事は原理的に不可能である。尤も、それ以上に、この設問がどの程度物理的に意味があるのかはまだ自分には良くわからない。

4.7.5 宇宙の無限性と背景輻射

この我々の宇宙には 2.7 K の背景輻射が存在している。宇宙にこの低エネルギーのフォトンが一様に分布し存在しているとするとこれはかなりのエネルギーになっている。大雑把に言って、すべての物質が持っている宇宙の重力ポテンシャルエネルギーの数%は存在しているものと思われる。この事自体は別に問題ないが、問題はフォトンが我々の宇宙からその外へエネルギーを持ち去っているという事実である。これがたとえ重力ポテンシャルの数%でも、いつかはすべての重力ポテンシャルエネルギーを持ち去ってしまう事は明らかである。

この現象を解釈する模型として大雑把に言って2つ考えられる。1つ目の模型として、我々の大宇宙は爆発と収縮を繰り返し、その度にこの 2.7 K の背景輻射をこの宇宙外に放射して行くというものである。この事により徐々に重力のポテンシャルエネルギーを失って行き、いずれ全く冷えた状態になって行くというものである。この場合は、背景輻射の放出がどこから出ているのかを説明する必要がある。黒体輻射によると考える場合、本当にそれが可能であると言う事を示す必要があり、現在までのところ、まだ正確な模型計算はなされてはいないのが現状である。

もう一つの模型として、我々の大宇宙と同様な宇宙が無限にあると言うものである。この場合、どの宇宙も爆発と収縮を繰り返し、その度にこの 2.7 K の背景輻射を放出すると言う事は同じである。しかしこの場合、2.7 K の背景輻射は宇宙全体に存在するべきものであり、その温度の多少のずれはあるにせよ、基本的には、この電磁波の海の上に我々の宇宙が存在していると言う事になる。この模型の場合、2.7 K の背景輻射を理解する事はそれ程難しくはな

なるが、しかし、わからない問題を無限空間に押しやっただと言われても仕方がない模型である。

これら以外にも、様々な模型がこれから提唱されてゆく事になると考えられる。これは面白い問題ではあるが、同時にどこまで科学になれるかが、模型の焦点になる事であろう。

4.7.6 無限宇宙 (Mugen Universe)

宇宙全体を考える時に、我々と同じレベルの宇宙が無限個あるべきであるという事が理論的に結論される事が分かる。これは物理ではなくお話であるが、少し解説する事にしよう。まず、最初に、宇宙の階層構造を定義しておこう。それは大雑把に以下のように定義するのが合理的であろう。

$$10^{57} \times \text{protons} \Rightarrow \text{star} \quad : \quad 10^{12} \times \text{stars} \Rightarrow \text{galaxy} \quad :$$

$$10^{12} \times \text{galaxies} \Rightarrow \text{universe} \quad : \quad \infty \times \text{universe} \Rightarrow \text{mugen - universe.}$$

ここで一つ問題になる事がある。それは、もし我々の宇宙だけがこの宇宙全体に存在していたとすると、その場合は理論の整合性が取れなくなるのである。

- 一つの宇宙の問題点： この宇宙が無限の過去から存在したと言う仮定は、至極、合理的である。逆にもし途中で作られたとしたら、どのように作られ、またその元のエネルギーは何であるのかなど、説明がつかない事であふれてしまうのである。従って、無限の過去から現在の我々の宇宙が存在していたと言う事は、現在の物理学においては間違いない事である。この場合、コスミックファイアボールの生成を無限回繰り返してきた事も事実と考えてよい。しかし、そうだとすると問題が生じるのである。それは1回のコスミックファイアボールにおいて、有限のエネルギーがフォトンとニュートリノによって我々の宇宙の外に放出されている。それがたとえ小さな量でも、無限回行なっている限り、我々の宇宙の重力エネルギーは既に無くなっているはずであり、理論的に矛盾してしまう事になる。これを回避するためには、どうしても我々と同じレベルの宇宙が無限個存在していないと困る事になっている。

4.7.7 無限個の銀河の宇宙

宇宙全体には我々の宇宙と同じレベルの宇宙が無限個存在しているという仮定の場合 (Mugen-universe) , フォトンとニュートリノによってエネルギーが失われても問題にならない。それは明らかで、他の宇宙から結局同じレベルのフォトンとニュートリノエネルギーが供給されるからである。従って、この場合、重力エネルギーの問題は解決される。

しかしこの時、その無限宇宙は何故、重力的に安定であるのかが問題になるが、これは無限系を考えると解決される事である。今、簡単のために1次元系を考えよう。無限空間を円で表して、後で半径を無限大にすればよい。この時、今、我々の宇宙がある一点に存在するとしよう。この場合、その右方全体の宇宙から引力を受ける事になる。所が、同じように左方全体の宇宙からも引力を受ける事になっている。円を考える限り、これは両者ともに同じ重力になり、即ち、つり合う事になり、安定である事がわかる。

これは勿論お話レベルであるが、しかし、理論内の整合性は常にしっかり考えておく必要がある事は間違いない。

第5章 物理学の展望

物理学はいくつかの基本法則をもとにして自然現象を理解しようとする学問である。そこで最も重要な役割を果たしているのは、相対性原理である。相対性原理とは、どの慣性系でも、基本法則は同様に成り立ち、いかなる観測量も同じであるというものである。我々の持っている4つの基本方程式は全てこの相対性原理を満たしている。この我々が持っている方程式は「場の方程式」である。ただ、Newton方程式は質点の座標に対する方程式であるが、しかしこれも Schrödinger 方程式から場の期待値を取る事により Newton 方程式が導かれる事から、全ては場の理論が基本であると考えて良い。その場合、結局 Maxwell 方程式が全ての出発点であり、ある意味ではこれを原理と考えても良いと思われる。

この章は少し数学を使った解説が多くなっており、物理の専門家以外にはあるいは難しすぎると感じるかも知れない。今後の物理の方向を考え、それをより具体的に解説する事が重要であると考えたために、これから物理を学ぼうとしている若手を念頭において解説している。

5.1 量子化

長い間、古典力学が物理学の基本であると人々は思っていたし、それはそれで道理に適っているとも言える。実際、科学の歴史からすれば、これは当然の事である。Newton 力学が出発点であり、量子力学もその古典力学から求められたものである。しかしながら、科学史は別にして、現代の我々が考える物理は歴史にとらわれる必要はない。すなわち、古典力学から出発する必要は無いのである。実際、Maxwell 方程式を見てみると、これはすでに場の理論である事は誰でも知っているし、逆に言えば電場や磁場から「場」という概念が生まれたわけである。この場合、非常に重要な事が Maxwell 方程式から何う事が出来る。それは Maxwell 方程式は「量子化を知っている」という事である。Maxwell 方程式には逆に言えば古典力学に対応する方程式が存在していない。

これは最初から量子化された方程式なのである．この事は昔からわかっていた事であり，新しい事でも何でも無い．しかしながら，この事実がはっきりと認識されたのは，ごく最近の事であると言って良い．

Maxwell 方程式が基本方程式であるとする時，古典力学のハミルトニアンを量子化して Schrödinger 方程式を求める際に使っている式 $p = -i\hbar\nabla$, $E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ はその根拠を失う事になる．結果的には，古典力学のハミルトニアンから上式の量子化の手法により Schrödinger 方程式が求められるが，しかしだからといって量子化の過程が基本的であるという事にはならない．これまで，運動量とエネルギーを微分演算子で置き換える手法を「量子化の原理」と考えてきたが，明らかにこれは原理ではなくて，結果である事が Maxwell 方程式から良くわかるのである．さらには，Schrödinger 方程式を導出する際に，この置き換えの手法だと状態 ψ が何故あられるのかと言う質問に答えられていない．量子力学の講義で学生に教えるのは，運動量とエネルギーを微分演算子で置き換える限り，その微分がなされる状態を用意する必要があり，これが ψ である，という言い訳をして説明するが，しかし，これが取ってつけた様な言い訳であると言う事は，誰でも感じる事である．しかしながら Schrödinger 方程式が実験を良く再現している限り，物理的にはそれ程深刻な問題ではない事も確かである．

5.2 Dirac 方程式の導出 (Dirac の手法)

量子力学の基本方程式である Schrödinger 方程式が Dirac 方程式を非相対論の近似をする事により求められる事は良く知られている．従って，Maxwell 方程式を出発点(原理)にして，Dirac 方程式が導けられたらこれは最も合理的なものとなる．そして，実際この事が可能なのである．但し，もう一つ条件をおく必要があり，それがゲージ不変性である．Maxwell 方程式がゲージ不変になっているので，電磁場がフェルミオンと相互作用する時，全 Lagrangian 密度がゲージ不変である事を要求すると，確かに Dirac の Lagrangian 密度が決定される事がわかっている．

Maxwell 方程式を原理にして Dirac 方程式を導く事がどの様にしたら可能であるかを以下に議論して行こう．しかし，その前に Dirac がその方程式を導いた直感的な方法について解説しよう．

5.2.1 Dirac 方程式の直感的導出法

Dirac 方程式は相対論的なフェルミオンを記述する理論であり，現在までのところ，最も信頼できる理論体系の一つである．結局，相対性理論 (Lorentz 変換) と矛盾しない理論が正しいものである限り，基本的な方程式は相対論的な方程式であるべきである．

Dirac はまずエネルギーと質量に関するアインシュタインの関係式 (分散関係式) から出発した． $E^2 = m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2$ である．ここで，今考えているのは，質量 m を持ち，その運動量が \mathbf{p} である質点であり，相互作用は仮定されていない．この時，Dirac はこの分散関係式を因数分解する事にした．それはエネルギーの 1 次式を得たかったからである．Dirac の因数分解は次のようになされた．

$$E^2 - \mathbf{p}^2c^2 - m^2c^4 = (E - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\alpha} - mc^2\beta)(E + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\alpha} + mc^2\beta) = 0 \quad (5.1)$$

ここで， $\boldsymbol{\alpha}$ と β は 4 行 4 列の行列であり，具体的には

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

と書かれていて，ここで $\boldsymbol{\sigma}$ は Pauli 行列と呼ばれている 2 行 2 列のエルミート行列であり，次のように書かれている．

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z), \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

従って，Dirac 方程式は因数分解されたうちの一つを取れば十分なので，

$$\left(-i\hbar c \nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + mc^2\beta\right) \Psi(t, \mathbf{r}) = i\hbar \frac{\partial \Psi(t, \mathbf{r})}{\partial t} \quad (5.3)$$

となり，これがフェルミオンを記述する Dirac 方程式である．この時，運動量とエネルギーを微分演算子にする通常的手法を採用している．なお，電子がクーロンポテンシャル中を運動する場合，すなわち水素原子の場合は Dirac 方程式が

$$\left(-i\hbar c \nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + mc^2\beta - \frac{e^2}{r}\right) \Psi(t, \mathbf{r}) = i\hbar \frac{\partial \Psi(t, \mathbf{r})}{\partial t} \quad (5.4)$$

と書かれている．この場合のエネルギー固有値は実験を見事に再現している．

5.3 Dirac 方程式の新しい導出法

量子化として知られてきた式

$$\mathbf{p} = -i\hbar\nabla, \quad E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad (5.5)$$

がその根拠をなくした場合は, Dirac が導出した手法は使えなくなる. 科学史的には勿論問題ないが, しかし他のもう少ししっかりした導出法を考える必要がどうしてもでてくるものである. 以下に解説する手法は, Maxwell 方程式を指導原理として, さらにはそこで見つかったゲージ不変性を原理として利用して行くものである. 基本的には, 電磁場と Dirac 場が相互作用している Lagrangian 密度をゲージ不変である事を要求する事によって求めて行くと言うものである. 以下においては, 再び $\hbar = 1, c = 1$ の表示に戻る事にしよう.

5.3.1 電磁場の Lagrangian 密度

出発点は Maxwell 方程式である. これを基本原理とする. この Lagrangian 密度を書くと

$$\mathcal{L} = -gj_{\mu}A^{\mu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (5.6)$$

ここで A^{μ} はゲージ場であり, $F^{\mu\nu}$ は場の強さと呼ばれるもので

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu} \quad (5.7)$$

と書かれている. この $F^{\mu\nu}$ は計算してみれば直ちにわかる事だが, 実は電場と磁場そのものである. 例えば, F^{01} は

$$F^{01} = \partial^0A^1 - \partial^1A^0 = -\frac{\partial A^1}{\partial t} - \frac{\partial A^0}{\partial x} = E_x \quad (5.8)$$

であるから, 電場をあらわしている. また, F^{12} は

$$F^{12} = \partial^1A^2 - \partial^2A^1 = -\frac{\partial A^2}{\partial x} + \frac{\partial A^1}{\partial y} = -B_z \quad (5.9)$$

であるから, 磁場をあらわしている. また, Lagrange 方程式から

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = gj^{\nu} \quad (5.10)$$

が求まり, これはベクトルポテンシャル A_0, \mathbf{A} で書いた Maxwell 方程式そのものである.

5.3.2 ゲージ不変性

上記で求めた Lagrangian 密度の第 2 項 $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ は次のゲージ変換に対して不変である．

$$A'_0 = A_0 - \frac{\partial\chi(t, \mathbf{r})}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi(t, \mathbf{r}) \quad (5.11)$$

ここで $\chi(t, \mathbf{r})$ は任意の関数であり，確かに $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ は，ゲージ変換してもその後 $\chi(t, \mathbf{r})$ には依っていない．ところが，Lagrangian 密度の第 1 項 $gj^\mu A_\mu$ はゲージによってしまう．これは明らかで，ゲージ変換に対して

$$gj^\mu A'_\mu = gj^\mu A_\mu + gj^\mu \partial_\mu \chi(t, \mathbf{r}) \quad (5.12)$$

となり，ゲージ変換の後の Lagrangian 密度は $\chi(t, \mathbf{r})$ という非物理量に依ってしまい，ゲージ不変ではない事がわかるのである．

5.3.3 ゲージ不変な Lagrangian 密度

それではゲージ不変な Lagrangian 密度は作ることが出来るのであろうか？それは可能であり，以下に解説して行こう．まずは物質による電流密度 j_μ であるが， ψ^\dagger と ψ で 4 元ベクトルを作ろうとすると，数学的にこれはどうしても ψ が 4 個の成分を持っていることが必要条件である事がわかっている．この場合，

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

$$\psi^\dagger = (\psi_1^\dagger \quad \psi_2^\dagger \quad \psi_3^\dagger \quad \psi_4^\dagger)$$

として，これから $\psi_i^\dagger \psi_j$ を作ると 16 個あるわけだが，これらは， $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_0$ と定義した表現を使うと Lorentz 変換に対する性質から

$\bar{\psi}\psi$ (scalar), $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ (vector), $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ (pseudo - scalar), $\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ (axial - vector)

それにテンソル $\frac{i}{2}\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$ に分類される．但し， γ_μ はガンマ行列である．Dirac 表示という割合良く使うガンマ行列の表現を具体的に書くと，

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

と書ける．この事より，フェルミオンの4元ベクトルは確かに作られ，

$$j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \quad (5.14)$$

と書けるのである．

それでは，ゲージ変換をした時にゲージ不変を破る項をフェルミオンに対応する Lagrangian 密度を入れる事により消去する事が出来るのであろうか？答えは簡単で次のような項 $\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi$ を付け加えれば良い

$$\mathcal{L} = C_1\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (5.15)$$

ここで C_1 は定数であり，また j_μ は $j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ と置き換えてある．この時，ゲージ変換はフェルミオンの部分の位相も変換させる事にして

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\chi, \quad \psi' = e^{-ig\chi}\psi \quad (5.16)$$

と変換すると

$$\mathcal{L}' = i\bar{\psi}'\partial_\mu\gamma^\mu\psi' - g\bar{\psi}'\gamma_\mu\psi' A'^\mu - \frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} \quad (5.17)$$

となり， χ にはよらない Lagrangian 密度が得られている．但し， χ による項を打ち消す合うために $C_1 = i$ と取っている．この Lagrangian 密度に質量項を足す事はゲージ不変性を壊す事にならないので最終的な Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - g\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (5.18)$$

となり，質量 m のフェルミオンがゲージ場と相互作用する Lagrangian 密度が求められた事になる．ここで，質量 m と結合定数 g は実験から決定されるべきものである事は言うまでも無い．

5.4 古典場の理論

Dirac 方程式が場の方程式として基本原理から導かれた事は非常に重要である．これは第一量子化と言われて来た式

$$\mathbf{p} = -i\hbar\nabla, \quad E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad (5.19)$$

が原理ではないと言う事を意味している．この事は実は色々なところで考え直しを要求してくる．特に，これまで Klein-Gordon 方程式と呼ばれている

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\psi = 0 \quad (5.20)$$

はスカラー場に対する方程式である．この方程式は

$$\begin{aligned} E^2 - \mathbf{p}^2 + m^2 &= (-\hbar^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right) = 0 \\ \implies \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\psi &= 0 \end{aligned}$$

という第一量子化による置き換えにより得られたものであるが，この式がもはやその根拠を失う事になる．すなわち，Klein-Gordon 方程式は基本方程式ではあり得ないのである．この事は，結局，基本原理としては常に場の理論から出発するべきであると言う事を意味している．

5.4.1 実スカラー場

実スカラー場に対する Klein-Gordon 方程式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2\right)\psi = 0 \quad (5.21)$$

であるが，これは不思議な方程式である．Schrödinger 方程式の場合，波動関数 ψ は常に複素数である．これは Schrödinger 方程式

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \quad (5.22)$$

を見れば明らかで， ψ^* に対する方程式は

$$-i\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = H\psi^* \quad (5.23)$$

となって、異なる方程式になっている。この事は、確かに ψ と ψ^* が独立である事を示している。

• 非相対論極限：ところが、Klein-Gordon 方程式における ψ は実スカラーで良いことが方程式から明らかである。しかし、この場合本当に実スカラーで良いのであろうか？ここで、数学と物理学の違いが顕著に現れてくると思われる。数学的には勿論、実スカラーで良い事は、誰でもチェックできる事である。しかしながら、それではこの粒子の運動がゆっくりである時に非相対論の極限である Schrödinger 方程式の解と一致しなくて良いのであろうか？良く知られているように、Schrödinger 方程式の解は常に複素数である。それは、解が常に

$$\psi(t, \mathbf{r}) = e^{-iEt} \phi(\mathbf{r}) \quad (5.24)$$

と書く事ができ、これは実数になる事はあり得ないからである。従って、単純に Klein-Gordon 方程式の解 ψ を実スカラーと取ってしまうと非相対論の極限が存在しない相対論の方程式と言う事になってしまい、理論的な整合性がない事になる。

• 自由粒子の解：それでは実スカラー場に対する Klein-Gordon 方程式は自由粒子の解を持っているのであろうか？時間によらない方程式をみると

$$(-\nabla^2 + m^2) \phi(\mathbf{r}) = E^2 \phi(\mathbf{r}) \quad (5.25)$$

となっている。これは、 E^2 に対する固有値方程式となっている。従って、この場合、基本的には Schrödinger 方程式の場合と全く同じである。さらには、この方程式は運動量演算子と可換であるため、固有値問題としては、運動量の固有関数にもなっているべきである。すなわち、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V\omega}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (5.26)$$

を方程式の物理的な解として採用すべきである。ここで、 $\omega = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$ であり、また ϕ の次元を考えて $\sqrt{\omega}$ を分母に入れてある。従って、 $\psi(t, \mathbf{r})$ は

$$\psi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V\omega}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \quad (5.27)$$

となっている。

5.4.2 複合粒子に対する Klein-Gordon 方程式

π 中間子はクォークと反クォークからできている複合粒子である。この π 中間子のスピンはゼロであり、ボソンに対応している。この場合、この π 中間子の重心運動を記述する方程式は何であろうか？結果的には、これはほとんど Klein-Gordon 方程式と同じ方程式により記述されるものと考えられる。理由は簡単で、クォークと反クォークから作られているので、これはクォークと反クォークの波動関数をそれぞれ掛けたもの（直積）になっている。その重心運動を Dirac の波動関数で書き表したら、恐らくは Klein-Gordon 方程式と同じ形の方程式によって記述されるものと考えられる。そして、重心運動の解は

$$\psi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V\omega}} e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (5.28)$$

という形で書かれるものと思われる。

5.4.3 電磁場とスカラー場の相互作用

基本粒子としてのスカラー場が存在していたとしたら、この粒子は電磁場とどのような相互作用をするのであろうか？Maxwell 方程式から出発して、ゲージ場 A_μ と結合出来るためには、どうしても4成分のスピンルである必要があった。従って、そのままでは、スカラー場が電磁場と相互作用する形を作る事は出来ないのである。当然の事であるが、スカラー場は他のスカラー場としか結合できない事は明らかである。

5.4.4 ゲージ場とスカラー場の相互作用

Maxwell 方程式から離れて、方程式のゲージ不変性だけを原理にすれば、スカラー場とゲージ場の相互作用を表す Lagrangian 密度を作る事は出来る。自由なスカラー場の Lagrangian 密度を

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi \quad (5.29)$$

とした時、この上式にミニマル変換をすれば

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu - igA_\mu)\phi^\dagger][(\partial^\mu + igA^\mu)\phi] \quad (5.30)$$

となり，ゲージ不変な Lagrangian 密度が求められた事になっている．しかしながら，現在までの所このように電磁場と相互作用する基本粒子としてのボソンは実験的に見つかっていない．その意味では，我々がこれまで築き上げてきた場の理論の中に入れるべき必要が何処にも無く，従って考える必要も無いものと思われる．

5.4.5 Higgs 機構とその問題点

このスカラー場の問題は Higgs 機構と密接な関係がある．Higgs 機構とは，まず，複素スカラー場を用意して，その複素スカラー場間に対称性を自発的に破るために導入されたポテンシャルを同じように考える．次に，変数変換とある種の近似を実行して，ゲージ不変性を Lagrangian 密度の段階で破ってしまうのである．そうするとゲージ場が質量を獲得して，弱い相互作用の模型が上手く作れて実験と良く合う理論体系にする事が出来たというものである．この描像には大きく分けて3つの深刻な問題点（間違い）がある．

(1) 実スカラー場の導入

最初に複素スカラー場を用意するのだが，対称性を破ると称して，この複素スカラー場を2つの実スカラー場に直してしまい，それぞれが自由度を持つという描像を提案するのである．しかし，これがおかしい事は上記の議論で明らかである．

(2) Higgs ポテンシャル

この Higgs 機構においては，自発的対称性の破れの問題と関係して Higgs ポテンシャル

$$U(\phi) = u_0 (\phi^\dagger \phi - \lambda^2)^2 \quad (5.31)$$

という良くわからないポテンシャルを導入している．ここで， u_0 と λ は任意の定数である．これはスカラー場間に働く相互作用なのだが，これがどこから来たのか全くわからない．このポテンシャルを良く見てみると結局これは自己相互作用である．自分自身で相互作用してポテンシャルを生み出しているという事は，一体物理的にどのような現象になっているのだろうか？これは，現代の場の理論では理解できる事ではない．

(3) ゲージ不変性の破れ

Higgs 機構における最も深刻な問題点が、このゲージ不変性を勝手に破ってしまった事である。これは結局、自発的対称性の破れの理解が不十分であった事と関係している。どの系でも対称性が自発的に破れる事などあり得ないが、Higgs 機構ではただ単に変数変換をし、さらに近似をする事により手でゲージ不変性を破るような定式化を行ったのである。ゲージ場が質量を獲得してしまつたら、これはゲージ不変性を破ってしまい、理論的な困難は深刻なはずだったので、何故か人々はこの理論を受け入れて現在に至っている。

5.4.6 将来の展望

何故、人々が弱い相互作用の模型を考えるに際して Higgs 機構を取り入れたのであろうか？まず、弱い相互作用の理論として Fermi 理論が受け入れられていたが、これは結合定数の次元が質量の 2 乗分の 1 である 4 体相互作用の形をしていて、これだと 2 次の摂動論を行うと 2 次発散が出てきてしまい、これでは整合性が保たれない事になっている。一方、実験の方から弱い相互作用において力を媒介している重いボソンの存在が示唆されていた。このため、何らかの形でこの重いボソンを考慮した理論体系を考える必要に迫られていたのである。その際、単純に重いボソンを交換する相互作用を考えた場合、これはゲージ理論ではないので、繰り込みが不可能であると人々は思ったのである。実際には逆に有限質量のベクトルボソン系に対しては、物理的な観測量に発散はなく、従って繰り込みは不要である事がわかっている。この事より弱い相互作用の理論はゲージ理論から出発しなければ、全く問題のない健全な理論体系が作られるのである。

● Higgs 粒子の実験結果： 2014 年の現在まで、Higgs 粒子の発見は 1 事象を除いて不成功である。さらに、この 1 事象のエネルギー領域において、別のグループによる追実験では Higgs 粒子を観測する事はできてはいない。W-ボソンの発見の時は、W-ボソンの存在を示す「複数のイベント」が見つかったと CERN は報告したのである。一方において、Higgs 粒子の探索実験では弱い相互作用の崩壊パターンは Higgs 粒子の存在を仮定しなくても理解できるかどうかで実行されるべきである。実際、全ての実験データは Higgs 粒子がなくても十分理解される事を示している。

5.5 量子色力学 (QCD) の問題点

強い相互作用を記述する理論は量子色力学 (QCD) である。これはクォークとグルオンの相互作用による $SU(3)$ カラーの非可換ゲージ理論である。6種類のクォークが存在し、それぞれが3つのカラー自由度を持っていて、8つのカラー自由度を持つグルオンにより相互作用している系である。バリオンは3つのクォークから出来ていて、メソンはクォークと反クォークから出来ているという模型である。この模型は基本的には正しいと考えられる。ここでは詳しい記述はしないが、その模型の持つ良い点と問題点を議論したい。まずは Lagrangian 密度を書いて、その性質を簡単に見て行こう。QCD の Lagrangian 密度は $SU(N_c)$ カラーの場合

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - g\gamma^\mu A_\mu - m_0)\psi - \frac{1}{2}\text{Tr}\{G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\} \quad (5.32)$$

と書ける。ここで $G_{\mu\nu}$ はグルオンの場の強さであり

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \quad (5.33)$$

で与えられ、グルオン場は

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \equiv \sum_{a=1}^{N_c^2-1} A_\mu^a T^a \quad (5.34)$$

であり、この時 T^a は $SU(N_c)$ 群の演算子であり

$$[T^a, T^b] = iC^{abc}T^c \quad (5.35)$$

を満たす。また、 C^{abc} は群の構造定数と呼ばれている。この Lagrangian 密度は次のゲージ変換に対して不変である。

$$\psi' = (1 - ig\chi)\psi = (1 - igT^a\chi^a)\psi, \quad \text{with } \chi = T^a\chi^a \quad (5.36)$$

$$A_\mu^{\prime a} = A_\mu^a - gC^{abc}A_\mu^b\chi^c + \partial_\mu\chi^a \quad (5.37)$$

ただし、 χ は、 $\chi = \chi(t, \mathbf{r})$ の任意の関数であるが、無限小であるとする。

ここでこの Lagrangian 密度の詳細を議論する必要はない。大切な事は、この Lagrangian 密度は確かにゲージ変換に対して不変であるが、しかし、クォークの状態 ψ とグルオンの状態 A_μ はゲージ不変ではなく、これらのカラー電

荷を持った粒子の状態は運動学的に自由にはなれないと言う事実である．これは非常に重大な事を物理的には意味している．すなわち，クォークとグルオンは観測量にはならないという事である．実際，クォークのカラー電流保存を調べるとわかる事だが，これは保存量にはなっていない．つまり，クォークのカラー電荷は時間によってしまい，物理的な観測量にはならない事を意味している．そして，それこそがクォークとグルオンの閉じ込めの現象そのものであり，クォークは動力学的に閉じ込められているわけではなく，運動学的に閉じ込められているので，その閉じ込めは絶対的なものであると言える．

5.5.1 自由 Lagrangian 密度のゲージ依存性

クォークとグルオンのカラー電荷がゲージに依ってしまう事，およびクォークとグルオンのそれぞれの自由 Lagrangian 密度がゲージ依存である事の証明はそれ程難しくはない．しかしこれは明らかに非常に重要な事である．ところが，この事を指摘している教科書はあまり知られていない．実際，印牧誠司氏の修士論文 (2007 年) がこの自由 Lagrangian 密度のゲージ依存性を最初に明らかにした論文のように見える．これが本当だとしたら事態はかなり深刻である事を意味している．但し，この問題を科学史的に調べたわけではなく，この辺のところは良くわからない．

5.5.2 摂動論が定義できない！

クォークとグルオンの自由場が存在しないという事実は非常に重大であり，理論的な模型計算に大きな影響を及ぼしてしまう事になる．結論を先に言うと，この模型は全 Hamiltonian を一気に対角化する事以外に，解く方法が存在しない事が証明される．

● QCD の摂動論： QED もそうであったように，4次元量子場の理論での取り扱いは基本的には摂動論をベースにしている．それ以外解けない事が最も大きな理由である．この摂動論の場合，その基本戦略は全ての観測量を自由場の言葉で書きたいと言う事である．例えば，QED の場合は，自由電子の状態と自由光子の状態の言葉で全ての観測量を表現している．ところが，QCD では基本となる自由クォークの状態が存在していないため，QCD における観測量は何かという事が問題になってくる．自由クォークの状態が存在しない限り，物理的に計算したい観測量が何かわからないという事である．これは摂動

論が使えないためどんな物理量が計算できるのかわからないと言う事を意味しており、実情は想像以上に深刻であり、全くのお手上げ状態になっている。実際、QCDにおける理論的な発展は、この30年間ほとんどないのである。

● 漸近的自由： このQCDにおいて、これまで摂動論による計算が行われてきたが、実はQCDの場合、自由クォークは存在しないし、自由グルオンも存在しないのでこれでは摂動論の計算は定義できなかったはずである。この自由クォークと自由グルオンが観測されていない事は実験事実ではあるが、実は理論的にもそれらが観測にはなっていない事は、良く知られている事実である。実際、自由クォークと自由グルオンが観測されていない事は理論と実験の整合性もしっかり合っていて、これは疑う余地もなくQCDが恐らくは正しい理論体系であるという事を示している。

従って、しっかり考えれば、QCDの摂動論計算は、およそ直感的に不可能な事である事ぐらいは誰でもわかる事である。しかし、現実には、QCDの摂動論の計算が行われて、「漸近的自由」と言う事を「発見」してノーベル賞を受賞した人達がいるほどである。この「漸近的自由」の場合は、2重に間違えている。一つはQCDの摂動論が定義できないのに、これを実行してしまった事である。さらに、その計算の中でも「one loop」の計算は繰り込みに必要なのにこれを実行して繰り込み群方程式という仮想の方程式を発見しまったのである、このため仮想運動量の大きなクォークはほとんど自由であるというわけのわからない事を主張したのである。

5.5.3 QCD における観測量

それでは、何故 QCD が正しい理論体系であると信じているのであろうか？これにはきちんとした理由がある。最大の理由は実験的なサポートである。これは一体どういう事であろうか？クォークが観測量では無いのに、どうしてクォークの事がわかるのであろうか？これは実は簡単で、クォークには電気的な電荷があるからである。例えば、 u クォークはその電荷が $\frac{2}{3}e$ 、 d クォークは $-\frac{1}{3}e$ であるとして実験的に矛盾が無い。すなわち、クォークの電磁気的なカレントは保存量となっており、従って電磁気的なプローブで陽子を研究すれば、確かにクォークが反応して様々な物理的な観測量を出しているのである。

● 陽子・中性子の磁気能率： クォーク模型によるバリオンの電磁気的な模型計算はこれまで数多く実行されている。なかでも、核子の磁気能率は実験と理論が見事に合う例として、しばしば引用されている。そして、その物理的な根拠は十分しっかりしているのである。バリオンの構造が QCD の模型により全く解かれていないのに、どうして磁気能率だけは理論的に信頼できる計算ができてしまうのかと言う疑問に対して、答えは簡単である。例えば、陽子の磁気能率は大雑把に言って

$$\mu = \mu_0 \sum_{i=u,u,d} e_i \sigma_i = \mu_0 e \left(\frac{2}{3} \sigma_{u_1} + \frac{2}{3} \sigma_{u_2} - \frac{1}{3} \sigma_d \right) \quad (5.38)$$

と書く事が出来る。ここで、 $e_u = \frac{2}{3}e$ と $e_d = -\frac{1}{3}e$ は u クォークと d クォークの電荷を表している。 μ_0 は典型的なスケール量を表し、例えば非相対論ならば、クォークの質量を m として $\mu_0 = \frac{1}{2m}$ となっている。いずれにせよ、この模型で陽子と中性子の磁気能率を計算すると

$$\mu_p = \mu_0, \quad \mu_n = -\frac{2}{3}\mu_0 \quad (5.39)$$

となり、この2つの比を取って実験と比較すると

$$\left(\frac{\mu_p}{\mu_n} \right)_{theory} = -1.5, \quad \left(\frac{\mu_p}{\mu_n} \right)_{exp} = -1.46 \quad (5.40)$$

となり、恐ろしいほど良く一致している。この理由は明らかで、磁気能率が動径部分の波動関数に依っていない事が最も重要な事である。このため、クォークが陽子内部でどの様な運動をしていようが、基本的に言って、クォークのスピンの性質に支配されているので、陽子と中性子の磁気能率の比は非常に上手

く記述されているのである．そして，この事は確かにクォーク模型が正しいと考えて良い事を示している．

• クォークのカラー数： クォークのカラー電荷が保存量ではない事から，QCD 相互作用の取り扱いの難しさについて述べたが，それではクォークのカラー数はどの様にして検証されたのであろうか？これは再び電磁的な相互作用を用いている．良く知られている

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{all hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \quad (5.41)$$

の実験値からクォークのカラー数が3である事がわかる．それは，この比にはクォークのカラーの自由度が現れるからである．従って，クォークの動力学を研究する事は，非常に難しいのであるが，クォークのある種の性質は電磁気的方法是で調べる事が出来る事を示している．

• $e^+e^- \rightarrow \text{Jets}$ の現象： 実験的に $e^+e^- \rightarrow \text{Jets}$ の現象が知られている．これはQCDでよく理解できるのであろうか？この実験の際，ハドロン内部において $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ が起こっている事は確かであろう．この過程は電磁気的なものなので，正確にわかっている．ところが，その後どうなるのかと言う事が全くわからない．クォークがハドロンから外に出て自由になると言う事が物理的に記述できないからである．それは既に議論したようにクォークのカラー電荷がゲージによるため観測量でないと言う事と関係している．

それではこの Jet の現象はどのように理解できるのであろうか？実験的にもクォークが大きな運動量を瞬間的に得た事は事実である．しかし，クォークは自由になれない．従って，ハドロンになって行くしか他に仕様がなないのである．生成されたハドロンは反応過程においてエネルギーと運動量の保存則だけは満たしている必要がある．よって，これは同じ方向に基本的にはハドロンが生成された現象，すなわち Jet の現象が観測されたのであると考えられる．実験的には2 Jet が主であるが，3 Jet や4 Jet も観測されている．ハドロン内部でクォーク同士がどのような相互作用をするのかの具体的な描像が作れていない段階では，これ以上の物理的なコメントが出来ない．特に，摂動論が定義できていないからには，直感的な描像が作りきれないのである．

5.5.4 QCD 理論計算の展望

それでは、QCD の理論計算はどのようにしたら良いのであろうか？これは随分と考えて来たが、現在までの所、信頼できる計算がどの程度可能であるかについては、あまり明白な事はわからない。一つはっきりしている事は、全 Hamiltonian はゲージ不変であるという事である。従って、例えば J/ψ のような重いクォークにより構成されている中間子の場合、この全 Hamiltonian を適当なベースを選んで対角化してしまえば良いと考えられる。しかし、クォークが観測量ではないのに、その質量が重いか軽いかと言う事が物理的に意味があるのかどうか良くわからない。しかし、質量はパラメータであるから、適当な値を考える事はそれなりに意味はあるとは考えられる。それで、とにかく全 Hamiltonian の対角化の計算がどの程度大変であるかは、まだ良くわからないが、少なくとも適当なゲージ固定をして、クォークのカラー電流が保存するように選び、そのゲージ固定の範囲で計算を実行すれば、概念的な困難は避けられる気がする。ただ、単純に計算してみても、Hamiltonian を対角化するために必要なベースは非常に大きな数になってしまい、例えば、 $10^8 \times 10^8$ の行列の対角化が可能になれば、ある程度信頼できる J/ψ の質量が計算できると考えられる。しかし、これらは全て今後の課題であり、計算機による数値計算を工夫する事が出来れば、それなりに意味があり、面白い結果が期待できる問題であると思う。

5.6 場の量子論 — 無限大と観測量

相対論的場の理論を考える時、場の量子化がどうしても必要になる。場の量子化とは何かという質問に対しては、場を演算子として扱う事であると答える事になる。また、場の量子化は何故必要なのかという疑問に対しては、電磁場の量子化は実験の要請であると答える事になる。実際、前述したように水素原子において電子が $2p_{\frac{1}{2}}$ 状態から $1s_{\frac{1}{2}}$ 状態への遷移が起こった時に、光が放出される。これは観測事実であり、この事は真空から光が作られている事を示している。通常の量子力学では、粒子の生成は出来ないが、ここでは光の生成を考慮した理論を作らざるを得ないのであり、それが「場の量子化」である。この時、場自体がオペレータになる必要があり、 c -数関数ではなくなっている。このため、場の量子化という言い方をしているのである。従って、場の量子化は実験を再現するために導入された理論体系である事は間違いないものであり、実際、実験をよく再現している。

ところが、一度、場の量子化が行われると様々な新しい現象が計算上現れてしまう事がわかる。その内の一つが、自己エネルギーの発散である。場の量子化により、電磁場が生成されたり消滅されたりするわけだから、電子が自分自身で光子を放出して直ぐに吸収するという過程が計算上出てきてしまい、これを計算すると Log 発散になっている事がわかるのである。朝永達が発唱した繰り込み理論が水素原子の $2s_{\frac{1}{2}}$ 状態における Lamb シフトの実験値を見事に再現する事が出来て、繰り込み理論の勝利となったと言う事が現代の繰り込み理論に対する基本的な評価である。

しかしながら、この Lamb シフトの問題はそう簡単ではない。それは、この Lamb シフトの計算は Bethe による非相対論的な取り扱いで行われているが、この計算には Log 発散があり Bethe は適当にそのカットオフを電子の質量に取ったのである。そしてそれがまた偶然、実験と良くあってしまったが、しかし、計算結果が Log 発散を持っている事はその取り扱いにどこか問題点がある事は明らかである。現在のところ、その発散の解決方法は分かっていない。

さらに言えば、自己エネルギー自体は観測量ではないので、その発散を気にする必要があるのかどうか疑問である。自然を理解する事を第一義的であるとすれば、自己エネルギーが発散しても特に困る事はないのである。

5.6.1 ゲージ理論信仰の崩壊

現在までの所，繰り込み理論は正しいものであると考えられている．しかしながら，最近になって，フォトンの真空偏極に関して重大な見過ごしがあった事がわかっている．このフォトンの真空偏極は元々2次発散があって，この項は手で捨てていたのである．その場合，捨てる条件として人々は「ゲージ条件」をつけたが，これが繰り込み理論の理論体系をかなり不明瞭にしていた最も重要な原因であった．この真空偏極テンサーに対する「ゲージ条件」は，実は数学的に成立していない事がわかったのである．この基本的な間違いは単純に数学的なものであり，積分において無限に発散する場合，変数変換を単純にするととんでもない間違いを犯してしまうという，極めて初歩的なミスであった．

この「ゲージ条件」とは，真空偏極テンサー $\Pi^{\mu\nu}(k)$ に対して $k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = 0$ が成り立つべきであるという要請である．これはもともとはT行列にあらわれている偏極ベクトル ϵ^μ に対して $\epsilon^\mu \rightarrow \epsilon^\mu + ck^\mu$ という変換に対して不変であるべきであるという要請をおく事に対応している．このことに対応して，真空偏極テンサー $\Pi^{\mu\nu}(k)$ に対する式が得られているのである．ところがどのように計算しても，この式を満たす事は有り得ない事が，実際に $\Pi^{\mu\nu}(k)$ を積分により求めてみればすぐにわかる事である．どうしてこのような間違いが起こったのであろうか？それは，無限大になる積分において不用意に変数変換を行うと全く間違った答えを得てしまうと言う事である．簡単な実例を挙げる前に，どうして上式が「証明」されたのかを示そう．まず， $k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k)$ を

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = ie^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\left(\frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i\varepsilon} - \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon} \right) \gamma^\nu \right] \quad (5.42)$$

と書き直す事が出来る．この時，第1項において $q = p - k$ の置き換えをする．この時，確かに

$$k_\mu \Pi^{\mu\nu}(k) = ie^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{q} - m + i\varepsilon} \gamma^\nu \right] - ie^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon} \gamma^\nu \right] = 0$$

が「証明」されたと言うものである．この証明を現代の物理屋も含めてずっと長い間人々は信じて来たが，数学者はこれを見て吃驚して「物理屋はのん気で良いね」と感心していたものである．上式のどこが間違いなのか？以下に実例を示しながら解説しよう．まず，次の積分量

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \left((x - a)^2 - x^2 \right) dx \quad (5.43)$$

を計算しよう．ここで $x' = x - a$ と置き換えると

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} (x'^2 dx' - x^2 dx) = 0 \quad (5.44)$$

となり，積分値はゼロであるように見える．ところが，これをきちんと積分すると

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} ((x - a)^2 - x^2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (a^2 - 2ax) dx = a^2 \times \infty \quad (5.45)$$

となり，無限大である．どこで間違えたのかは，高校生がすばやくわかる問題であろう．正しく計算するには

$$Q = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} ((x - a)^2 - x^2) dx = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left[\int_{-\Lambda-a}^{\Lambda-a} x'^2 dx' - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} x^2 dx \right] = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} 2a^2 \Lambda$$

とすべきであった．確かに，この積分は無限大であることは明らかである．この事は無限大になる積分で変数変換を不用意にはいけないという当然の事が原因であったのである．

5.6.2 次元正則化

さらに悪い事に，'t Hooft 達はその論文で次元正則化という一種奇抜なアイデア (運動量空間での積分の次元を 4 から $4 - \epsilon$ にした，但し， ϵ は無限小量) を提唱したのだが，これが数学の公式を間違えて使用した理論であるために，2次発散が消えていたのである．特に数学では，運動量積分 $d^4 p$ を $d^D p$ (但し， $D = 4 - \epsilon$) とした時，積分値は ϵ がゼロの極限で元の積分値に戻る事が当然の事として必要である．しかしながら，次元正則化では ϵ をゼロに持って行く極限を取っても元に戻ってくれないのである．このように，現在ではこの次元正則化は全く役には立たない事がわかっている (加藤洋志氏，修士論文 2010 年)．しかしながらゲージ理論のみが繰り込み可能であるという「信仰」はこのフォトンの真空偏極に起因している．自己エネルギーに対する理解不足から 2次発散を捨てる物理的な理由が見つからなかったために，どうしてもゲージ不変性に頼むしか他に方法が無かったのであろう．

5.6.3 朝永の推論

このフォトンの自己エネルギーを調べていたところ、朝永振一郎の著作集で彼は「フォトンの自己エネルギーはゼロである」という事を明解に主張している事がわかった。しかし彼はそれを論文にはしていなく、何処まで問題の重要性を把握していたかは分からない。しかし、彼がもっと強くこの問題を主張していたならば、ゲージ理論信仰はこれ程までには続かなかっただろうし、もっと早い段階で疑問を持った物理屋が数多くでてきた可能性はあるだろうと思われる。ゲージ理論のみが繰り込み可能でまともな理論であると言う、極めて馬鹿げた通説がこれまでの場の理論の発展を阻害してきた。実際、例えば、重力理論をゲージ理論で構築しようとするのが不可能であるため、人々は一般相対論を受け入れるようになったと思われる。また、Weinberg-Salam 理論においては、最初にゲージ理論で出発したから繰り込み可能であると信じて、途中でそのゲージ不変性を破っても、その論理的飛躍を疑う事は誰もしなかった。半世紀前にゲージ理論信仰が崩壊していたら、場の理論の発展も全く違った形で実現されたであろう事は疑いなく、この事が残念で仕方がない。現在ではゲージ理論のみに奇妙な発散があり、難しい理論になっていると言う事ははっきりして来ている。それはレダングラントな変数を持つ場合、その処理が常に難しいと言う事に関係している。

この「朝永の推論」に関しては、Heisenberg が 1934 年に書いた真空偏極の論文を読む事により、朝永がどのようにして繰り込み理論を考えるに至ったかの道筋がある程度推測できるものである。Heisenberg は Dirac が空孔理論を発表した 1928 年からまだ数年しかたっていない段階で、すでに電磁場により負のエネルギー粒子が励起される過程を計算している。この論文は大変面白い論文ではあるが、しかしこれは繰り込みと矛盾しており、さらに言えば実験との整合性がない理論となっている。それは基本的には「負の粒子を詰めた真空」に対する場の理論的な理解が当時は不十分であった事に関係している。すなわち、Heisenberg 達は場の理論の真空をあたかも誘電体のようなリアルな物質状態と考えていたのである。逆に言えばこれを出発点として、朝永はフォトンの自己エネルギーはゼロである事を正確に把握していたものと考えられるのである。Heisenberg 達の計算は具体的な式変形としては間違っているわけではないと言う事実から、それではフォトンが常にその質量がゼロの粒子である事が記述できないという事実を認識するに至ったものと考えて間違いはないと思われる。これらの事が正確にわかっているならば、確かに「朝永の推論」は自然な結論である事が良くわかるものである。

5.7 繰り込み理論 (フェルミオン)

量子電磁力学 (QED) において興味ある物理的な過程を計算しようとするとしても摂動論を使わざるを得ない。場を量子化した後の物理系は無限自由度の多体系になっているのである。従って、QED においても厳密解を求める事は最初からあきらめざるを得ない程、難しいし複雑である。

ここでは摂動論の詳細について解説する事は出来ないし、また必要もないと思う。場の理論の摂動論は良く書かれた教科書がいくつか出版されているので、そちらを参考にして頂きたい。但し、ここで場の理論の摂動論形式に関して一つ重要な事をコメントしておきたい。それはこの場合の非摂動 Hamiltonian に関するものである。場の理論での摂動論は常に非摂動項として、自由粒子の Hamiltonian を取っている。この事は至極当然の事であるが、しかしながら、場の理論での摂動論の計算をしている時、ちょっと油断するとこの事を忘れると言うか、わからなくなってしまう事が良くあるものである。

5.7.1 フェルミオンの自己エネルギー

場を量子化して摂動論により計算をして行くわけであるが、ここである困難にぶつかってしまう。それは、フェルミオンとフォトンの自己エネルギーが無限大になってしまうのである。まずは、フェルミオンの自己エネルギーについて議論して行こう。2 次の摂動論の計算を行うと、どうしても発散する Feynman グラフが出てきてしまうのである。その過程とは、電子がフォトンを出してそのフォトンと同じ電子が吸収するという過程である。これは自然界では起こらない過程であるが、Feynman グラフを計算する限り自動的に出てきてしまうので、これを処理する事は理論計算の中では当然、必要になる。問題はこれをどのように処理するべきであるかという事である。ここで非常に重要な事は、この無限大が Log 発散の無限大であるという事である。Log 発散は数学的には無限大であるが、物理学では本当の無限大にはならない。しかし、それでもこの無限大がでて来たらそれを理論上きちんと処理する必要があると人々は考えたのである。これは理論形式の整合性を考えた場合自然な事でもあり、その処理の仕方が繰り込み理論である。繰り込みとは、英語では Renormalization であり、波動関数を再規格化する事により無限大を処理しようとする事である。

5.7.2 フェルミオンのバーテックス補正

フェルミオンの自己エネルギー自体は観測量ではないので、それ自体が発散していても別に物理的に困る事はない。むしろ逆で、このフェルミオンの自己エネルギーを利用しようと言うのが繰り込み理論の本質である。それは電子に対するバーテックス補正を行うと、発散項が出てきてしまうが、しかし、このバーテックス補正は物理的な観測量になっているので、発散は何とか処理する必要がある。そして、この発散項をフェルミオンの自己エネルギーの時に使った同じ波動関数により、繰り込んでしまおうと言う事である。この事はむしろ式で見た方が簡単であろう。フェルミオンの自己エネルギー $\Sigma(p)$ は発散項だけ書くと

$$\Sigma(p) = -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma^\mu \frac{1}{k^2} = \frac{e^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) (-\not{p} + 4m) \quad (5.46)$$

となる。ここで Λ はカットオフ運動量である。この無限大は波動関数を再定義する事により吸収することができる。Lagrangian で書くと

$$\mathcal{L}_F = \bar{\psi} \not{p} \psi - \left[\frac{e^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) \right] \bar{\psi} \not{p} \psi = \bar{\psi}_r \not{p} \psi_r \quad (5.47)$$

となり、新しい波動関数 ψ_r は

$$\psi_r = \sqrt{1 - \frac{e^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)} \psi \quad (5.48)$$

と定義されている。ここでは質量項に関しては省略してある。次にバーテックス補正 $\Lambda^\mu(p', p)$ を計算しよう。これは発散項のみ書くと

$$\Lambda^\mu(p', p) = -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma_\nu \frac{1}{k^2} = \frac{e^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) \gamma^\mu$$

となる。この時、全相互作用 Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}'_I = -eA^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi + \frac{e^3}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) A^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi = -eA^\mu \bar{\psi}_r \gamma_\mu \psi_r \quad (5.49)$$

となり、発散項はフェルミオンの自己エネルギーの際に再定義した波動関数により完全に吸収されている。さらに、この手法により有限項を計算すると電子の異常磁気能率が計算でき、これは実験と大変よく合っているのである。

しかしながら、 $g-2$ のような観測量に発散があると言う事は理論形式がまだ健全ではない事を示している。フォトンの自己エネルギーの関連した観測量

はすべて有限である事が証明されているし、また有限質量のベクトルボソンによる $g-2$ の計算に発散がない事を考えてみると、結局、フォトンによる $g-2$ のバーテックス補正のみが奇妙は発散を持っている事がわかっている。これは常識的に見ればフォトンのバーテックス補正のみが何処か間違っていると考えるのが合理的である。実際、フォトンの伝播関数として誰もが Feynman の伝播関数を用いているが、この式が正しいものではない事は昔からよく知られていた事である。今後、この Feynman の伝播関数を見直して正しい伝播関数によりフォトンによる $g-2$ のバーテックス補正を計算する事が重要である。但し、この計算は相当難しいものである事がわかっている。

5.7.3 Ward の恒等式

ここで一つコメントしておきたい。繰り込み理論における繰り込み可能性の議論のところで、Ward の恒等式と言う式が出て来てこれが重要な役割を果たしているとの教科書にも書いてある。ところが、この式をきちんと検証すると分かる事であるが、全く役に立たない方程式である。細かい事はここでは書かないが、基本的には恒等式自体は数学だから正しいが、それを物理に適用する時に間違えてしまうと言う事である。それは Ward の恒等式 を利用する際に、フェルミオンの自己エネルギーの計算で積分を実行した後、フェルミオンに対する分散関係式 $p^2 = m^2$ を使うのである。そのために、この式を p^μ で微分したものがバーテックス補正における Log 発散と形が同じになるという主張が Ward の恒等式からの結論である。しかし実はこれはフォトンの場合のバーテックス補正に対して偶然成り立っているのに過ぎない。当然の事であるが、フェルミオンの自己エネルギーの計算で $p^2 = m^2$ を使ったところからも p^μ で微分すると本当は寄与する事がわかり、Ward の恒等式自体は使い物にならないと言う事が簡単にチェックできるものである。しかし、これまで物理屋は Ward の恒等式とか Goldstone の定理とかの数学上では明らかに成り立つ方程式に対して、その物理への応用を甘く考え過ぎていたという事であろう。

5.7.4 Lamb シフト計算の困難

最近になって分かってきたことではあるが、水素原子の $2s_{\frac{1}{2}}$ 状態における Lamb シフトエネルギーの理論計算は実は概念的な困難を含んでいる。非相対論の計算を実行すれば、概念的な困難はないが、しかしこの場合どうしても理論計算は Log 発散してしまうのである。現在までの所、教科書に紹介されている Lamb シフトエネルギーの理論計算は、この非相対論によるものであり、基本的に Log 発散は適当なカットオフを選べば、実験値の大きさは予言できると言うレベルのものである。

それでは相対論的な波動関数を使い、Lamb シフトエネルギーの理論計算が実行できるかという問題である。この時、実は2つの困難にぶつかる。一つは、水素原子は相対論的に扱おうとすると1体問題ではないという事である。すなわち、陽子の運動も当然考える必要が出て来てしまい、これを厳密に扱う事は現在の場の理論的枠組みの中では不可能な事である事がわかっている。非相対論では重心と相対運動が常に厳密に分離できたのであるが、相対論ではそれは簡単にはできなく、処方箋もないのである。もう一つの困難はもっと深刻である。相対論的に扱おうとするどうしても負のエネルギー状態を考える必要がある。ところが、この負のエネルギー状態は束縛状態では理論的にきちんと定義する事ができない。場の理論で言えば、水素原子での電子の状態は陽子との相互作用を通して束縛されており、その全体の系の負のエネルギー状態を考えない限り正しい取り扱いになっていないのである。ところが、現実問題としては、この2体系の負のエネルギー状態などは、どう扱ったらいいのか明確ではないのである。従って負のエネルギー状態自体をきちんと取り扱う処方箋が無い限り、Lamb シフトのエネルギーをきちんと計算する事は当然不可能な事である。これらの事より、相対論的な Lamb シフトエネルギーの理論計算は不可能であると言う事が現状である。

5.8 繰り込み理論 (フォトン)

フォトンの自己エネルギーについては、朝永の推論のところでは少し議論したのであるが、ここでもう少し議論を続けて行こう。フォトンの自己エネルギーも同じように Feynman グラフを計算すると出てきてしまうのである。この場合、フォトンがフェルミオンと反フェルミオンを対生成してまたもとの同じフォトンに戻るといふ Feynman グラフである。これは真空偏極と呼ばれている。ところがこのフォトンの自己エネルギーの Feynman グラフは2次発散になっている。あるカットオフを考えて、その Log は大した無限大ではないが、2次発散はどの様に繰り込もうとしても不可能である。それでは、これまで人々はどうしていたのであろうか？ここで繰り込み理論で最もわかりにくい「仮定」が出てくるのである。それは「ゲージ条件」である。人々は何とかこの2次発散を捨てたいために、計算されたフォトンの自己エネルギーが波動関数に繰り込められる形、すなわちゲージ不変であるべきであるという要請をしたのである。この時最も重要な条件が「ゲージ条件」である。これは偏極テンサー $\Pi^{\mu\nu}$ が $k_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0$ を満たしている事に対応している。ところが、この式は成立してしないのである。すなわち、どう計算をしてみても $k_\mu \Pi^{\mu\nu} \neq 0$ である。

何故、人々がこの式を正しいと思いこんだのであろうか？唯一考えられる理由は無限大になる積分において行った変数変換で正しい処理をしなかった事である。無限積分における変数変換においては、注意しないと無限大となるべき結果がゼロである事を「証明」してしまう事は良く知られている事であるが、このように変換してはいけない所で無視して変数変換して無限積分を実行してしまった事が間違いの主たる原因であった。しかし、このような単純なミスはどうして人々が受け入れてきたのか、今となっては理解できない事である。いずれにせよ、間違った条件を用いたために2次発散の項はゲージ条件により捨てる事が出来るというものであった。これはいかにも人工的であり無理があると直感的にはわかるものである。もともとゲージ不変性は元の Lagrangian 密度に対してすでに確認されているものであり、従ってゲージを固定して、電磁場を量子化して摂動論で計算した物理量は、ゲージ不変性を破っているわけではない。しかしこの2次発散が処理できない限り繰り込み理論の欠点であると人々は思い込んだ事であろうし、この事は理解できない事でもない。それと、2次発散を捨てる事によるフォトンの自己エネルギーの処理の仕方は、基本的にはそれ程直接的な影響を物理の観測量に与える事はなかったもので、受け入れられてきたのあろうと考えられる。

5.8.1 フォトンのバーテックス補正

次節で議論するようにフォトンの自己エネルギーは繰り込みに利用される必要がない事がわかっている。フェルミオンの場合のバーテックス補正と同様に考えると、フォトンの自己エネルギーが利用されるためには、自己エネルギーのダイアグラムにもう一つのバーテックスが付いた場合を考える必要がある。これが三角形図と呼ばれるファインマン図であるが、これはフェルミオンにおけるバーテックス補正に対応していて、言ってみればフォトンのバーテックス補正である。ところがこのファインマン図において、どのようなバーテックスを取ってみても、すべてのファインマンダイアグラムに発散がない事が証明されたのである。この三角形図は物理的な観測量であるため、これが全て有限で求まったという事はフォトンの自己エネルギーを繰り込みに使う必要は全くない事を示している。これは QED の摂動形式がフォトン関係では理論形式として極めて健全である事を示している。

不思議な事にこの三角形図はアノマリーの問題と関係していて、場の理論では非常に重要な役割を担ってきたのである。最初にこの三角形図の計算を実行したのが西島先生である [1]。彼が 1969 年に書いた「Fields and Particles」の教科書ではこの三角形図の計算 ($\pi^0 \rightarrow 2\gamma$) の手法を懇切丁寧に解説しており、読めば確実に理解できるものであった。ところがこの計算はその後完全に物理世界の主流からは無視されたのである。これは到底理解できる話ではないが、アノマリーがもてはやされたために、この事が現実に起こってしまったのである。すべての三角形図が有限で求まる事がもっと早く人々に理解されていたら、アノマリーなど存在しようがないのであり、従ってアノマリーの物理が真面目に取られる事は無かったと考えられる。従って、超弦理論も作られる事も無かったはずであり、場の理論がもっと早くに正常な発展を遂げた事は間違いない事である。

5.9 カイラルアノマリー

繰り込み理論と直接は関係はしていないのだが、1次発散に対してもその発散を抑える必要があると考えた事から「カイラルアノマリー」という不思議な概念を見つけたのが Adler である。彼は三角形ダイアグラムを計算している過程で見かけ上1次発散が出てくる事に気がつき、それに対してそれを正則化する事によりアノマリー方程式を導出してしまったのである。この導出法は2つの重大な間違いに基づいている。第一番目の間違いはゲージ条件である。これはすでにフォトンの自己エネルギーのところでも解説しているように全く意味のない条件であった。第2番目の間違いは、有限量の正則化と関係している。 $\gamma^\mu \gamma^5$ の頂点関数を含む三角形図には1次発散も Log 発散もなく、従ってこの S-行列は有限である。この事は Adler 達が提唱した「カイラル・アノマリー」は単純な間違いである事を示している。1次発散を正則化して求められたアノマリー方程式なのだが、その1次発散は存在しなく、よってアノマリー導出の根拠さえ失っている。さらに言えば、Noether の定理から導かれたカイラルカレントの保存則が正則化などの数学的手段で勝手に破られる事など物理的にはあってはならない事である。しかし西島先生による $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 崩壊の計算(これは教科書 [1] でのみ発表、論文としては発表されてはいない)が一般に理解されていたら「アノマリー現象」など起こらなかった事であろう。

5.9.1 三角形ダイアグラム

三角形ダイアグラムの計算においては、その物理現象として $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ の崩壊過程が良く知られている。これは実はフォトンの自己エネルギーと直接関係している。この場合、2個のフォトンが結合するところは勿論ベクタータイプ γ^μ 型である。もう一つの頂点 Γ として $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ の場合は擬スカラー γ^5 型であり、 $Z^0 \rightarrow 2\gamma$ の場合は擬ベクトル $\gamma^\mu \gamma^5$ 型と言うように、その結合型によっていくつかの場合がある。そして、それぞれの頂点関数はそれぞれの物理的な散乱過程に対応している。

ところが、この三角形ダイアグラムの T 行列を計算するとわかる事であるが、どの三角形ダイアグラムの場合も発散は何処にもないのである。一見、見かけ上は線形発散に見えるのであるが、実際は線形発散も Log 発散もトレースとパラメータ積分の段階で厳密にゼロになるのである。これは大変重要な事を意味している。それは、これらの物理的な過程に発散がないと言う事は、フォトンの自己エネルギーは繰り込みに関係していないという当然の結果になった

のである．後でもう少し詳しく議論するが，この三角形ダイアグラムから頂点 Γ を取り除いたダイアグラムがフォトンの自己エネルギーである事がポイントである．この結果，「朝永の推論」は方向としては正しいのだが，フォトンの自己エネルギーはゼロではなくて，やはり 2 次発散がある事は確かだが，繰り込みには無関係であったという事である．

この三角形ダイアグラムの T 行列の計算法に関しては，西島先生の教科書「Fields and Particles」に 12 ページに渡って詳細に解説されている [1]．これは驚くべき事であるが，この本が出版されたのが 1969 年であり，従って 1968 年には原稿が出版社に渡っている事が分かっている．ところが，Adler が三角形ダイアグラムの異常を主張したのが 1969 年なのである．きちんと計算すれば何処にも発散などなく，何故彼が「アノマリー」を主張したのかはわからない．しかし彼の計算で何故 1 次発散が存在すると思ったのかと言う事は論文を読めば分かる事である．彼の計算には 2 個の光子の入れ替えたダイアグラムの計算が正しく行われていないのである．2 つのファインマン図を足して計算するとそれがゼロになるべきである事はある定理 (Landau-Yang の定理) からわかっている事でもある．この定理とは 2 個の光子からは 1^+ の状態は作れないと言うものである．角運動量の合成では $1^- \otimes 1^-$ では 0^+ , 1^+ , 2^+ が可能であるが，光子はボーズ粒子なので 2 光子の状態は対称である必要があるのに対して， 1^+ の状態は反対称の性質を持つため作れないのである．これは回転群の知識が正確であれば間違える事はあり得ない事である．但し， 0^+ の状態の場合は対称に成っているため， $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ の計算においては 2 つのファインマン図が同じになりそのまま 2 倍しても正しく，実際，トレースの計算からもそれが確かめられている．しかし， $Z^0 \rightarrow 2\gamma$ の場合には 2 つのファインマン図が打ち消しあってゼロになっているという事である．この $Z^0 \rightarrow 2\gamma$ の正確な計算が最近まで行われなかったことは物理学全体に大きな問題を投げかけている (阿部龍生氏, 修士論文 2013 年)．しかし，それ以上に，たかがある種ファインマンダイアグラムを計算して，それを正則化したら最も基本的な軸性ベクトルカレントの保存則が壊れたように見えたら，それは正則化の何処かがおかしいと思うべきである．

5.9.2 アノマリー方程式の消滅

すべての三角形ダイアグラムの T 行列が有限で求まったと言う事は，即ち，アノマリー方程式は物理的に意味のない方程式であったと言う事である．このアノマリー方程式自体，あまり面白い方程式ではなかったのもともと解説

はしてなかったのであるが、結局、物理とは無関係の方程式であったと言う事である。そもそも、物理的に言って、Noether の定理から導き出されたカイラル電荷の保存則が、ある種のファインマンダイアグラムを正則化する事によって壊れるなどと言う事は、物理的にあってはならない事である。それは正則化が単に数学の手法であり物理とは直接関係しないと言う事を考えれば、至極当然の事であったわけである。正則化に関しては、例えば Pauli-Villars の正則化があるが、これに対して、朝永さんのコメントが知られており、そのコメントとは「Pauli-Villars の正則化は間違いである」と言う事であった。このコメントに関しては、Pauli-Villars の正則化が間違いと言うよりも、「この正則化は無意味であり不要である」といった方がより正確であると思われる。

5.9.3 フォトンの自己エネルギーと繰り込み理論

フォトンの自己エネルギー自体は観測量ではないので、それが2次発散していても構わない事は前述した通りである。それではフェルミオンのバーテックス補正と同じように、フォトンの自己エネルギーも使い道があるのだろうか？これは繰り込み理論の最も重要で本質的な問題である。真空偏極が起こって、それに関連した物理的に観測可能な過程は何であろうか？この質問に対する答えは単純で、それは真空偏極が起こっている場合のフェルミオンか反フェルミオンのどちらかに何らかのバーテックスが付いた場合である。前述したように、最もよく知られているのは、 $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ の崩壊過程である。この場合、バーテックスは γ_5 である事はよく知られており、この三角形ダイアグラムを計算して T-行列を求め、それから崩壊確率を計算して π^0 の寿命を求めるとこれは実験値と良く合っているのである。また、自分で計算してみればすぐわかることであるが、三角形ダイアグラムはどのバーテックスでも線形発散も Log 発散も厳密に消えてしまい、存在していない事が証明される。すなわち、自然界に起こっている物理的な過程は全て有限で求められているのである。

- 繰り込み不要： 三角形ダイアグラムの T 行列がすべて有限で求められている事はアノマリーが物理的に無意味であった事を示しているが、これは前述した通りである。しかし、この事は繰り込み形式に対しては非常に重要な意味を持っている。真空偏極にどのバーテックスが付いても物理的な T-行列に発散が無いという事は、これらの過程では繰り込み不要であるという事を意味している。これはすなわち、フォトンの自己エネルギーはどの繰り込みにも使われる事が無く、従ってフォトンの自己エネルギー自体は物理的には意味がない

事に対応している．結局，フォトンの自己エネルギーの場合は，そのままほって置いても全く問題ないことが明白になったのである．この事は，この三角形ダイアグラムに関連している場の理論の計算手法が極めて健全である事を示している．その意味では，電子のバーテックス補正に関する場の理論の計算手法は，まだどこかに不健全さが残っているという事であろう．

5.9.4 Curie の原理 (対称性の保存)

対称性の問題を物理的にきちんと考えたのは恐らく Pierre Curie が最初であろう．彼は「圧電効果」を発見し，また「放射能の発見」でノーベル賞を受賞した事でよく知られているが，対称性に関しても重要な仕事をしている．特に，自然現象において「非対称性の物理現象はその原因がない限り結果として非対称性が現われる事はない」という Curie の原理を提唱している．

これまで議論してきた「カイラルアノマリー」の問題も Curie の原理に抵触している．原因がないのにカイラルカレントの保存則が勝手に破れる事はないとこの原理は言っているが，実際，その通りであった．

また自発的対称性の破れの問題も，もし「Curie の原理」をしっかり理解していたらあのような愚かな理論が提唱される事はなかった事であろう．現実には，カイラル対称性が自発的に破れる事などあり得ない事が今は厳密解によって証明されている．そしてこの事は Curie の原理の言っているとおり，対称性を破る相互作用 (原因) が無い限り系の対称性が自然に破れる事はないと言う極めて自然な結果であった．

ここで対称性が破れている弱い相互作用について考えてみよう．これは最初の Lagrangian にパリティを破る相互作用を入れる事により現象を説明していて，確かに Curie の原理と矛盾してはいない事がわかる．その他に対称性を破る力としては CP 対称性を破る相互作用が知られている．これはしかしオペレータでその対称性を破っているわけではなく，その相互作用の結合定数を複素数にする事により CP 対称性を破っている．この現象も Curie の原理とは矛盾しないが，しかし物理的には今ひとつ理解し難い問題でもある．すなわち，対称性をオペレータでなくて，その強さをあらかず係数で破る事が直感的には良くわからない．観測量 (実験値) は実数なので何処かにジャンプがあるものと思われるが … しかし人々はわかっているのであろう．

5.10 弱い相互作用の繰り込み理論

Higgs 粒子が 95% の確率で存在しないと言う事が実験的に分かり始めている現在、弱い相互作用の繰り込みの問題を検証する事は必須条件になっている。もともと、Weinberg-Salam 理論はゲージ理論信仰に支えられて作られたものである。しかし、このゲージ理論ならば繰り込み可能と言う主張が物理的には無意味であり、つぶれてしまった事でもあり、その意味でも弱い相互作用の繰り込みの問題を考える事が避けられない問題である [2, 3]。

Weinberg-Salam 理論は $SU(2) \otimes U(1)$ の非可換ゲージ理論から出発して、対称性を破る事によりゲージボソンに質量を与えるという模型である。これは、物理的には対称性の破れの問題を誤解しており、技術的には局所ゲージ不変を勝手に破ってしまった手法が基本になっているため、およそ信頼できる模型とは言い難いものである。この事は教科書で詳しく解説しているので、ここでは省略する。しかしながら、Weinberg-Salam 模型の最終的な Hamiltonian は弱い相互作用の実験事実をよく再現するように作られている。その意味では、Higgs 粒子を除いたり、またいくつかの修正を加えれば、信頼できる模型になりうると考えられる。そうだとすると、有限質量のボソンにより媒介されている弱い相互作用の繰り込みの問題をきちんと理解する事は、非常に重要になる。

5.10.1 自発的対称性の破れ

弱い相互作用の繰り込み理論を議論する前に「自発的対称性の破れ」という言葉の誤解を解いておく必要がある。ここではカイラル対称性に対して議論するが、この自発的対称性の破れという表現はその物理現象を正しく表していなく、これはほとんど驚くべき事であるが、量子力学を理解していない事に対応している。今、ハミルトニアン $H = H_0 + H_I$ を考えた時、この H_0 は自由粒子のハミルトニアンを表すとして、 H と H_0 とともにカイラル変換に対して不変であるとしよう。ここで H の固有状態である真空を $|vac\rangle_{exact}$ で表し、自由場の H_0 の固有状態である真空を $|vac\rangle_{free}$ で表そう。これは共に負のエネルギーの状態に粒子が詰まった状態を表している。この時、カイラル電荷に対する固有値は $|vac\rangle_{exact}$ に対して

$$e^{i\alpha\hat{Q}_5}|vac\rangle_{exact} = e^{\pm i\alpha}|vac\rangle_{exact} \quad (5.50)$$

となる．一方， $|vac\rangle_{free}$ に対して

$$e^{ia\hat{Q}_5}|vac\rangle_{free} = |vac\rangle_{free} \quad (5.51)$$

となっている．この事は何を意味しているか，答は簡単である．自由場の真空が持つカイラル電荷はゼロであったのに対して，相互作用している真空のカイラル電荷はゼロではなくて有限であったと言う事である．これが「自発的対称性の破れ」という物理の全てである．ただ単に，自由場と比較して相互作用する場の理論の真空状態のカイラル電荷が変わっても当たり前のことで，別に新しい現象があるわけでも何でもない．

ところが南部や Weinberg 達は相互作用する場の理論自体がカイラル対称性を破ったと誤解してしまったのである．何故このような事が起こり得たのであろうか？これはある程度想像はできるが，それ以上はわからない．普通は，考えているハミルトニアン固有状態がカイラル対称性を破ったように見えたなら，自分の計算過程で重大な近似をしてしまったからか，または模型計算において何かの思考法に重大な誤りがあったのであろうと考えて，謙虚な物理屋ならば，狂うほどに注意深く検証する事になるものである．勿論，相互作用する場の理論の対称性が自然に破れたらこれはとんでもない事で，そうだとしたら自分は物理の研究をやめた方が良いという事になる．現実には，南部 - Jona-Lasinio の論文においては，上述した 2 つの事が原因 (近似は Bogoliubov 変換，思考法の誤りはカットオフの理解不足) でカイラル対称性が破れたように見えただけの事である．まとめると，孤立系において対称性が自発的に破れるなどと言う事はなく，対称性が破れた状態 (真空に限らず) が実現されるのは対称性を破る相互作用項を手で付け加えた場合のみに起こる事である．

しかし，問題はその後にもある．この「自発的対称性の破れ」の誤解がさらに誤解を呼んで Higgs 機構に至るのである．Higgs 機構ではさらに進んでゲージ対称性をオペレータの部分で破ってしまうが，それでも「自発的対称性の破れ」のマジックがあるから平気であり，それから標準模型が作られてしまったのである．

但し，弱い相互作用の理論はフェルミ理論から CVC 理論に至る過程で常に実験を再現するように作られており，標準模型はその正しい部分の構造を引き継いでいるために Higgs 機構を除去し，また非可換ゲージ場ではなく通常の有限質量ベクトル場を導入するなどの修正を加えれば，実験を良く再現している理論体系である事は間違い無い事である．

5.10.2 Lorentz 条件 ($k_\mu \epsilon^\mu = 0$) の導出

繰り込み形式を議論するためには有限質量を持つベクトル場 Z^μ の伝播関数を求める事が必要である。この場合、まずはベクトル場の偏極ベクトルに対する条件式をきちんと求めておく事が重要となる [3]。ベクトル場 Z^μ に対する Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} - \frac{1}{2}M^2 Z_\mu Z^\mu \quad (5.52)$$

で与えられる。ここで $G^{\mu\nu} = \partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu$ である。この場合、運動方程式は

$$\partial_\mu(\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) + M^2 Z^\nu = 0 \quad (5.53)$$

となる。自由粒子の解は

$$Z^\mu(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^3 \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \epsilon^\mu(k, \lambda) [c_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ikx} + c_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{ikx}] \quad (5.54)$$

の形である事が知られているので、この式を上式に代入して ϵ^μ に対する方程式を求めると

$$(k^2 - M^2)\epsilon^\mu - (k_\nu \epsilon^\nu)k^\mu = 0 \quad (5.55)$$

となる。ここで ϵ^μ がゼロでない意味のある解が存在する条件は上の行列式がゼロ、すなわち

$$\det\{(k^2 - M^2)g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu\} = 0 \quad (5.56)$$

となる。この式を解くと

$$k^2 - M^2 = 0 \quad (5.57)$$

が唯一の解として求められる。よってこれを元の式に代入すると

$$k_\mu \epsilon^\mu = 0 \quad (5.58)$$

が求められる。これは QED では Lorentz 条件として良く知られている式である。しかし、これがゲージ固定とは無関係に運動方程式から導かれたと言う事は QED にとっても大変なことである。それは Lorentz ゲージがゲージ固定としては意味をなさない事に対応している。

それ以上に、これまで何故この運動方程式を解くことがなされなかったのだろうか？自由粒子の Dirac 方程式の場合を見ると明らかであるが、この場合も同じように行列式がゼロ ($\det\{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + m\beta - E\} = 0$) という条件によりエネルギーの分散関係式 ($E = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$) が求まり、それをもとの Dirac 方程式に代入する事により Dirac の波動関数が決まるのである。

5.10.3 有限質量ベクトルボソンの伝播関数

次に，有限質量をもつボソン場の偏極ベクトルが決定された事も踏まえて，ボソン場の伝播関数を決定する事が大切になる．出発点となるのはS行列の計算であり，この場合，複数個のボソン場のT-積が問題となる．ここで，2個のボソン場のT-積は

$$\langle 0|T\{Z^\mu(x_1)Z^\nu(x_2)\}|0\rangle = i \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \epsilon^\mu(k, \lambda) \epsilon^\nu(k, \lambda) \frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \quad (5.59)$$

と書かれるので $\sum_{\lambda=1}^3 \epsilon^\mu(k, \lambda) \epsilon^\nu(k, \lambda)$ の形は Lorentz 条件を考慮する事により

$$\sum_{\lambda=1}^3 \epsilon^\mu(k, \lambda) \epsilon^\nu(k, \lambda) = - \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \quad (5.60)$$

と決定される事がわかる．従って，ボソンの伝播関数は

$$D^{\mu\nu}(k) = - \frac{g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2 - M^2 + i\epsilon} \quad (5.61)$$

と一義的に決定される事がわかる．この伝播関数は通常使われているものとはほんの少しだけ異なっている．実際，ほとんどの教科書で使われている伝播関数は，分子のところで k^2 の項が M^2 と置き換えられたものである．しかし，これだと，フェルミオンの自己エネルギーとバーテックス補正には2次発散が出てしまう事は良く知られている．このため，この形では繰り込み不可能であるとこれまで考えられてきたのである．

5.10.4 ベクトルボソンによるバーテックス補正

しかしながら，新しく求められた伝播関数でバーテックス補正を計算すると驚いた事に，Log 発散がすべて消えてしまい，有限で求められるのである．実際，電子の $g-2$ に対する Z ボソンの影響を計算したところ，非常に小さくて ($\delta g \sim 10^{-13}$)，この値は確かに実験と一致している事が分かったのである [3]．従って，弱い相互作用においては，繰り込みは一切不要である事が明確になった．この事より，フォトンの伝播関数がある意味で異常であり，この場合の取り扱いが最も難しいものである．さらに深刻な問題として，Feynman の伝播関数が正しくはない事である．この事はすでに1960年代に良く知られていた事であり，場の理論の教科書でも議論されているのだが，幸か不幸か，電

子-電子散乱などの on-shell 散乱では Feynman の伝播関数と正しい伝播関数がともに同じ正しい散乱振幅を与える事が分かっていたのである。従って、取り扱いが簡単である Feynman の伝播関数が使われ続けられてきたのはある意味では自然な事でもあった。しかしながら、この Feynman の伝播関数はループを含む計算であるバーテックス補正に使ってはいけない事は明らかな事である。ところが、正しい伝播関数でバーテックス補正を計算しようとする、この計算における積分が極めて難しいものとなっている。Feynman の伝播関数を用いる場合、運動量積分は常に4次元から実質1次元に帰着されたが、正しい伝播関数を用いる場合、そう簡単にはなってくれないのである。恐らくこの困難さはフォトンの質量がゼロであると言う所から来ているものと考えられるが、この点に関しては、現在もまだ良くはわかっていない。しかし、この一点を除けば、繰り込みは非常に簡単な形で理解された事になったのである。有限質量のベクトルボソンによるバーテックス補正には発散がなくて、質量ゼロのベクトルボソンであるフォトンによるバーテックス補正にのみ発散があらわれると言う事実を考えてみれば、理論形式の問題と言うよりも、フォトンの伝播関数の問題として捉えるのが最も自然である事は明らかである。いずれにしても、ゲージ理論こそが奇妙な発散を持ち難しい理論になっている事は明らかであり、ゲージ理論のみが繰り込み可能で正しい理論であると言う定説が如何に無意味な「信仰」であったかがよく分かるものである。

5.11 繰り込み理論のまとめと未解決問題

これまで見てきたようにフェルミオンとフォトンの自己エネルギー自体は確かに発散している．しかしこれらは観測量ではないので，物理的にも理論形式の観点から言っても特に問題にはならないし，放って置いてよい事である．しかしながら物理的な観測量に発散がある場合には，本来の理論形式から言っても繰り込み理論を構築する前にどこか他に問題があるかどうかの注意深い検証こそが必要はなはずであった．これは Dirac の主張でもあり，また念願でもあったと考えられる．フェルミオンの場合は，バーテックス補正の計算が物理的な観測量になっていて，これに発散がある場合は繰り込みが必要となる．一方，フォトンの場合は，三角形図の計算が観測量に関係しておりこれに発散があると繰り込みを考える必要がある．これまで見てきたように，観測量の計算で発散があるのは唯一フォトンによるバーテックス補正の計算のみである．まとめて見ると

繰り込み関連の計算のまとめ

	繰り込み関連のファインマン図	発散度	参考文献
1.	γ^5 バーテックスの三角形図 ($\pi^0 \rightarrow 2\gamma$)	有限	文献 [1]
2.	スカラーバーテックスの三角形図	有限	文献 [2]
3.	$\gamma^\mu \gamma^5$ バーテックスの三角形図 ($Z^0 \rightarrow 2\gamma$)	有限	文献 [3]
4.	バーテックス補正 (有限質量ベクトルボソン)	有限	文献 [3]
5.	バーテックス補正 (フォトン) [($g-2$) の計算]	Log 発散	文献 [6]

となっている．これが現在の状況であり，これから見ても正しい伝播関数により ($g-2$) の計算を実行する事が重要であると考えられる．この ($g-2$) の計算が正しい伝播関数により有限で求まれば繰り込み理論は不要となる．これが量子場の理論における繰り込み関連では唯一の未解決問題である．

5.12 場の理論のまとめ

結局、真空中における全ての物理法則は基本的には量子電磁力学と量子色力学の体系に重力と弱い相互作用をうまく含み入れたラグランジアン密度により完全に記述されており、これら全ての相互作用を考慮した理論模型は概念的な困難がない量子場の理論として完成されたものと考えてよい。一つだけまだ完全にはわかったとは言えない問題はフォトンのバーテックス補正の計算であるが、これはいずれ解決されるべきものであり、理論形式全体を揺るがすほどの問題ではない。

いずれにしても、弱い相互作用における重いベクトルボソンによるバーテックス補正が有限で求められている事は非常に重要である。これまで、ゲージ理論のみが繰り込み可能であるという常識が物理の世界を支配してきた。しかし、現実の物理は逆でゲージ理論のみが物理的な観測量に対しても奇妙な発散を持っていて、従って繰り込みという不自然な定式化を考えざるを得なかったのである。実は、発散という基本的で深刻な問題は Feynman の伝播関数を使った事に主な原因がある事は分かっている。これはゲージ自由度をうまく処理できなくて、結局、正しくは無いが誰でも簡単に計算できる Feynman の伝播関数を使う事になったのである。実際、正しい伝播関数を用いようとすると計算がべらぼうに大変になり、これは誰でも出来るわけでは無くなってしまっているのである。しかし、自然界を記述するためには簡単であるかどうかは「基準」にはなり得ない。簡単な計算例として電子-電子散乱の場合を考えると、これは Feynman の伝播関数でもまた正しい伝播関数でも、同じ結果が出る事が証明されるのである。そして、確かにその通り、いくつかの昔の教科書ではその証明を解説している。しかしながら、ループを含む計算には適用できない事は明らかであり、その事をしっかり検証しなかったために、正しい方向性を失ってしまったものと考えられる。

これまで、素粒子および宇宙論においてはネーミングのみが先行してその物理は極めて不明確であり、また貧弱であった。例えば、ブラックホールというネーミングは確かに興味をそそるものであったが、しかし、その実体は専門家自身が全く理解していない状態で研究が推移してきたのである。人々は、ブラックホールとは一般相対論の方程式の特異点であるという説明をしてきたが、それが物理的にどういう状態なのかと言う事に関しては、言葉でしか答えられなかったのである。勿論それは物理ではなく、単なる SF であった。

自発的対称性の破れと言う言葉も確かに人々の気を引く良いネーミングであったが、しかし物理的には前述したように全くの間違いであった。しかしそ

れ以上に、それを語っている人々はほとんどその物理がわかっていない状態であり、例えば自発的対称性の破れがあると Goldstone ボソンが現れると言う事を検証もしないで受け入れてきたのである。それで、「Goldstone ボソンは物理的にはどのような状態として記述できますか」と専門家に質問すると、「それは集団運動の状態だから簡単には記述できない」と人々は答えて来たのである。これは勿論、物理ではない。実際には、厳密解によれば Goldstone ボソンなど最初からあり得ないものだったのである。そして、そもそも自発的対称性の破れは、その場の理論模型における「真空」の性質のみが議論の対象となっているため、その現象がどのような形にせよ物理的な観測量に直接結びつく事はあり得ない事ではあったが、それ以上に、孤立系の場の理論においてその系の対称性が自然に破れる事など、勿論、あり得ない事である。

その他の楽しいネーミングとして、少し専門的なものではあるが「カイラルアノマリー」、「格子ゲージ」、「繰り込み群」、「漸近的自由」、「大統一理論」、「超弦理論」などが良く知られているが、それらはすべて物理的には無意味であり、いずれ消えて行くものである。

このように量子場の理論は非常にシンプルに理解できる定式化により完成されたものと考えてよい。この理論形式の解説は Bentham 出版社から

「Fundamental Problems in Quantum Field Theory」の題名で e-book の教科書として出版されている。詳細はこの本を読んでいただければ良い。どの分野においても何かをシンプルに理解できた時には正しい定式化が完成したと考えてよい場合が多いものである。しかしこの場合、そのシンプルな理解に到達するまでに膨大な努力とあらゆる形の試行錯誤や不要と思われる様々な検証を経て初めて可能になるものである事は言うまでもない。

5.13 量子生物

生命の起源は恐らくは海底における火山活動と関係しているものと考えられる。高分子がさらに結合してより大きな高分子になるためには、必ず触媒に対応する物質が必要である。この触媒の役割をする事ができる物質は電離した鉄などのイオンであろう。これらの化学反応を電子の言葉で理解する事が今後の物理学の最も重要な課題になって行くものと思う。これには低エネルギーの電子の振る舞いを正確に理解する必要があるし、これこそが量子生物という学問になるものと思う。但しこれまで、物理屋は電子の波が1個の分子サイズを大幅に超えたような物理現象に関してその描像を作る事を完全に怠ってきたので、この分野で物理学を応用しようとしてもその手法を全くしらないのである。まずは基本的な低エネルギーの物理現象からしっかり理解する事が重要になるであろう。

5.13.1 量子生物

物理学の主流は今後、量子生物の研究になって行くことであろう。それは生物を電子の言葉で理解するという事である。サイエンスとしては膨大な自然現象が広がっているがそれを量子生物として理解する事は、非常に難しい事であろう。しかし、サイエンスが自然を理解しようとする学問である限り、生物自体を量子力学の言葉でどうしても理解したいものである。

例えば、生物における神経の伝達を考えると、その情報を伝えるものは、やはり電子であろうと考えられる。しかし、それが電流のように伝達するのか、あるいは何らかの「波」のように密度波として伝達するのか、まだ全くわからない。もし電子による伝達ならばどのように電位差ができるのであろうか？さらに最小単位の電位差は一体どのくらいなのであろうか？

疑問は尽きないが、しかしそれに答えるのに、まだ糸口さえつかめてはいない。それは電場にしても磁場にしても、溶液中でどうなるのかと言う問題を物理学はほとんど答えて来なかったからでもあろう。生物は水を中心にして成立していることから、生物での現象は基本的に溶液中での化学反応に対応している。

5.13.2 溶液の物理

これまでの物理学は基本的には真空中に存在している物質の振る舞いを研究する事が主力であった。量子場の理論は当然真空のみが興味の対象であったし、また固体物性も結晶が存在するところは基本的には真空、あったとしても空気中ということである。そして、その物理は、かなりの精度で現象を記述できる理論体系が完成されたと考えて良い..

今後の方向として、量子生物の研究のまえに、溶液中の物理の研究は極めて大切である。生物を物理の言葉で理解しようとする、どうしても、溶液中における化学変化の問題にぶつかるのである。この場合、化学反応の現象論は良く理解されているのだが、その化学反応を電子の言葉で物理的に理解する仕事は、まだ、全くといって良いほどわかっていない。溶液だと何故、化学反応が起こり易くなってるのだろうか？溶液中では、例えば、水分子における電子は隣の水分子とどのような相互作用をしているのだろうか？

このように見て行くと、溶液中の化学変化の前に、溶液それ自体の性質をまず理解する必要がある事がわかる。溶液とは何かと言う事である。はっきりわかっている事として、溶液の場合、これ自体は真空中では存在できないと言う事である。即ち、溶液が溶液として存在するためにはそれを支える物質（容器）と圧力の存在が必須条件であると言う事であり、これは、溶液が全体としては束縛状態になっていないと言う事を意味している。この事より、溶液の状態は固体状態と決定的に異なっている事がわかるのである。

いずれにせよ、すべてはまだ疑問だらけである。恐らくは、何か決定的に重要な事があり、それを物理の言葉で理解する事が、今後のこの分野の進展に大きな影響を与える事になると考えられる。これからしばらくは、何が決定的に重要な役割を果たしているのかを探る事であろう。

付録 A 力学

Newton 力学は質点に対する運動を記述する学問である．ここで質点とは何か？質点とは粒子があった場合，その重心の一点の座標を r としてこの一点に対応する「対象物」を意味している．Newton 方程式はこの質点に対する時間変化を決定する方程式である．座標が時間によるというのは場の理論になれている人からすると，多少奇異な感じがする．しかし，粒子が動くわけだからその時間変化を追うのは，ある意味では理解できる事でもある．この時間変化を決める Newton 方程式は質量 m の質点に力 F が働いている時

$$m\ddot{r} = F \quad (\text{A.1})$$

と書く事が出来る．ここで，座標の時間微分

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt}, \quad \ddot{r} = \frac{d^2r}{dt^2} \quad (\text{A.2})$$

は便利さのために導入されたものである．力 F は重力の場合は

$$F = -G \frac{Mm\mathbf{r}}{r^3} \quad (\text{A.3})$$

と与えられている．ここで G は重力定数であり， M は力を生み出している重力中心（例えば，地球の運動を考える場合，太陽）の質量である．ただし，ここでは重心と相対座標の問題とか地球の大きさの問題などの細かい事は全て省略してある．いずれにしても，この Newton 方程式は 2 階の微分方程式であり，その答えを何処から持ってくれば，例えば地球が太陽の周りをどのように回転して行くのかの問題は完全に解けてしまうのである．

力学の解説としては以下に 2 つの実例を挙げよう．それをしっかり理解すれば基本的には力学は理解された事になる．但し，ここでは議論しないが，力学で最も面白い点は剛体の力学を記述できる事であり，剛体に関する問題をきちんと解いて理解する事は難しいものではあるが，最高に楽しいものでもある．また，力学の方程式の諸性質を理解する上で重要になる Lagrange 形式と系の Galilei 変換と Lorentz 変換に対する不変性を議論しよう．この事より，相対性理論の重要性も認識できるものと思っている．

A.1 保存力

Newton 力学の問題の解説を具体的にする前に、保存力に関して一つ重要なコメントをしておこう。どの力学の教科書にもこのような問題は議論されていないが、しかし、物理をしっかりと理解するためにはどうしても考えておく必要がある。それは「力」という概念は Newton 力学だけで使われているということである。すなわち、量子力学でも電磁気学でも力という概念は不要である。常に「ポテンシャル」という概念のみが現れる。Newton 力学では力が

$$\mathbf{F} = -\nabla V(r) \quad (\text{A.4})$$

と書けるものを保存力という。この時に確かにエネルギー保存が導かれるからである。しかし、この式を Newton 力学内で証明する事は出来ない。何故、ベクトルである力 \mathbf{F} がスカラーであるポテンシャルの微分で書かれるのか、これには何か条件がないといけない。数学的には

$$\nabla \times \mathbf{F} = 0 \quad (\text{A.5})$$

であれば確かに保存力となる。しかし、この式は Newton 力学の範囲では示す事が出来ない。それではどうしてこのように力がポテンシャルの微分で書けたのであろうか？その理由は、Newton 力学が基本方程式ではない事と関係している。Newton 方程式は他の基本方程式から導出されるべきものであるからである。すなわち、Newton 方程式は量子力学の Schrödinger 方程式から導く事ができる。そして、この時にもととの Schrödinger 方程式には力という概念はなくポテンシャルのみがあり、その微分として Newton 力学の方程式が得られたから、Newton 力学では常にポテンシャルの微分として力が定義されているのである。

Newton 力学の方程式に保存力以外の力が現れる場合がある。これはどのような力であろうか？このような力が現れる原因を探る事はそれ程難しいものではない。多体問題を 1 体問題に無理やりなおす事をすると、どうしても複雑な力が現れてしまう事が簡単にわかるものである。例えば、摩擦力を考える場合がある。水滴が落下する時、その水滴は重力による力を感じるわけであるが、実際にその水滴の運動を記述するには、重力に加えて摩擦力を考えると比較的簡単にその運動を理解できる場合があるということである。これは水滴が空気と相互作用するからであり、この力は多体問題から派生する力となっている。これをきちんとミクロから計算する事は事実上不可能であるが、しかし摩擦力として 1 体問題により水滴の運動を取り扱う事はそれ程悪い近似ではない。

A.2 1次元調和振動子

これはバネの問題である．この場合，力は変位 x に比例する事が実験でわかっている．勿論，これは変位が小さい時のみ成り立っている．この比例係数を k とすると力 F は $F = -kx$ と書けるので Newton 方程式は

$$m\ddot{x} = -kx \quad (\text{A.6})$$

となる．この微分方程式の解は $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ を導入すると覚えやすい形になる．一般解は物の本から引っ張ってきて

$$x = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad (\text{A.7})$$

と書けることがわかる．これが微分方程式の解になっている事を示すには，この式を入れてみれば容易に納得できるものである．この時， A と B は条件を自分で入れないと決まらない定数である．例えば，初期条件として $t = 0$ で $x = 0$ と $\dot{x} = v_0$ であるとすれば

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \quad (\text{A.8})$$

と求められるのである．この答えを見てわかる事は，質点が振動しているという事である．その振動の形が \sin か \cos かという事は大して重要ではない．大切な事はそれが振動する，すなわち質点の座標が行ったり来たりの運動をしているという事である．そうするとその運動の周期はいくらかという事を知りたくなる．行って戻るわけだから，これを周期と言うのは確かに合理的である．この振動子の場合には周期 T が $T = \frac{2\pi}{\omega}$ と与えられる事はグラフを書いてみれば直ぐわかる事である．

A.3 Kepler 問題

力学で最も重要な問題は，勿論，Kepler 問題である．この問題をしっかり理解する事が力学を学ぶ事の意義の大半を占めている．Newton の運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{Mm\mathbf{r}}{r^3} \quad (\text{A.9})$$

となる．これをそのまま解くのは結構大変である．しかし，テクニックは同時に良く知られている．この場合は，まず上式の両辺に $\dot{\mathbf{r}}$ を掛けるのである．そ

うすると

$$m\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{Mm\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (\text{A.10})$$

となる．ところがこれは直ちに变形できて

$$\frac{m}{2} \frac{d\dot{\mathbf{r}}^2}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{GMm}{r} \quad (\text{A.11})$$

となり，これはすでに解けた形になっていて，積分定数を E と置くと

$$E = \frac{1}{2} m\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{GMm}{r} \quad (\text{A.12})$$

となる．しかし，この式は1個しかなく，もともと3個あったわけだから，あと2個の式を導き出す必要がある．ここで角運動量 L を $L = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}$ と定義する．何故，この様な角運動量を定義するのかと言うと，それはこの L が保存量になっているからである．すなわち，

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{r} \times G \frac{Mm\mathbf{r}}{r^3} = 0 \quad (\text{A.13})$$

となっていて時間に依らない事が簡単に証明できるのである．ここでベクトル積においては $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$ である事は具体的に入れてみればすぐに証明できる事である．これまででわかった事は，重力下での Newton 方程式では，角運動量 L が保存量になっているのでこれは定数である．従って，この L の方向を z -軸に選ぶ事にしても一般性を失う事はない．こうすると，実は運動は $x-y$ 平面になる．これは明らかで，運動を表す座標は r であるが，

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} = m\mathbf{r} \times \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0 \quad (\text{A.14})$$

であるから，運動は L と直交している事になり，それはすなわち $x-y$ 平面となっているわけである．角運動量 L の方向は z -軸に上っているのので，その大きさを $\ell = |L|$ と置くと2次元極座標表示では

$$\ell = |L| = L_z = mr^2\dot{\varphi} \quad (\text{A.15})$$

となっている．ここで，2次元極座標表示では

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (\text{A.16})$$

となっており，その時間微分は

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \quad (\text{A.17})$$

となっている．この事よりエネルギー E の式は極座標で書けて

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{GMm}{r} \quad (\text{A.18})$$

ここで， $\ell = mr^2\dot{\varphi}$ を用いれば

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{m^2r^2}\right) - \frac{GMm}{r} \quad (\text{A.19})$$

となり，これは r に対する 1 階の微分方程式になっている．この微分方程式の解法は少し面倒ではあるが，すべて解析的に解けている．もし E がマイナスの場合は確かにこの地球の運動は楕円運動になることが示される．

A.4 Lagrange 形式

Kepler 問題などの自然現象を理解するためには，運動方程式を解く事が重要であり，それは Newton 力学では微分方程式を解く事に対応している．この時，どの座標系で解くのが一番有利であるかと言う問題は，一般にはポテンシャルの形による．通常はデカルト座標系 (x, y, z) を用いているが，極座標 (r, θ, φ) も良く使われる．これらを総称して一般座標と呼んでいる．現実に問題を解こうとする時，運動方程式の段階から座標系を選ぶよりも，座標系を固定しない一般座標で Newton 方程式を定式化したものが存在し，それが Lagrange 形式と呼ばれるものである．導入の段階で少し複雑に見える数学を使うのだが，実際には簡単であり，この Lagrange 形式の方が，ほとんど全ての場合において便利で簡単になる．この事は，小学生の頃に解いた鶴亀算はかなり難しいものだが，同じ問題を方程式を使って解くと割合簡単に解けたという事と状況は良く似ているのである．

それでは，Lagrange 形式とは何か？この事を出来るだけ簡潔に解説したい．ただし，Lagrange 形式自体は物理的な意味合いはほとんど無い．一般座標でも簡単に Newton 方程式が求められるという事のみが，物理的な意味である．最も簡単に Lagrange 形式による方程式を求める方法は最小作用の原理を用いる事である．これは作用という物理量を定義し，それを最小にする事で Lagrange 方程式が求められるというものである．まず，作用 S を以下の様に定義する．

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i) dt \quad (\text{A.20})$$

ここで $L(q_i, \dot{q}_i)$ は Lagrangian と呼ばれるものであり,

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T(\dot{q}_i) - V(q_i) \quad (\text{A.21})$$

で与えられる．この時， q_i と \dot{q}_i は一般座標で書いた座標とその時間微分である．例えば，極座標だと $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$ と書けば， $\dot{q}_1 = \dot{r}, \dot{q}_2 = \dot{\theta}, \dot{q}_3 = \dot{\varphi}$ となっている．質量 m の質点の運動エネルギー $T(\dot{q}_i)$ は

$$T(\dot{q}_i) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2) \quad (\text{A.22})$$

となっている．

A.4.1 最小作用の原理

ここで，最小作用の原理を用いる時，変分法を利用する．これは Euler によって発展させられた数学の形式である．今，時間 t_0 から t_1 まで $L(q_i, \dot{q}_i)$ という物理量を時間で積分し，積分量 S を最小にするような $q_i = q_i(t)$ の関数形はどのようにしたら決定できるかという問題である．Euler は q_i の関数形を少し変えたもの $q_i + \delta q_i$ と元々のものとの差を δS として， $\delta S = 0$ が最小値を与える事より，この条件から，運動方程式が求まるという事を証明した．すなわち，

$$\begin{aligned} \delta S &\equiv \int_{t_0}^{t_1} L(q_i + \delta q_i, \dot{q}_i + \delta \dot{q}_i) dt - \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i) dt \\ &= \sum_{i=1}^3 \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i = 0 \end{aligned}$$

の式から，任意の δq_i に対して上式が成り立つ事から，

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A.23})$$

という Lagrange 方程式が求まる．そしてこの方程式は一般座標で書かれた Newton 方程式そのものになっている．

この式を得る上での数学上のポイントは，一度，部分積分をする事である．この時，部分積分の公式を利用した際に積分が外れた項は $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$ である事から，ゼロである．この事は最小作用の原理を用いて方程式を導出する時，常に重要な役割を果たしている．ところで， $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$ の条件

は何故必要なのであろうか？これは変分法そのものに関係している．変分法は関数形を変化させる事であり，この関数形の変化は時間の両端 ($t = t_0, t = t_1$) を止めておかないと出来なく，従って $\delta q_i(t_0) = \delta q_i(t_1) = 0$ を課するのは当然の条件となっているのである．

A.4.2 一般座標での Newton 方程式

上記の Lagrange 方程式は Newton 方程式を一般座標に変換する事により求められる．簡単な数学だけだから，以下に示しておく．この事より，確かに最小作用の原理を用いた変分法が正しい事がよりわかり易い形で納得できるのである．まずは， (x, y, z) から (q_1, q_2, q_3) への変数変換を考える． $x = x(q_1, q_2, q_3)$, $y = y(q_1, q_2, q_3)$, $z = z(q_1, q_2, q_3)$ であるので，それぞれの座標の時間微分は

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial x}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} \dot{q}_3 \\ \dot{y} &= \frac{\partial y}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3} \dot{q}_3 \\ \dot{z} &= \frac{\partial z}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3} \dot{q}_3\end{aligned}$$

となる．これより，

$$\frac{\partial x}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial y}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial z}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A.24})$$

がすぐに求められる．ここで次の量 I を考えてみよう

$$I \equiv -\frac{\partial V}{\partial q_i} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) \quad (\text{A.25})$$

Newton 方程式は $m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}$, $m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}$ なので， I は

$I = m \left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right)$ であるから

$$I = m \left\{ \frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i} \right) - \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\dot{y} \frac{\partial y}{\partial q_i} \right) - \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\dot{z} \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) - \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial q_i} \right\}$$

と書き直す事が出来，さらに $\frac{\partial x}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i}$ 等の式を使って

$$I = m \left\{ \frac{d}{dt} \left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left(\dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial q_i} \right\}$$

と書ける．これらより運動エネルギーを $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ と書くと I は

$$I = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (\text{A.26})$$

と書き表す事ができる．ここでポテンシャル V は座標のみの関数と仮定するので $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$ である．よって，Lagrangian を $L = T - V$ と書けば，上式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A.27})$$

となり，確かに Lagrange 方程式が求まるのである．この事はかなり重要な意味を持っている．Newton 方程式を一般座標に書き直したら，必然的に Lagrange 方程式になったと言う事であり，この事実は最小作用の原理が確かに正しい事を示している．従って，これからは最小作用の原理を基本原理として使っても安心できるというものである．実際，最小作用の原理による変分法は数学的な取り扱いが簡単であり，利用価値が高いものである．とはいつても，変分法に関する数学的な厳密さは物理屋としては興味が無いし，こちらの方は数学者に任せておけば良いと思われる．

A.5 正準形式

解析力学では常に正準変換の形式が議論されている．確かに，正準変換はかつて古典力学から量子力学を導出する際に必要であった．特に Poisson 括弧は，量子力学での交換関係と似せて議論されていたものである．しかしながら，現在の理論形式はこの本で議論しているように，量子力学が基本方程式であると考えの方がむしろ自然である．従って，物理的には正準形式自体はそれ程意味のある事ではないが，しかし理論としてはやはり大変面白い手法である．さらには，量子力学を $\hbar \rightarrow 0$ の極限で得られる方程式は Hamilton-Jacobi の方程式であり，これはそれなりに理解しておく必要があると思われる．

A.5.1 正準変換

一般座標 (q, p) で書かれている系を適当に座標変換して (Q, P) の世界に行ったとしよう．この時，Hamilton 方程式は同じ形で成り立つとする．すなわち

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad \Rightarrow \quad \dot{Q} = \frac{\partial H'}{\partial P}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial H'}{\partial Q} \quad (\text{A.28})$$

が成立する時，この変換を正準変換という．作用 S は

$$S = \int pdq - H(q, p)dt \quad (\text{A.29})$$

となっていて，この時この作用を最小にする方程式が上記の Hamilton 方程式である．従って， (Q, P) 系に対しても

$$S = \int PdQ - H'(Q, P)dt \quad (\text{A.30})$$

となっていれば当然 Hamilton 方程式が成立する事になっている．しかし，この時もう一つ自由度が残っている．それは

$$S = \int PdQ - H'(Q, P)dt + dF \quad (\text{A.31})$$

でも良いのである．ここで F は任意の関数であるが，

$$dF = pdq - PdQ + (H' - H)dt \quad (\text{A.32})$$

を満たしているもので，母関数と呼ばれている．これは，この F により正準変換が求められるからである．微分の公式から

$$dF(q, Q, t) = \frac{\partial F}{\partial q}dq + \frac{\partial F}{\partial Q}dQ + \frac{\partial F}{\partial t}dt \quad (\text{A.33})$$

である事から

$$p = \frac{\partial F}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q}, \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (\text{A.34})$$

が求められるのである．

A.5.2 Hamilton-Jacobi の方程式

新しい母関数として

$$\Phi = F + PQ \quad (\text{A.35})$$

を導入すると

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial \Phi}{\partial P}, \quad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (\text{A.36})$$

となる．ここで，作用 S を変数とみなして

$$S = \int_{t_0}^t [pd\dot{q} - H(q, p)]dt \quad (\text{A.37})$$

とした時，上式を t で微分する事より

$$dS = pdq - Hdt = \frac{\partial S}{\partial q}dq + \frac{\partial S}{\partial t}dt \quad (\text{A.38})$$

が示され，この式より

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (\text{A.39})$$

である事がわかる．これは母関数 $\Phi = S$ とした時に一致している．この時

$$H' = 0, \quad Q = \frac{\partial S}{\partial P} \quad (\text{A.40})$$

である．ここで，新しく変換されるべき (Q, P) は勝手に取る事が出来るからである．これが Hamilton-Jacobi の方程式である．ここで

$$S = -Et + S_0(q), \quad H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (\text{A.41})$$

とすれば，

$$E = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + V(q) \quad (\text{A.42})$$

となり，これは作用 S_0 に対する微分方程式になっている．この微分方程式を解いて，その積分定数と E を新しい正準座標 (Q, P) に対応させれば Newton 方程式を解いたものと同じ結果が求められるのである．

● 調和振動子の例： ここで実例として調和振動子の場合を挙げておこう．これを理解すれば十分であると思われる．この時， S_0 は

$$S_0 = \int \sqrt{2m \left(E - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2 \right)} dq \quad (\text{A.43})$$

となる．今， $P = E$ と対応させ，さらに $Q = \alpha$ (定数) としよう．この時，

$$\alpha = \frac{\partial S}{\partial E} = -t + \frac{\sqrt{2m}}{2} \int \frac{1}{\sqrt{E - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2}} dq = -t + \frac{1}{\omega} \sin^{-1} \left(\frac{q}{q_0} \right) \quad (\text{A.44})$$

となり，これは調和振動子の解になっている．

A.6 運動方程式と相対性理論

粒子の運動を記述する運動方程式はどの慣性形でも同じ形をしているべきであるという事が相対性理論の基本原則である。ここでは、Newton 方程式と Maxwell 方程式が Galilei 変換と Lorentz 変換に対してどの様に振舞っているのかを具体的に見て行きたい。そうすれば、変換した時の形がいかに大切であるか良くわかると思う。

A.6.1 Newton 方程式と Galilei 変換

これからの議論は全て S-系 の運動は x -軸 方向に速度 v で動いているとする。従って、 y -軸 と z -軸 は常に不変であるとして十分である。Galilei 変換の場合、変換則は $x = x' + vt'$, $t = t'$ である。Newton 方程式は x -軸 方向のみが変換を受ける可能性があるので、変換してみると

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad \rightarrow \quad m \frac{d^2 x'}{dt'^2} = -\frac{\partial U}{\partial x'} \quad (\text{A.45})$$

となり、方程式は不変である事がわかる。

A.6.2 Newton 方程式と Lorentz 変換

Lorentz 変換の場合、変換則は $x = \gamma(x' + vt')$, $t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$ となっていて、ただし γ は $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ であった。従って、座標の時間微分は

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + v dt'}{dt' + \frac{v}{c^2} dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}} \quad (\text{A.46})$$

さらに 2 階微分は

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{\gamma(dt' + \frac{v}{c^2} dx')} d\left(\frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}}\right) = \frac{\frac{d^2 x'}{dt'^2}}{\gamma^3 \left(1 + \frac{v}{c^2} \frac{dx'}{dt'}\right)^3} \neq \frac{d^2 x'}{dt'^2} \quad (\text{A.47})$$

となり、Newton 方程式は全く別物になっている。すなわち、Newton 方程式は Lorentz 変換に対して不変ではない。

A.6.3 Maxwell 方程式と Galilei 変換

Maxwell 方程式の Galilei 変換による性質を考えるためには、物質が無いときで十分である。この時、Maxwell 方程式は電場 E に対して

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) E = 0 \quad (\text{A.48})$$

となっている。Galilei 変換の式より

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \quad (\text{A.49})$$

となる事がわかる。よって

$$\left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \right)^2 - \nabla'^2 \right] E' = 0 \quad (\text{A.50})$$

となり、Maxwell 方程式は Galilei 変換に対して不変ではない事がわかった。

A.6.4 Maxwell 方程式と Lorentz 変換

Lorentz 変換においては

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \nabla'^2 \quad (\text{A.51})$$

であるから、Maxwell 方程式が Lorentz 変換に対して不変である事は明らかである。と言うか、Maxwell 方程式が不変になるように Lorentz 変換を決めたのである。

A.7 力学演習問題

力学に対する感覚を身につけるためには基本的な演習問題を解く必要がある。演習書は何処にでもあるので、ここでは基本的で重要な問題を議論したい。

A.7.1 単振り子

単振り子は力学演習で最も標準的であり重要な問題である。これをしっかり理解すれば、力学の本質はかなり理解される事になる。単振り子の問題は、質量 m の質点を伸び縮みしない軽くて長さ ℓ の紐でつるし、このつるした点を座標の原点とする。この質点を静かに垂らした方向を y -軸とする。従って、 y -軸の向きに関しては、下向きを正の方向とする。この質点を静かに x -軸方向にずらし、単振り子の振動を開始する。この時、質点の座標を (x, y) とし、質点が y -軸となす角度を θ と定義する。これですべての準備が整った事になる。この時、質点の座標 (x, y) は、 $x = \ell \sin \theta$, $y = \ell \cos \theta$ と書くことが出来る。この時、これらの時間微分は $\dot{x} = \ell \dot{\theta} \cos \theta$, $\dot{y} = -\ell \dot{\theta} \sin \theta$ となる。従って、この質点の運動エネルギー T は

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 \quad (\text{A.52})$$

である事が容易に確かめられる。一方、この質点のポテンシャル V は $V = -mgy = -mg\ell \cos \theta$ と書ける。マイナス符号は y -軸の方向を下向きに取った事による。この時、Lagrangian は $L = T - V$ と書けるので

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell \cos \theta \quad (\text{A.53})$$

となる。Lagrange 方程式は一般座標として θ を取れば良いので

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell \sin \theta = 0 \quad (\text{A.54})$$

となる。これが単振り子に対する運動方程式である。微小振動の場合 $\theta \ll 1$ 運動方程式は $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$ となる。但し、ここで ω を $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ と導入した。この微分方程式はバネの問題と全く同じなのですぐに解く事が出来る。そして、この運動の周期 T は $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ で与えられる事がわかる。

A.7.2 スケール変換

このスケール変換の問題は、演習問題としては難し過ぎると思われる。しかし、内容が面白いし、計算は簡単なのでここで取り上げよう。今、以下の様な Lagrangian を考えよう。

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - Kr^n \quad (\text{A.55})$$

ここで、 K は定数であり、また n は整数である。例えばクーロン力の場合は $n = -1$ であり、調和振動子ならば $n = 2$ である。ここで次のような変数変換を行う。

$$t = \alpha t', \quad r = \beta r' \quad (\text{A.56})$$

この時、Lagrangian は

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}'^2 \frac{\beta^2}{\alpha^2} - K(r')^n \beta^n \quad (\text{A.57})$$

ここで $\alpha^2 = \beta^{2-n}$ と仮定しよう。この時、Lagrangian は

$$L = \beta^n \left(\frac{1}{2}m\dot{r}'^2 - K(r')^n \right) \quad (\text{A.58})$$

となり、元の Lagrangian に定数倍しただけのものになる。この場合、明らかに運動方程式は変わらないので、

$$\alpha = \beta^{(1-\frac{n}{2})} \quad (\text{A.59})$$

が特別な意味を持つ事になる。すなわち、この式が成り立つようなポテンシャルの場合は上式の関係式がある程度、力学を知っている事に対応している。さらに α と β は時間と空間のスケールを表しているのをこれを典型的な定数で代表させるとこのポテンシャルが持っている力学の一部がわかる場合がある。

- 重力の場合 ($n = -1$) : この場合、 $\alpha \sim T$ と $\beta \sim a$ とすると、 $T^2 \propto a^3$ と書ける。これは Kepler の第 3 法則そのものである。すなわち、太陽の周りを回っている地球の楕円軌道の性質として、楕円の長半径 a の 2 乗はその周期 T の 3 乗に比例すると言うものである。

- 単振り子の場合 ($n = 1$): この場合 $\alpha \sim T$ と $\beta \sim \ell$ とすると $T \sim \sqrt{\ell}$ と書ける。これは単振り子の周期が $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ であるので一致している。
- バネの場合 ($n = 2$): この場合, $\alpha \sim T$ と $\beta \sim a$ とすると, $T \sim a^0$ と書ける。これはバネの周期が $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ であるので, 周期 T は長さの次元には依ってもなく確かに一致している。

A.7.3 Kepler 問題 (軌道は楕円)

地球が太陽の周りを回転しているが, その軌道は楕円である。以下にその楕円軌道を導出しよう。Kepler 問題のところで解説したように, 保存量としてエネルギー E と角運動量 ℓ がある。今の場合, 変数 (r, φ) が時間の関数となっている。これをもう一度書くと角運動量は $\ell = mr^2\dot{\varphi}$ でエネルギーは

$$E = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{m^2 r^2} \right) - \frac{GMm}{r} \quad (\text{A.60})$$

と表されている。ここで $\dot{r} = \dots$ と $\dot{\varphi} = \dots$ の形に書き直しておく

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{r^2}{\ell} \sqrt{2m \left(E + \frac{\alpha}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)} \quad (\text{A.61})$$

と求まる。但し, $\alpha = GMm$ を導入した。さらにここで積分を簡単に解ける形にするために $r = \frac{1}{s}$ の変数変換をすると上式は

$$-d\varphi = \frac{\ell ds}{\sqrt{2m \left(E + \alpha s - \frac{\ell^2 s^2}{2m} \right)}} = \frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{2mE}{\ell^2} + \frac{2m\alpha}{\ell^2} s - s^2 \right)}} \quad (\text{A.62})$$

となる。ここでルートの中は s の2次関数だから, 必ず因数分解した形に書き直す事が出来る。従って, 上式は

$$-d\varphi = \frac{ds}{\sqrt{(s - s_1)(s_2 - s)}} \quad (\text{A.63})$$

と書かれ, s_1 と s_2 はルートの中をゼロとした時の根であり,

$$s_1 = \frac{m\alpha}{\ell^2} - \sqrt{\left(\frac{m\alpha}{\ell^2} \right)^2 + \frac{2mE}{\ell^2}} \quad (\text{A.64})$$

$$s_2 = \frac{m\alpha}{\ell^2} + \sqrt{\left(\frac{m\alpha}{\ell^2} \right)^2 + \frac{2mE}{\ell^2}} \quad (\text{A.65})$$

で与えられる．この積分は

$$s = s_1 + (s_2 - s_1) \sin^2 \theta \quad (\text{A.66})$$

と置き換えると直ちに出来てしまい，答えは

$$\varphi_0 - \varphi = 2\theta \quad (\text{A.67})$$

である． θ を s に戻しさらに s を r に戻して，後は細かい係数を入れると

$$r = \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (\text{A.68})$$

と書き直すことが出来る．但し，積分定数 φ_0 をここでは $\varphi_0 = \pi$ と取っている．また A と ε は

$$A = \frac{\ell^2}{m\alpha}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m\alpha^2}} \quad (\text{A.69})$$

と与えられている．この事より， E が負であれば $\varepsilon < 1$ となるので，確かに軌道が楕円である事がわかる（Kepler の第 1 法則）

● 面積速度一定： Kepler 問題には面積速度一定の法則がある．これは角運動量保存則そのものである．それは簡単で，楕円における微小面積は $\Delta S = \frac{1}{2}r^2\Delta\varphi$ と書けるので，面積速度は $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$ となる．ところが， $\ell = mr^2\dot{\varphi}$ であるから，

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\ell}{2m} \quad (\text{A.70})$$

となり，面積速度一定が導かれるのである（Kepler の第 2 法則）

● 周期の 2 乗が長半径の 3 乗に比例： Kepler 問題には周期の 2 乗が長半径の 3 乗に比例するという法則がある．これも楕円の式が導かれた事から簡単にわかる事である．それは楕円の長半径 a と短半径 b は平面幾何の問題を解いて

$$a = \frac{A}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \frac{A}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad (\text{A.71})$$

で与えられる事がわかり，また楕円の面積 S は $S = \pi ab$ である．一方，面積速度の式を全体で一周するとこれが周期 T に対応するので $S = \frac{\ell}{2m}T$ が求

められる．従って，

$$S = \pi ab = \frac{\pi A^2}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \pi \sqrt{A} a^{\frac{3}{2}} = \frac{\ell}{2m} T \quad (\text{A.72})$$

となり， $T^2 \propto a^3$ となっている（Kepler の第 3 法則）

• 直接積分による周期： この式は積分を直接行っても当然求められる．それは $\dot{\varphi} = \frac{\ell}{mr^2}$ を周期 T に渡って積分すれば得られる．

$$\frac{\ell}{m} \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = A^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} d\varphi \quad (\text{A.73})$$

この積分は積分公式を参照するか，または ε で展開する事により直ちに計算されて

$$\frac{\ell}{m} T = \frac{2\pi A^2}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{A.74})$$

となり，幾何学的に求めた結果と一致している．

付録B 電磁気学

電磁気学は電場 E と磁場 B に対する Maxwell 方程式が基礎方程式であり、これは実験から求められたものである。その意味では、Maxwell 方程式が何か別のより基本的な方程式から導かれると言う事はない。この点は Newton 方程式と異なる。Newton 方程式もある意味では実験を記述するために作られたものであるが、しかし原子中の電子の運動は全く記述できなく、さらには運動が相対論的になると正しくはないので、その意味では基本方程式とは言えない。一方、Maxwell 方程式はどの段階においても常に正しい方程式である事がわかっている。

ここで電磁気学の難しさと関係している事でもあるが、言葉を厳格に使うとすると、 B は磁束密度と呼ばれている量である。これは物質中に磁気能率の集団があると磁場が影響して少し変わってしまうからである。しかし、通常の議論では磁場と磁束密度を混乱して使用しても物理に影響はないので、 B をそのまま磁場として使っていく。

この付録の最後に電流についてお話ししよう。これまで、古典力学の方程式で電流と抵抗を理解しようとした教科書が主流であるが、あの描像は若い人々をひどく混乱させるものであり、物理的に正しいものではない。伝導電子のエネルギーは非常に小さく、従って完全に量子力学的である。すなわち、電流とは何かといえば、電子が電位差を感じた瞬間に近隣の原子に飛び移る事によって生じる情報の流れである。これはおよそ古典力学的な描像とは相容れないものであり、抵抗を Newton 力学での摩擦として理解する事は、避けるべきである。また、量子力学において状態の平均を取ると確かにそれは古典力学の方程式になるが、電流を考える場合確かに平均を取る必要があるが、しかしこの平均は統計的な平均であり、量子力学的な期待値としての平均ではない事に注意する必要がある。

B.1 Maxwell 方程式

Maxwell 方程式は次の 4 個の方程式から成り立っている .

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

ここで ρ と \mathbf{j} は電荷密度と電流密度を表し, これは外から与えるべき物理量である . すなわち, Maxwell 方程式は電荷密度 ρ と電流密度 \mathbf{j} が与えられた時に, 電場と磁場がどの様に決定されるのかを示す方程式である . この電場 \mathbf{E} と磁場 \mathbf{B} が場であるという意味はこれが時空点の関数になっていると言う事である . すなわち, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ となっている . 一方, ρ と \mathbf{j} は電磁場とは無関係であり, それらは物質が作っている . 今の場合, 基本的には電子かイオンで作られていると考えて良い . ここでそれぞれの方程式の物理的な意味を解説しておこう .

B.1.1 Gauss の法則

最初の方程式 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ は Gauss の法則と呼ばれていて, 静的な電磁気学の基本方程式である . 例えば磁場が存在しない場合, 良くこの方程式を使って問題を解く事が大学での電磁気学演習問題に出題されている . しかしこの時, 実は一つ重要な事がある . この Gauss の法則だけでは, この方程式を解く事は出来ない . これは何故かと言えば, 方程式は 1 個しかないのに, 未知関数である電場は 3 個の自由度を持っているからである . すなわち, $\{E_x, E_y, E_z\}$ である . しかし, この事で問題が解けなくなったりする事を心配する必要はない . 次の方程式 (Faraday の法則) において磁場が無いと $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ となっていて, これは 2 個の方程式を含んでいるから, 確かに未知変数と方程式の数は一致していて, 正しい解が求められるのである .

B.1.2 Poisson 方程式

静電場の場合, 電位 ϕ を $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ と導入する事が良く行われ, この時 Gauss の法則から得られる方程式が Poisson 方程式

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad (\text{B.1})$$

と呼ばれている．点電荷 q が点 \mathbf{a} にある場合，電荷密度は $\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})$ となるので，これは直ちに解けて，任意の点 \mathbf{r} における電位 $\phi(\mathbf{r})$ は

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \quad (\text{B.2})$$

と求められる．

B.1.3 Gauss の法則の積分形

電磁気学の演習問題では良く Gauss の法則の積分形というのが出てくる．それは

$$\int_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) d^3r \quad (\text{B.3})$$

と書かれ，ここで左辺の積分は今「自分が考えている体積 V 」を囲む表面積 S 上での積分を意味し，右辺の積分は体積 V での積分を意味している．式が 1 個なのに何故，電場が求められるのであろうか？答えは簡単で，この式が使えるのは電荷分布が球対称性とか無限平面であるとかの特別な対称性がある場合に限り，その体積の表面での電場が求められると言っているのである．すなわち，電荷密度が例えば球対称を持っていればこの場合，未知変数である電場は 1 個の成分 E_r しか持っていない．このために，1 個の方程式 (Gauss の法則の積分形) から電場が決まってしまうのである．

B.1.4 単極子が存在しない

次の方程式 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は電荷に対応する「磁荷」(単極子, モノポール) なるものが存在しないと言う事を示している．これはかなり重要な事を意味しており，もし「磁荷」なるものが存在したとするとこの部分の方程式が時間反転不変性を破ってしまう事になっていて，これは大変な問題を引き起こす事になりかねなかったのである．従って，Dirac のモノポールと言われている単極子が存在しないと言う事は電磁気学の基本方程式が時間反転不変性を破らない方程式である事から当然の事なのである．恐らくは，Dirac はこのモノポールの存在が方程式の重要な対称性を破ってしまうと言う事を理解はしていなかったものと推測される．

B.1.5 Faraday の法則

3 番目の方程式 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ は Faraday の法則と呼ばれている式で、これは磁場が時間変化すると起電力が生じると言う良く知られている現象を記述する方程式である。実際、モーターによる起電力がどの様に生じるのかと言う事は、すでに高校における物理学の重要なテーマにもなっている。理論的には、後で見ると、ベクトルポテンシャルを導入してその時の電場と磁場をベクトルポテンシャルで書き表すのであるが、この時 Faraday の法則はゲージ不変性を考える上で非常に重要な役割をする方程式になっている。

B.1.6 Ampere の法則

最後の式 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ は Ampere の法則である。しかし、Ampere の法則は右辺の第 2 項である $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ が存在しない場合であった。ところがこの最後の項が無いと、連続方程式が満たされなくなってしまうのである。連続方程式とは

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (\text{B.4})$$

の事であり、これが成り立たないと物質が何処かに消えてしまう事になり、考えている理論模型が正しい理論では無くなってしまいう事を意味している。この連続方程式が成り立つように Ampere の法則を書き直したのが Maxwell である。従って、最後の式の第 2 項は非常に重要な項であり、この項を Ampere の法則に取り入れた事は、物理学においては最も重要な発見の一つである。

Ampere の法則 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ 自体は静磁場の演習問題でよく出てくる基本方程式である。この場合の物理的な意味は明白であり、電流密度 \mathbf{j} が与えられた時、それに対応してどのような磁場が作られるかという事である。ここで、静電場と同じ様に、Ampere の法則の積分系

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 J \quad (\text{B.5})$$

も良く使われる。この時、電流 J は $J = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ で与えられている。この Ampere の法則の積分系により磁場が求められるのは、電流が特別な対称性を持つ場合に限ると言う事は静電場の場合と同じである。

以上、これら4つの方程式を解けば、電磁気における自然現象は理解できる事になっている。具体的な解き方は、やはり演習書をしっかり解いてゆく事以外に学ぶ方法は無い。しかし、ほとんどの場合は、微分方程式を解く事になるので、それはしっかりと覚えて行く事が、最も大切である。逆に言えば、微分方程式を解くのが非常に早くて正確でも物理を理解する事にはならない場合が多いので、じっくり物理を考える事の方が重要である。

B.1.7 電気双極子と磁気双極子

基本的な法則に加えて、現実の世界に極めて重要な役割を担う物理量が電気双極子と磁気双極子モーメントである。これを「モーメント」と呼んでいるのはそのオペレータがベクトルになっている事に起因している。オペレータを2重極、4重極そして8重極と展開する事により電磁気的な相互作用を分類しているからである。しかし簡略してモーメントを省略する事ある。

● 電気双極子： 電気双極子モーメントは、正負の電荷が近接して存在する場合に作られる電場を遠くで観測した場合、あたかも1個の「電気双極子」が作る場として理解した方がわかり易い事によっている。負の電荷と正の電荷の距離を d としてそれに電荷 e を掛けた量 $p = ed$ を電気双極子モーメントという。この時、この電気双極子モーメントが作る電位 $\phi_p(\mathbf{r})$ は

$$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (\text{B.6})$$

となる。電場は勿論 $E = -\nabla\phi_p$ により求められる。

● 磁気双極子： 磁気双極子モーメントは円電流に対応している。原点を中心とした半径 a の円周上を電流 I が流れている時、その電流が作るベクトルポテンシャル A は

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{s}}{|\mathbf{s} - \mathbf{r}|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}) d\mathbf{s} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (\text{B.7})$$

と求められる。ここで \mathbf{m} は磁気モーメントであり、今の場合

$$\mathbf{m} = \pi a^2 I \mathbf{e}_z \quad (\text{B.8})$$

と書く事ができるのである。この時、磁場 B は

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times (\mathbf{m} \times \nabla) \frac{1}{r} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{m}}{r^3} - \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})\mathbf{r}}{r^5} \right] \quad (\text{B.9})$$

となる．ここで磁気ポテンシャルを ϕ_m として

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (\text{B.10})$$

を導入すると，上記の磁場は

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi_m(\mathbf{r}) \quad (\text{B.11})$$

と書ける事も覚えておくと便利である．しかし， $\phi_m(\mathbf{r})$ の物理的な意味は特にあるわけではない．

B.2 ベクトルポテンシャル(ゲージ場)

Maxwell 方程式は電場と磁場に対する方程式になっているが，この式を別の変数で書いた方が便利である場合がある．特に， $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ であるから，ここでベクトルポテンシャル \mathbf{A} を導入して磁場 \mathbf{B} を $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ と置くと，この時は $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は常に成り立っている事がわかる．さらに Faraday の法則から電場 \mathbf{E} も $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ と書ける事が容易に確かめられる．ここで ϕ は新しく導入されたポテンシャルで静電ポテンシャルと言う事がある．場の理論ではベクトルポテンシャル \mathbf{A} と静電ポテンシャル ϕ をまとめて4元ベクトル $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ と書き，ゲージ場とも呼ばれている．これら \mathbf{A} と ϕ がゲージ場と呼ばれている理由は次のゲージ変換と言われる変換に対して，電場 \mathbf{E} と磁場 \mathbf{B} が不変であるからである．ゲージ変換とは

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi, \quad \phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t} \quad (\text{B.12})$$

であり，ここで χ は $\chi = \chi(t, \mathbf{r})$ であるような時空点に依存している任意の関数である．実際， $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ と $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ の式に対してゲージ変換を行うと $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}'$ と $\mathbf{E} = -\nabla\phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t}$ となり，ゲージ変換をしても，電場と磁場は χ には依らない事がわかるのである．このゲージ変換は単なる数学であるが，実は物理学に大変重要な結果をもたらしてくれる．すなわちこのゲージ変換は電子と電磁場との相互作用を決めようとする時の指導原理として使う事が出来るのである．

B.2.1 電子と電磁場の相互作用

Maxwell 方程式を基本法則と考えた時、電子は電磁場とどのような力をおよぼし合うのであろうか？これは実はゲージ不変性から決定されるのである。電磁気学の Lagrangian を書こうとするとどうしても Lagrangian 密度を考える必要がある。それは電磁場が場の理論そのものだからである。電磁場の Lagrangian 密度の方は付録 E の「場の理論」の方に任せて、ここでは古典力学と電磁場の相互作用を考えて行こう。古典力学では自由電子の Lagrangian は $L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2$ である。これが電磁場と相互作用する時、Lagrangian がゲージ変換に対して不変であると仮定する。この時、Lagrangian は次の形しかない事が示される。

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + e(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - \phi) \quad (\text{B.13})$$

この Lagrangian はゲージ変換 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$, $\phi' = \phi - \frac{\partial\chi}{\partial t}$ に対して

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + e(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}' - \phi') - e\frac{d\chi}{dt} \quad (\text{B.14})$$

となる。ところが、Lagrangian に全微分項 $e\frac{d\chi}{dt}$ を加えても Lagrange 方程式は不変である。従って、この Lagrangian はゲージ変換に対して不変であると言う事がわかるのである。

この Lagrangian により、電子と電磁場の相互作用は古典力学の範囲で決まった事になる。実際、この Lagrangian から運動方程式を求めると

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} + e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \quad (\text{B.15})$$

となり、良く知られているクーロン力と Lorentz 力が導出されるのである。すなわち、電子と電磁場の相互作用の形は、その Lagrangian がゲージ変換に対して不変であるという要請をすると、結合定数 e を除いて一意的に決まってしまうのである。ゲージ変換自体は、電場と磁場をベクトルポテンシャルで書いて、Maxwell 方程式を書き直したら、そのベクトルポテンシャルが持っていた単に数学的な対称性の事であった。しかし、これを拡張して電子と電磁場の Lagrangian 全体がゲージ変換に対して不変であるという要請は物理的なものである。そして、実際にそれを要請して作った Lagrangian から運動方程式を求めたら、実験で必要とされているクーロン力と Lorentz 力が導出されたのである。今後、場の理論に移行して行く時にもこのゲージ原理を一つの指導原

理にしたいと考えるのは、極めて自然なものと思われるし、実際、そのようにゲージ不変性を考慮した場の理論が量子電磁力学であり、実験を良く記述している。この量子電磁力学は、電磁場の方は基本的にそのままであり、ただ場の量子化という手立てを施す必要があるが、電子の方は Dirac 場を持ってくる必要がある。この辺の所は、後で付録 E の「場の理論」で解説して行きたい。

B.3 電場と磁場のエネルギー

電場 E がある時、そのエネルギーは

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int |\mathbf{E}|^2 d^3r \quad (\text{B.16})$$

で与えられる。以下に、この式がどのようにして得られるのかを解説したい。その導出は簡単であるが、しかしこの結果をしっかりと覚えておく事の方が実は重要である。

B.3.1 クーロン力

点 r_1 に電荷 q_1 があり、点 r_2 に q_2 がある時、その間にはクーロン力が働き、そのポテンシャルエネルギーは

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (\text{B.17})$$

である。また、この電荷が N 個ある時、ポテンシャルエネルギー U は

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (\text{B.18})$$

である。ここで $\frac{1}{2}$ が現われているのは、 i と j の和がそれぞれ N まで走ると 2 回数えてしまうので、半分にしたのである。一方、 i -番目の電荷が感じる電位を ϕ_i とすると、これは i -番目の電荷以外の全ての電荷が作るものに対応している。そしてそれは

$$\phi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (\text{B.19})$$

と書ける．従って，ポテンシャルエネルギー U は

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \phi_i \quad (\text{B.20})$$

と書く事ができたのである．

B.3.2 電場のエネルギー

これらの式の連続極限をとると

$$\sum_i \rightarrow \int d^3r, \quad \phi_i \rightarrow \phi(\mathbf{r}), \quad q_i \rightarrow \rho(\mathbf{r}) \quad (\text{B.21})$$

となる．従って，

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) d^3r \quad (\text{B.22})$$

となる．ここで，Poisson 方程式 $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ を使うと

$$U = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \int (\nabla^2 \phi(\mathbf{r})) \phi(\mathbf{r}) d^3r = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int \nabla \phi(\mathbf{r}) \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}) d^3r \quad (\text{B.23})$$

ここで，部分積分をしたときに，無限遠方では ϕ はゼロであるとした．よって，

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int |\mathbf{E}|^2 d^3r \quad (\text{B.24})$$

となり，確かに電場のエネルギーが求められたのである．

B.3.3 磁場のエネルギー

磁場のエネルギーも元々電子が運動する事により磁場が作られ，その電子と磁場との相互作用が磁場のエネルギーに対応している．このエネルギー密度は $e\mathbf{j} \cdot \mathbf{A}$ であった．従って，これを全空間で積分すれば磁場のエネルギーが求められる．すなわち，

$$U = \frac{1}{2} e \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d^3r \quad (\text{B.25})$$

であり，ここで $\frac{1}{2}$ が現われているのは，全て積分すると電子自身が作った磁場とその電子との相互作用が入ってしまうからである．ここで Ampere の法則 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ を用いると，磁場のエネルギーは

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} d^3r \quad (\text{B.26})$$

となる．ここで一度部分積分をして，無限遠方でゼロとすると

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} d^3r = \frac{1}{2\mu_0} \int |\mathbf{B}|^2 d^3r \quad (\text{B.27})$$

となる．

B.4 物質中の電場と磁場

電磁気学において，導体や誘電体があるとそれらが電場に与える影響を正しく扱う事は，基本的にかなり難しいものである．導体の近くに電荷を置くとそれが作る電場は導体中に誘起される電荷により微妙に変化するし，また誘電体があるところに電場をかけると誘電体中に電気双極子が作られ，その影響で微妙に電場が変わってくるのである．以下において，なるべく直感的にその物理が理解できる様に解説して行きたい．

B.4.1 鏡像法

電磁気学の問題を解こうとする時に，境界値問題になると一気に難しくなる事が知られている．例えば，無限に広い導体を考え，その導体平面 (x, y) 上から測った z -軸上の $z = a$ の点 \mathbf{a} に電荷 q を置いた時，その電荷が作る電位 ϕ を求めよと言う問題を考える．この時，考えている空間が全空間の時は，点 \mathbf{r} での電位 $\phi(\mathbf{r})$ は直ちに求められて $\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|}$ となる事は Gauss の法則からすぐに計算できる．しかしながら，ここで (x, y) 平面上での電位を $\phi(x, y, 0) = 0$ と置くと，問題は一気に難しくなる．しかし，この時問題を解く手法は良くわかっていて，Poisson 方程式 $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$ に対して，右辺がゼロの場合の Laplace 方程式 $\nabla^2 \phi = 0$ の解を Poisson 方程式の解に足せば良い．電位が $\phi(x, y, 0) = 0$ を満たすためには

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} - \frac{q}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}|} \right) \quad (\text{B.28})$$

とすれば良く、実際この $\phi(\mathbf{r})$ は Poisson 方程式を満たしている。この式の第 2 項は確かに Laplace 方程式の解になっている。従ってこれより、境界条件を充たすためには、 $(-q)$ の電荷を点 $(-a)$ に置いた時に作られる電位を足せばよいと言う事がわかり、これを鏡像法と呼んでいる。

B.4.2 誘電体

誘電体とは何かという事を学生からよく質問されるし、ある意味では難しい問題である。誘電体は本質的に物質の事をしっかり理解しなければならないので、この点がどうしても不明瞭になる。ここでは、なるべく明確な描像を作るべく解説して行きたい。誘電体は基本的には、電気双極子の集まりであると考えて良い。物質に電場をかけたとすると、この時束縛の弱い電子は原子から少しずれると考えられる。そうするとこれは電気双極子を作る事になっている。この電気双極子を \mathbf{p} としてこの電気双極子の分布関数を $n(\mathbf{r})$ とする。ここで、点 \mathbf{R} にある電気双極子 \mathbf{p} が作る電位 $\phi_p(\mathbf{r})$ は良く知られているように

$$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} \quad (\text{B.29})$$

で与えられる。従って、物質中では電気双極子 \mathbf{p} が分布関数 $n(\mathbf{r})$ で分布しているので、この時の電位 $\phi_p(\mathbf{r})$ は

$$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int n(\mathbf{R}) \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} d^3R \quad (\text{B.30})$$

で与えられる。ここで数学の恒等式

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} = \nabla_{\mathbf{R}} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \right) \quad (\text{B.31})$$

を用いて上式を書き直すと

$$\phi_p(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\nabla_{\mathbf{R}} \{n(\mathbf{R})\mathbf{p}\}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} d^3R \quad (\text{B.32})$$

となる。ただし、ここで境界上での面積積分はゼロであると仮定している。さらに、偏極ベクトル \mathbf{P} を $\mathbf{P} = n(\mathbf{R})\mathbf{p}$ と定義し、また分極電荷密度 ρ_p を

$$\rho_p(\mathbf{R}) = -\nabla_{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{P} \quad (\text{B.33})$$

と定義すると

$$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_p(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} d^3R \quad (\text{B.34})$$

となる．これは分極電荷密度 ρ_p が作る電位そのものである．この事は Gauss の法則が

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0} \quad (\text{B.35})$$

と物質中では変更を受ける事を示している．これは勿論，物質中に電気双極子が誘起されたからである．一般的に良く書かれている表現は，物質中では Gauss の法則が修正されて，電束密度で書き直した式である．これは，簡単で上式において偏極ベクトル \mathbf{P} を用いて書き直すと

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{P} = \rho \quad (\text{B.36})$$

であるが，この偏極ベクトル \mathbf{P} は電場 \mathbf{E} に比例する 경우가多く， $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$ とおく事が出来る．ここで電束密度 \mathbf{D} を $\mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \chi)\mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}$ とすれば，Gauss の法則は確かに変更されて

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{B.37})$$

という簡単な式に書き換えられた事になる．ここで ϵ を物質の誘電率と言い，これは定数であると仮定されている．

B.4.3 磁性体

物質中にひよろひよろ電子が存在するとき，外部磁場をかけるとそれらの電子は Larmor 運動をすることになる．この場合，円電流が発生した事に対応し，従って，これは磁気双極子に対応する．すなわち，物質中に沢山の磁気双極子が出来た事になる．原点に磁気双極子 m が作るベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (\text{B.38})$$

であった．従って，この磁気双極子 m が分布関数 $n(\mathbf{r})$ で物質中に存在している時，ベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{n(\mathbf{r}') \mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r' \quad (\text{B.39})$$

となる．ここで磁化 $M(\mathbf{r}') = n(\mathbf{r}')\mathbf{m}$ と置き，式を変形すると

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (\text{B.40})$$

となる．この式の変形で部分積分を行い，十分遠方では場がゼロである事を使っている．ここで $\mathbf{i}_M(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r})$ と定義するとベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{i}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (\text{B.41})$$

となり，電流がその分だけ変更されている．この時，Ampere の法則は

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{i} + \mathbf{i}_M) \quad (\text{B.42})$$

となる． $\mathbf{i}_M(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r})$ を戻すと

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{i} + \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r})) \quad (\text{B.43})$$

である事から，

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (\text{B.44})$$

と定義すれば，

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu \mathbf{H}, \quad \mu = \mu_0(1 + \chi_m) \quad (\text{B.45})$$

と書けて， χ_m を磁気感受率という．この磁気感受率の性質をまとめよう

- $\chi_m > 0$ の時： 常磁性体
- $\chi_m < 0$ の時： 反磁性体
- \mathbf{B} と \mathbf{M} が非線形の時： 強磁性体

B.4.4 電磁気学の難しさ

電磁気学は Maxwell 方程式を解けば電場と磁場は求められるが，実際の問題はかなり複雑で難しい物となる．その一つの原因としては，例えば電流を考える時，それは電子の流れではあるが物質中を流れるので実際に真空中を流れる場合とは，本質的に異なっている事によっている．さらに Maxwell 方

程式に加えて、良く議論されるものとして、オームの法則がある。この法則は $j = \kappa E$ (但し、 κ は定数) と近似的に表せるが、この方程式自体が時間反転不変性を破っている式であり、経験的にある種の物質では良く成り立っていると言う事である。従って、オームの「法則」と言っているがこれは基本法則ではなく、むしろ「経験則」と呼ばれるべきものである。とはいつても、この経験則は物理において非常に重要な役割を果たしている事は間違いない。オームの法則があるから、実際の現象の理解が簡単になっているし、大変役に立っていてもいるのである。

しかしながら、電磁気学の立場からすると、物事がかなり複雑になっている。それは物質は電磁気学の知識だけでは作れないし、その振る舞いは電磁気学だけでは理解できないからである。物質が無い場合の電磁気学は明解であり、単純である。これは光同士が相互作用しないからである。すなわち、物質がなければ、電磁気学は基本的に自由フォトンだけの世界となり、これは厳密に解かれているし、解もしっかりとわかっている。ところが、物質があると、それが電荷分布を惹き起こしたり、電流を生み出したり、さらには双極子モーメントの集団が物質の中に存在したりするのである。これらがあると、それに応じて電場や磁場が生成されるが、その電磁場を求める事は現実問題として不可能な場合が多いのである。

B.4.5 電流とは何か？

電流とは何か？という問題提起をしたら、そんな事わかり切っているのではないかと思われるかも知れない。しかし、普通の電磁気学の教科書に書いてある電流の記述は、およそ物理的に現実離れしている事がほとんどである。電流は電子の流れであると言う事は、勿論正しい事である。しかしながら、その電子の運動を古典力学で扱っている場合がほとんどであるが、これは正しい記述になっていない事は明らかである。伝導電子のエネルギーは極めて小さく、従ってこの電子は当然量子力学的に扱う必要がある。古典力学では全く誤った描像になるが、抵抗値が理解できると思い込んでしまい、これが電流に対する電磁気学の教科書の標準的な描像になっているようである。

- 導体中： それでは、電流の正しい描像は何であろうか？それは「電流とは導体中の電子が一齐に近隣の原子にそれぞれ遷移する事から起こる現象」というものである。古典力学描像のようにある電子に注目してそれが抵抗を受けながら流れるわけではない。導体中の電子に電場が掛かった時、全ての電子に一

斉に掛かり、遷移するのである。従って、電流の伝わる速さは電子が近隣の原子に遷移するのにかかる時間と関係している。すなわち、光速とほとんど同じである。

- 電離した水溶液： 電子が近隣の原子に移る事が電流であると言う事がわかると、ある種の電離した水溶液中では電流が流れるわけであるが、これは非常に理解しやすいのである。液体の場合、やはり電子が近隣のイオンに移る事が電流である。これも全体が一気に起こる現象なので、電流が流れる事が良く理解されるのである。

- マクロな物理量： 量子力学において、その運動を電子の状態関数で平均（期待値をとる）すると、確かに古典力学の方程式になっている。しかし、伝導電子による物理量である電流においては、その場合の平均は多体問題による統計的平均である。この事により、電流がマクロな物理量として観測されるのである。この伝導電子による電流についてより深く理解しようとする事は非常に楽しい事に違いないが、しかしひどく難しい気がする。統計的な平均は常に「状態」による平均である。伝導電子がマクロスケールで存在していてその統計的平均は伝導電子と格子運動を含む全体の状態で平均して始めて観測量に結びつくのである。

しかしながら、ミクロの理論をあてはめて模型計算を行っても、それからどのようにしたらマクロの物理量がしっかり求められるのかに関する理論が抜けている。このミクロとマクロを接続する事は、今後の基本物理の最も重要な仕事になるものと思われる。

- 電気抵抗： 電流とは電子が隣の原子の一斉に飛び移る事であるという描像を解説したが、それでは電気抵抗とは何であろうか？恐らく、電気抵抗の最も重要な原因は電子と格子振動との相互作用であろうと思われる。電子が飛び移った瞬間、電子の運動エネルギーが原子の励起を起こすか、または格子振動のエネルギーに変換されるかのどちらかの現象が起こった時に「電気抵抗」としてマクロレベルで観測されるのであろう。しかし、この電流自体がミクロの理論からマクロな観測量に接続する手法が全く確立されていないため、電流がほとんどわかっていないと言う事になっている。

B.5 モノポール, EDM と時間反転不変性

これまで見てきたように, Maxwell 方程式は時間反転に対して不変である. 現在までの所, 電磁場で時間反転不変性を破る力は見つかっていない. 多くの実験家が時間反転不変性を破る力の発見に努力しているのは, それがたとえ微小でも新しい相互作用が存在する可能性を示す事になるからである. 孤立系においてモノポールか電気双極子モーメント (EDM) の存在が確かめられれば, 物理学にとって大変重要な意味を持つてくる事になる.

B.5.1 モノポール

モノポールが自然界に存在したとすると $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は次のように修正される

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \quad (\text{B.46})$$

ここで ρ_m はモノポールの密度分布を表す. 実はこの項が時間反転不変性を破るものになっているが, そのチェックは簡単である. まず, \mathbf{E} と \mathbf{B} の場合, 時間反転に対して

$$t \rightarrow -t \quad : \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{B} \quad (\text{B.47})$$

である. これは Maxwell 方程式を見れば明らかである. 従って, モノポールがあるとこの式は時間反転不変性を破るものになっている. 現在まで, モノポールは見つかっていないが, 実験家がそれを見つけようと努力する事の物理的な意味は十分あると考えられる.

B.5.2 EDM

最近では, 時間反転不変性を破る力の発見に関して言えば, むしろ孤立系の電気双極子モーメント (EDM) の実験的研究が盛んである. EDM があると Gauss の法則 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ は

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho + \mathbf{d} \cdot \nabla \rho) \quad (\text{B.48})$$

と修正される. ここで \mathbf{d} は孤立系の持っている EDM に対応している. この場合, \mathbf{d} はスピンの比例している

$$\mathbf{d} = g\boldsymbol{\sigma} \quad (\text{B.49})$$

と書ける事が理論的にわかっている．このため，時間反転に対して

$$t \rightarrow -t \quad : \quad \mathbf{d} \rightarrow -\mathbf{d} \quad (\text{B.50})$$

となるので，EDM があると時間反転不変性を破る事に対応している．

この EDM 測定に関しては，現在まで多くの実験が様々な孤立系に対してなされている．最も良く知られている実験は中性子の EDM 測定である．もし中性子の EDM が有限で見つければそれは時間反転不変性を破る力が存在している事を示している．現在までのところ，すべての実験結果は有限ではないという事である．最近の実験による中性子 EDM d_n は

$$d_n \simeq (1.9 \pm 5.4) \times 10^{-26} \text{ e} \cdot \text{cm} \quad (\text{B.51})$$

となっていて，まだゼロと矛盾していない．この先，どの程度で EDM の有限値が見つかるのか，大変興味深い問題である．

B.5.3 モノポールと EDM の Hamiltonian

上記の EDM オペレータは下記の Hamiltonian 密度

$$\mathcal{H}_{edm} = \frac{i}{2} d_n \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \psi F^{\mu\nu} \quad (\text{B.52})$$

から得られる．これは，Lagrangian 密度のなかにこの項を入れて計算すれば Lagrange 方程式から

$$\partial_k F^{k0} = j^0 - \frac{i}{2} d_n \partial_k (\bar{\psi} \sigma^{k0} \gamma_5 \psi) \quad (\text{B.53})$$

となる．ただし， $j^0 = \rho$ は密度を表し，また F^{k0} は $F^{k0} = \partial^k A^0 - \partial^0 A^k = E^k$ であり，電場に対応している．また， $\frac{i}{2} \bar{\psi} \sigma^{\mu 0} \gamma_5 \psi$ は σ_ρ に対応しており，この事から上式は

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho + \mathbf{d} \cdot \nabla \rho \quad (\text{B.54})$$

となることがわかる．但し，ここでは簡単のため $\varepsilon_0 = 1$ の表示を取っている．この事から，EDM オペレータの場合は対応する Hamiltonian が存在し，それ故 EDM によるエネルギーのズレが観測できる事を意味している．

それに対して，モノポールの場合，対応する Hamiltonian は存在していない．これは運動方程式を変更しただけであり，その基本となる Maxwell 方程式で

ある $\nabla \cdot B = 0$ は, Lagrange 方程式から得られるわけではなく, ベクトルポテンシャルで書いた時には, 自動的に満たすべき方程式になっているからである. その意味では, モノポールが存在した場合, 何が物理的な観測量になるのか, 今ひとつ明確にわかっているわけではなく, 今後研究する必要があると考えられる.

B.5.4 電荷とは何か?

電荷とは何かという設問は電磁気学を勉強しようとしている学生にはまだ無理であると思う. しかし電磁気学の問題で電荷が一様に分布している場合を解く問題がよく出されているし, やはりここでしっかり考えておく必要があると思われる. 電荷 e の実態は勿論電子かイオンでありそれ以外ない. それどころか, 通常の意味での電荷を表す e は電氣的な力の強さを表しているのみであり, 場の理論の言葉で言うとそれは結合定数を表している. それでは電荷とは何かと言えば, それは粒子が持っている「量子数」とであると答えるのが最も妥当である. そうすると, この電荷という「量子数」とは何かという疑問が生じてくるのであるが, 残念ながら, これに対して現在の理論物理では明確な解答を与える事が出来ない. 例えば, W^- ボソンはマイナスの電荷を持っている素粒子であるが, しかしこの粒子は電氣的な力を及ぼす事はない. 電荷という「量子数」をもう少し深いところでしっかり理解する事は今後の重要な課題であるし, 大変面白い問題であると考えている. あるいは, 何か重要なそして面白い物理がそこにあるような気がしている.

B.6 電磁波

B.6.1 Maxwell 方程式

Maxwell 方程式を再びここに書いておこう．それぞれの式の重要性はこれまで見て来たとおりである．

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} && \text{(Gauss の法則)} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 && \text{(磁荷がない)} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && \text{(Faraday の法則)} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} && \text{(Ampere - Maxwell の法則)}\end{aligned}$$

ここで Ampere の法則の修正をしたのが Maxwell であるが，この修正についてここで議論して行きたい．恐らくは，理論物理の立場からすると，この修正こそがこれまでの理論物理の発展における最大の功績であると考えられる．ここでは，何故それが必要であったかについて議論したい．Ampere の法則 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ において，この式全体に ∇ を掛けると

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (\text{B.55})$$

となる．しかし，この式は連続方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (\text{B.56})$$

と矛盾している．連続方程式は物質の流れの保存則を表しているのが壊れていたら，電荷の保存が成り立たなくなってしまうのである．これは絶対に困るという事で書き換えたものが Ampere-Maxwell 方程式である．実際，式 (B.55) に ∇ を掛けると

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{B.57})$$

となり， $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ を考慮すれば，確かに上式は成り立っている事がわかる．

● 変位電流： ここで変位電流 \mathbf{j}_d を定義しておこう．Ampere-Maxwell の法則の最後の項の事であり，時々使われる．

$$\mathbf{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{B.58})$$

電場が時間変化するとそこに電流が流れた事に対応していると言う事である．従って当然そこには磁場が生成されるのである．

B.6.2 電磁場のエネルギー

ここで電磁場全体のエネルギーについて計算しておこう．この場合，仕事率の計算が有効である．Newton 力学において

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \right) = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (\text{B.59})$$

が得られるが，これは単位時間あたりのエネルギーの増加を表している．従って，仕事率 W_0 を

$$W_0 = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} \quad (\text{B.60})$$

で定義する．電磁場における力を代入すると

$$W_0 = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = e \dot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) = e \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{B.61})$$

となる．ここで N 個の電荷が分布関数 ρ で分布している時，仕事率 W_0 は

$$W_0 = \int \rho \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E} d^3r = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3r \quad (\text{B.62})$$

となる．この式を Ampere-Maxwell 方程式を用いて書き直すと

$$W_0 = \frac{1}{\mu_0} \int \left(\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right) d^3r \quad (\text{B.63})$$

となる．

• Poynting ベクトル \mathbf{S} : ここで Faraday の法則を用いて，さらに Poynting ベクトルを

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \quad (\text{B.64})$$

と定義すると仕事率 W_0 は

$$W_0 = - \int \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 \right) + \nabla \cdot \mathbf{S} \right] d^3r \quad (\text{B.65})$$

となる．ここで第 1, 2 項は通常の場合の電場と磁場のエネルギーの変化分であり，第 3 項が電磁場のエネルギーの流れに対応している．それは

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{S} d^3r = \int_S S_n dS \quad (\text{B.66})$$

と書いてみればわかるように表面 S からエネルギーがコンデンサーの中に流れ込む形になっている。

• 電磁場のエネルギー：例題 (1)： RC -回路： 表面から流れ込む電磁場のエネルギーの現象を理解するために， RC -回路を考えよう。容量 C のコンデンサーと抵抗 R を直列につないでそれに電位差 V を与えたとしよう。コンデンサーは半径 a の円板が距離 d で平行に並べてあるものと仮定しよう。この時コンデンサーの電場 E とその容量 C は

$$E = \frac{V}{d}, \quad C = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{d} \quad (\text{B.67})$$

となる。ここで回路にながれる電流を J とすると回路の方程式は

$$V = RJ + \frac{Q}{C} = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \quad (\text{B.68})$$

となる。ここで初期条件として $t = 0$ で $Q = 0$ とすればこの微分方程式の解は直ちに書けて

$$Q = CV \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad (\text{B.69})$$

と求められる。これより電流 J は

$$J = \frac{dQ}{dt} = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (\text{B.70})$$

となる。ここでコンデンサーの電場はその方向を z -方向として

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \mathbf{e}_z = \frac{Q}{\varepsilon_0 \pi a^2} \mathbf{e}_z = \frac{VC}{\varepsilon_0 \pi a^2} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \mathbf{e}_z \quad (\text{B.71})$$

である。この電場は時間によっているので変位電流が生じる。それは

$$\mathbf{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{V}{R \pi a^2} e^{-\frac{t}{RC}} \mathbf{e}_z \quad (\text{B.72})$$

となっている。変位電流がながれるとそれに伴って磁場ができる。Ampere-Maxwell の法則より，円筒座標を考えて，その半径 r の面積で積分すると

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 i_d \pi r^2 \quad (\text{B.73})$$

より

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i_d r}{2} \mathbf{e}_\theta = \frac{\mu_0 r}{2 \pi a^2 R} e^{-\frac{t}{RC}} \mathbf{e}_\theta \quad (\text{B.74})$$

となっている．これより表面 $r = a$ での Poynting ベクトル S を求めると

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{VC}{\varepsilon_0 \pi a^2} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \mathbf{e}_z \times \frac{\mu_0 r}{2\pi a^2 R} e^{-\frac{t}{RC}} \mathbf{e}_\theta \quad (\text{B.75})$$

よって

$$\mathbf{S} = -\frac{V^2}{2\pi a R d} e^{-\frac{t}{RC}} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \mathbf{e}_r \quad (\text{B.76})$$

と求められ r -方向の内向きにエネルギーが流れて行く事になる．このエネルギーの流れを全時間で積分すると

$$\int_0^\infty S_n dt = \frac{CV^2}{4\pi ad} \quad (\text{B.77})$$

となる．Poynting ベクトルのエネルギーは表面積を掛ける必要があるのでこれより全エネルギーは

$$E_{tot} = \int S_n dS = \frac{CV^2}{4\pi ad} 2\pi ad = \frac{1}{2} CV^2 \quad (\text{B.78})$$

となり，これはコンデンサーに貯まったエネルギーと一致している．

● 電磁場のエネルギー：例題 (2)：LC-回路：ここで，LC-回路を考えよう．容量 C のコンデンサーとコイル L を直列につないでそれに電位差 V を与えたとしよう．コンデンサーは半径 a の円板が距離 d で平行に並べてあるものと仮定しよう．ここで回路にながれる電流を J とすると回路の方程式は

$$V = L \frac{dJ}{dt} + \frac{Q}{C} = L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} \quad (\text{B.79})$$

となる．ここで初期条件として $t = 0$ で $Q = 0$, $J = 0$ とすればこの微分方程式の解は直ちに書けて

$$Q = CV(1 - \cos \omega t), \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{B.80})$$

と求められる．これより電流 J は

$$J = \frac{dQ}{dt} = VC\omega \sin \omega t \quad (\text{B.81})$$

となる．コンデンサーの電場は

$$\mathbf{E} = \frac{VC}{\varepsilon_0 \pi a^2} (1 - \cos \omega t) \mathbf{e}_z \quad (\text{B.82})$$

となるので変位電流は

$$\mathbf{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\omega VC}{\pi a^2} \sin \omega t \mathbf{e}_z \quad (\text{B.83})$$

となる．よって，この時に作られる磁場は

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 r \omega VC}{2\pi a^2} \sin \omega t \mathbf{e}_\theta \quad (\text{B.84})$$

となっている．これより表面 $r = a$ での Poynting ベクトル \mathbf{S} を求めると

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{VC}{\varepsilon_0 \pi a^2} (1 - \cos \omega t) \mathbf{e}_z \times \frac{\mu_0 \omega VC}{2\pi a} \sin \omega t \mathbf{e}_\theta \quad (\text{B.85})$$

よって

$$\mathbf{S} = -\frac{\omega CV^2}{2\pi ad} (1 - \cos \omega t) \sin \omega t \mathbf{e}_r \quad (\text{B.86})$$

となる．これは一周期で積分してみれば明らかなようにゼロである．すなわちエネルギーの流れはない事になり，保存系である事を示している．

B.6.3 電磁波の性質

電磁波について、まず、簡単で直感的な解説をして行こう。Maxwell 方程式で物質が存在しない場合、すなわち $\rho = 0$ と $j = 0$ の時、この電磁場には物理的に意味のある解が存在している。物質が存在しない場合の Ampere-Maxwell の法則は

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{B.87})$$

である。この式をベクトルポテンシャルで書き直すと

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) \quad (\text{B.88})$$

となる。ここで Gauss の法則から $\nabla^2 \phi = 0$ である事から、今の場合 $\phi = 0$ として十分である。これとゲージ固定条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ より、式 (B.88) は

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = 0 \quad (\text{B.89})$$

と求められた。これは電磁場が自由粒子の方程式を満たしている事を示している。この一般解が

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{\epsilon(\mathbf{k}, \lambda)}{\sqrt{2\omega_k V}} \left(c_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger e^{-i\mathbf{k}x} + c_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i\mathbf{k}x} \right) \quad (\text{B.90})$$

で与えられることがすぐに確かめられる。ここで

$$kx = \omega_k t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \quad (\text{B.91})$$

と定義されている。これを代入すると

$$\omega_k = c|\mathbf{k}| \quad (\text{B.92})$$

の関係式が求まる。これは光の分散関係式を表している。ここで $\epsilon(\mathbf{k}, \lambda)$ を偏極ベクトルと呼んでいる。これはゲージ固定条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ より

$$\mathbf{k} \cdot \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) = 0 \quad (\text{B.93})$$

を満たしている。すなわち、フォトンの偏極はその進行方向と常に垂直になっている。

B.6.4 電磁波と場の量子化

ここで一つ注意しておく事がある．電磁波がベクトルポテンシャルで表される事は確かであるが，式 (B.90) そのものが電磁波に対応するわけではない．それは，この A は実数関数となっており，運動量 k の固有関数になっていないのである．それでは電磁波はどのようにになっているのであろうか？その答えは，場を量子化して初めて理解できる事である．後で議論するように，場の量子化は式 (B.90) において $c_{k,\lambda}^\dagger, c_{k,\lambda}$ をオペレータと考える事である．この時， $c_{k,\lambda}^\dagger$ はフォトン 1 個を生成する演算子であるため，フォトンが作られる時は必ず式 (B.90) の第 1 項のみが現われる事になっている．すなわち

$$\langle \mathbf{k}, \lambda | A | 0 \rangle = \frac{\epsilon(\mathbf{k}, \lambda)}{\sqrt{2\omega_k V}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (\text{B.94})$$

である．これは運動量 k の固有関数になっているので，確かに正しい電磁波の状態を表している事が良くわかるのである．

B.6.5 電磁波の発振機構

これまで見たように LC -回路自体は保存系であり，電磁波の放出としての外へのエネルギーの流れはない．それでは電磁波が生成される機構はどうなっているのであろうか？この事を理解するためにはどうしても場の理論の基本から出発せざるを得ない．まず，電磁場 A と電子との相互作用は電荷 e をカレントの方に入れた標識を取ると

$$H_I = - \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d^3r \quad (\text{B.95})$$

であり，ここから考えざるを得ない．この時，この相互作用の時間変化を考える必要がある．時間変化を考えた時に初めてエネルギーの生成を議論できるからである．すなわち，

$$W \equiv \frac{dH_I}{dt} = - \int \left[\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] d^3r \quad (\text{B.96})$$

となる．ここでスカラーポテンシャル ϕ がない時を考えて十分なので電場は

$$\mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (\text{B.97})$$

と書けている．よって W は

$$W = - \int \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \cdot \mathbf{A} d^3 r + \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3 r \quad (\text{B.98})$$

となる．ここで式 (B.60) から明らかなように第 2 項は W_0 そのものである．従って，第 1 項を W_1 として

$$W_1 = - \int \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \cdot \mathbf{A} d^3 r \quad (\text{B.99})$$

を計算する必要がある．まずは $\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$ の計算である．簡単のために非相対論的な量子力学を用いよう．また，基本的なポテンシャルは Zeeman 効果の Hamiltonian なので

$$H = - \frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}_0 \quad (\text{B.100})$$

を仮定して十分である．ここで電子の質量を m としている．また外場 B_0 は座標 r の関数であるとしている．ここで外場 B_0 を z -軸方向にとっても一般性を失わないので $B_0 = B_0 e_z$ としよう．この時，非相対論の量子力学ではカレント \mathbf{j} が

$$\mathbf{j} = \frac{e}{m} \psi^\dagger \hat{\mathbf{p}} \psi \quad (\text{B.101})$$

で与えられている．ここで $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$ である．これより

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{e}{m} \left[\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \hat{\mathbf{p}} \psi + \psi^\dagger \hat{\mathbf{p}} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] = - \frac{e}{2m^2} \nabla B_0(\mathbf{r}) \quad (\text{B.102})$$

となることが計算できる．従って，単位時間のエネルギーの変化率は

$$W_1 = \int \frac{e}{2m^2} (\nabla B_0(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{A} d^3 r \quad (\text{B.103})$$

と求められた．ここで注意する事として，ベクトルポテンシャル \mathbf{A} と外場 B_0 の違いである．今の場合， \mathbf{A} は電子から発生された電磁場を表している．一方，外場 B_0 は電子とは直接は関係のない場であり，他の粒子によって作られた外場としての電磁場である．これを見ても明らかなように，発振回路などにおける電磁波の生成は電子だけの孤立系で起こる現象ではなく，それ以外の場が存在しない限り起こらないのである．もう少し具体的に言うと，外場 B_0 は $B_0 \neq \nabla \times \mathbf{A}$ であり，このベクトルポテンシャル \mathbf{A} とは結びつかないと言う事である．発振回路においては，この磁場 B_0 はコンデンサーかまたはコイルが作る磁場によるものと考えて良い．また，加速器において電子が電磁波を放出する機構においては， B_0 は電子をその軌道に閉じ込めているために掛けられている磁場そのものである．

B.6.6 電磁場の量子化

電磁場の量子化について、これまでの場の理論の教科書に混乱した記述が多すぎるので、ここでは、学部生には難しすぎる問題ではあるが、きちんとした解説を行っておこう。これにより、フォトンの偏極ベクトルの理解が深まるものと期待している。

電磁場の量子化は実験から始まっている。最も単純なところでは、水素原子における $2p_{\frac{1}{2}}$ から $1s_{\frac{1}{2}}$ 状態への遷移の際放出される光の問題がある。 $2p_{\frac{1}{2}}$ の状態では電磁場の状態は真空であったのに、 $1s_{\frac{1}{2}}$ 状態では1個フォトンが生成されている。これは通常の電磁場の理論では理解できない。そこで考案されたのが「場の量子化」である。何故量子化と呼ばれるのかと言うと、それは場をオペレータで書くからである。電磁場の量子化を式で書くと

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda) \left[c_{\mathbf{k},\lambda} e^{-i\mathbf{k}x} + c_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger} e^{i\mathbf{k}x} \right] \quad (\text{B.104})$$

となり、ここで $\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$ である。また、 $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda)$ は偏極ベクトルで

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda') = \delta_{\lambda,\lambda'} \quad (\text{B.105})$$

を満たしている。量子化とは展開係数 $c_{\mathbf{k},\lambda}$ と $c_{\mathbf{k}',\lambda'}^{\dagger}$ に対して

$$[c_{\mathbf{k},\lambda}, c_{\mathbf{k}',\lambda'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'} \quad (\text{B.106})$$

の関係式を仮定する事である。この時、展開係数 $c_{\mathbf{k},\lambda}$ と $c_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger}$ はもはや単なる数ではなくて、オペレータになっている。このため、このオペレータが作用する空間を定義する必要があり、それを Fock 空間と呼んでいる。式で書くと、

$$c_{\mathbf{k},\lambda}|0\rangle = 0 \quad (\text{B.107})$$

を満たす $|0\rangle$ を真空という。従って、この真空に $c_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger}$ をオペレートすると、

$$c_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger}|0\rangle = |\mathbf{k}, \lambda\rangle \quad (\text{B.108})$$

となり、これは運動量 \mathbf{k} 、偏極 λ をもつフォトンの状態が生成された事を意味している。

• 偏極ベクトル $\boldsymbol{\epsilon}^{\mu}(k, \lambda)$ に対する方程式：ここで偏極ベクトル $\boldsymbol{\epsilon}^{\mu}(k, \lambda)$ についてコメントしておきたい。これまで、この偏極ベクトル $\boldsymbol{\epsilon}^{\mu}(k, \lambda)$ に対して重

大な見誤りがあった。それは、運動方程式を解く事なしに議論を進めてしまった事によっている。まずはゲージ固定する前に運動方程式の構造を理解しておく必要があるという事は当然である。電磁場 A^μ に対する Lagrange 方程式は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (\text{B.109})$$

と求められている。自由フォトンの解の形が

$$A^\mu(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \epsilon^\mu(k, \lambda) \left[c_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ikx} + c_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{ikx} \right] \quad (\text{B.110})$$

で与えられるので、この式を (B6.55) 式に代入する。その結果、

$$k^2 \epsilon^\mu - (k_\nu \epsilon^\nu) k^\mu = 0 \quad (\text{B.111})$$

が求められる。これを行列で書き直すと

$$\sum_{\nu=0}^3 \{k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu\} \epsilon_\nu = 0 \quad (\text{B.112})$$

となる。この式でゼロでない偏極ベクトル $\epsilon^\mu(k, \lambda)$ が存在するための必要十分条件はその行列式がゼロである。すなわち、

$$\det\{k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu\} = 0 \quad (\text{B.113})$$

である。この方程式の解を探してみると $k^2 = 0$ が解である事が簡単に証明できる。それは $\det\{-k^\mu k^\nu\} = 0$ であるからである。この $k^2 = 0$ の式を (B6.56) 式に代入すると

$$k_\mu \epsilon^\mu = 0 \quad (\text{B.114})$$

の式が得られる。これはよく知られている Lorentz ゲージ固定に対応した式である。重要な事はこの式が運動方程式から得られた事であり、ゲージ固定とは無関係である事である。これは Lorentz ゲージがゲージ固定の条件としては不適當なものである事を示している。従って、それ以外のゲージ固定が必要となる。例えば、Coulomb ゲージ固定を選ぶと、 $k \cdot \epsilon = 0$ となるので、これから明らかに $\epsilon_0 = 0$ となっている。さらには、フォトンの自由度は確かに 2 個である事がわかる。この事から、確かに偏極ベクトル $\epsilon^\mu(k, \lambda)$ が (B6.51) 式で書けている事がわかるのである。

この計算手法は自由粒子に対する Dirac 方程式を解く時に行ったものと全く同じである。Dirac 方程式の場合も同じように行列式がゼロ ($\det\{\alpha \cdot \mathbf{k} + m\beta - E\} = 0$) という条件によりエネルギーの分散関係式 ($E = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$) が求まり、それをもとの Dirac 方程式に代入する事により Dirac の波動関数が決まる。しかしどう云うわけか、これまでこの電磁場 A^μ における偏極ベクトル $\epsilon^\mu(k, \lambda)$ に対する方程式は解かれる事がなかったのである。恐らくはゲージ不変性に振り回されていたからであろうと思われる。Dirac 方程式の場合、4 個の自由度のうち、正負の状態の形状は決まるが、スピンの自由度 (スピンアップとダウン) は決まらないままであった。電磁場の場合、自由度は 4 個であったが、分散関係式を代入して 1 個の条件 (Lorentz 条件) が決まったのである。残り 3 個のうち、ゲージ固定により、1 個自由度が減り、結局、光子はスピンの 1 であるにもかかわらず、自由度は 2 個になったのである。そしてこれは実験事実とも合っている。また、光子の偏極ベクトル $\epsilon(k, \lambda)$ には

$$\epsilon(k, \lambda) \cdot \epsilon(k, \lambda') = \delta_{\lambda, \lambda'} \quad (\text{B.115})$$

という直交関係式が存在している。従って、光子の偏極ベクトルは進行方向に対して直行する平面でそれぞれが直交するような 2 個のベクトルで成り立っている事が分かる。但し、この描像には少し無理があることも理解する必要がある。それは、光子には静止系が存在していないので、上述した平面は仮想的であり、光子の静止系があったとした時の想像のピクチャーである。つまりは、光子の偏極ベクトルに対してはそれ程簡単には物理的な絵を書く事が出来ないという事である。但し、光子が電子と相互作用して電子に吸収される場合を考えると、この場合はある程度偏極ベクトルの描像を作る事が出来る。この時は、電子の静止系が定義されているので、吸収された瞬間の光子の偏極ベクトルは光子の進行方向と直交する方向になっている。そしてその事は必ず電子のスピンの磁気量子数に反映されている。

B.6.7 フォトンの状態関数

多くの電磁気学の教科書において、光子が電場 $E(\mathbf{r}, t)$ と磁場 $B(\mathbf{r}, t)$ と関係している様な記述が見受けられる。しかし、これはこれまでの議論を理解すれば明らかな様に、全くの間違いである。ベクトルポテンシャル $A(\mathbf{r}, t)$ をゲージ固定した後、それを量子化したものが光子であり、これはもはや電場や磁場と関係をつける事が出来ないし、それ以上に関係をつける必要はさらさない。電場と磁場は常に実数として理解されるが、光子の状態は複素

数である．これは電磁波の状態が

$$\langle \mathbf{k}, \lambda | \mathbf{A} | 0 \rangle = \frac{\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda)}{\sqrt{2\omega_k V}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (\text{B.116})$$

と表されている事からも明らかである．従って，フォトン状態は上式で表されており，それで全てである．後は，偏極ベクトルについてしっかり理解する事である．偏極ベクトル $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda)$ は

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda') = \delta_{\lambda, \lambda'} \quad (\text{B.117})$$

を満たす事が条件である．今，フォトンの進む方向を z -軸とした場合，最も単純な偏極ベクトルとしては

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) = \mathbf{e}_x, \quad \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) = \mathbf{e}_y \quad (\text{B.118})$$

と取る事であろう．この場合，例えば電子のスピン量子化軸として静磁場を x -軸方向に掛けた時，偏極ベクトルの x -軸への射影は 1 と 0 となっている．勿論， x -軸を逆にとれば，その射影は -1 と 0 となる．これを偏極ベクトルの磁気量子数と呼んで良いかどうかは議論の余地があろう．それは上述したように，フォトンには静止系が定義できないからである．

B.6.8 フォトンの偏光

フォトンにはスピンの成分が 2 個ある事を見てきたが，この 2 つの状態は偏極ベクトルとして記述される．生成されたフォトンにはこの 2 つの状態が混ざっている．しかし，注意すべき事は，1 個のフォトンをとれば，これは勿論そのどちらかの状態になっている．100 個のフォトンが生成されたら，50 個のフォトンが一つの偏極状態を持ち，あとの 50 個のフォトンがもう一つの偏極状態を持っている．

● 偏光板： 偏光板にフォトンを通す事により，この偏極状態を分離する事ができる．その意味では偏光はフォトンにとって極めて重要な物理現象であると言える．この場合，生成されたフォトンがどのような偏極状態を持つかは，偏光板の結晶構造やその電子状態に依存している．式 (B.118) で与えられる場合もあれば，

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y), \quad \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, 2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y) \quad (\text{B.119})$$

となる場合もあるが、それらは偏光板の構造に依っている。しかし、フォトンが偏光板でどのような散乱を起こすのかは、理論的にはかなり難しい問題である。散乱は Compton 散乱であり、この多重散乱をしっかりと計算すればよく、その意味では勿論、計算可能ではある。しかし、これまでにどの程度、信頼できる現実的な計算が行われてきたかは良くわからない。

- 原子状態の遷移： もう一つ、フォトンの偏光が決まる場合がある。それは例えば、原子状態の遷移によってフォトンが生成される場合、その原子中の電子のスピン状態が偏極している場合である。この場合は常に特別に偏光したフォトンが観測される事になる。原子系のスピンを偏極させる事はそれ程難しくはなく、従って、特殊に偏光したフォトンを作る事もそれ程難しい事ではない。

B.6.9 偏極ベクトルの群論的解説

フォトンのスピンの1である事に関しては、群論的な言葉で言えば、偏極ベクトルがランク1のテンソルである事から明らかである。しかし、この偏極ベクトルは角運動量とは異なっている。特に、偏極ベクトルは座標には依っていない。この点では、偏極ベクトルがむしろ電子のスピンの方により近いと言う事もできる。しかし、スピンとも異なっている。電子のスピンは角運動量と同じ代数関係を満たしているのに対して、偏極ベクトルはそのような代数関係は存在していない。さらに言えば、ベクトルポテンシャルを量子化した時にオペレータの中に現れてはいるが、しかし偏極ベクトルはオペレータの性質を持っていない、状態ベクトルと考えた方が良い。これらの事より、フォトンのスピンはそのスピンの大きさが1である事は確かであるが、電子の角運動量ともスピンとも微妙に異なっている。この事がフォトンのスピン(偏極ベクトル)をきちんと理解する事がある意味で簡単ではない事の理由でもあろう。

B.7 電磁気学演習問題

Maxwell 方程式を理解するためには、やはり演習問題を解くのがベストであると考えられる。この場合、現実的ではない状態を仮定する事が多いが、理解を深めるためには仕方が無いものである。以下に議論する基本的な問題をきちんと理解すれば、電磁気学の本質は理解できるものと思う。

B.7.1 例題 (1)：球の表面に電荷 Q がある時の電場

今、半径 a の球の表面に電荷 Q が一様に分布しているとしよう。この時、表面電荷密度を σ とする時、 $4\pi a^2\sigma = Q$ である。まずは、この電荷分布が生み出す電位 ϕ を求めて行こう。出発の方程式は Gauss の法則 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ である。静電場の場合、 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ であるから、 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ と置く事ができる。従って、Gauss の法則は

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (\text{B.120})$$

と書けて、これは Poisson 方程式と呼ばれている。この方程式は

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{B.121})$$

である事に注意すると簡単に解けて

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (\text{B.122})$$

と求められる。この式の証明は簡単で、Poisson 方程式に入れてみれば直ちに示される。ここで、半径 a の球の表面に電荷 Q が一様に分布している場合の電荷密度は $\rho(\mathbf{r}) = \sigma\delta(r - a)$ と書かれるので、これを上式に代入すると電位 ϕ が容易に求まる。すなわち

$$\phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} & r < a \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & r > a \end{cases} \quad (\text{B.123})$$

となる。この時、電場 \mathbf{E} は $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ より直ちに求められて

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \mathbf{e}_r & r > a \end{cases} \quad (\text{B.124})$$

と計算される．実は，この電場の答えは球対称性があるために，Gauss の法則の積分系を使うとすぐに求まる．すなわち

$$\int_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) d^3r \quad (\text{B.125})$$

であるから， $r < a$ の時は明らかにこの体積の中に電荷はないので $E = 0$ である．一方， $r > a$ の時は今半径 r の球を自分で考えるとこの中にある電荷は全部で Q だから $E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ と求められる．

B.7.2 例題 (2) : Biot-Savart の法則

Biot-Savart の法則は，結構複雑で計算も一般に面倒くさいものである．しかし，物理は明瞭で電流が流れている時にどのような磁場が作られるかと言う，Ampere の法則を積分で表したものである．この Biot-Savart の法則自体の求め方を以下に記そう．まず，Ampere の法則 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ において， $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ というベクトルポテンシャルで書き，さらにゲージ条件としてクーロンゲージ $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を取ろう．この時，Ampere の法則は

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j} \quad (\text{B.126})$$

と書き直す事が出来る．ここでゲージ条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を使っている．この式は直ちに解けてしまい，

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} d^3R \quad (\text{B.127})$$

となる．従って，磁場 \mathbf{B} は $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ だから

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} d^3R = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J d\mathbf{R} \times (\mathbf{r} - \mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} \quad (\text{B.128})$$

となる．ここで $J d\mathbf{R} \equiv \int_S \mathbf{j}(\mathbf{R}) dS_R$ と定義している．この時の面積積分は電流の流れと直交する面での面積積分に対応している．そして，この式が Biot-Savart の法則と呼ばれるものである．また， $d\mathbf{R}$ は線積分を表している．

B.7.3 例題 (3) : 直線電流が作る磁場

静磁場の演習問題として、 z -軸上に下から上に向かって電流 J が流れている時、その電流が作る磁場はどうか? という問題がよく出題される。この問題をまず Biot-Savart の法則を使って解いてみよう。ここで、観測する点は $x-y$ 平面上の点 $(x, y, 0)$ としよう。従って、この点を円筒座標で書くと $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ となる。一方、線積分に現われる \mathbf{R} は $\mathbf{R} = Z\mathbf{e}_z$ と書ける。これを Biot-Savart の法則の式に代入すると

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{r\mathbf{e}_\varphi dZ}{(r^2 + Z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 J}{2\pi r} \mathbf{e}_\varphi \quad (\text{B.129})$$

と求められ、よく知られている答えになるのである。上式を計算する時に積分公式を使っているが、数学の公式は何処に書いてあるかを知っていれば良い。

一方、この問題は Ampere の法則の積分形によっても解く事が出来る。それは、今の場合特別な対称性を持っているからである。Ampere の法則の積分形は

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 J \quad (\text{B.130})$$

となっている。ここで円筒座標の対称性があることがわかるので、 $\mathbf{B} = B_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ と書け、さらに $d\mathbf{s} = r\mathbf{e}_\varphi d\varphi$ なので、

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B_\varphi \int_0^{2\pi} r d\varphi = B_\varphi 2\pi r = \mu_0 J \quad (\text{B.131})$$

よって磁場 B_φ が

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 J}{2\pi r} \quad (\text{B.132})$$

となり、Biot-Savart の法則により求めたものと一致している。

付録C 量子力学

Newton 力学は地球の公転運動を記述したり、バネの運動を記述することに関しては非常に大きな成功を収めた。しかしながら、Newton 力学は原子における電子を記述しようとするとは全く無力であった。電子のエネルギー準位を記述できる理論は量子力学である。特に、電子が束縛されるという状態自体は力学と同じではあるが、しかし、その束縛状態のエネルギーは飛び飛びの値を取っている。これは Newton 力学ではどうしても理解できなく量子化という事を考えざるを得ない。その量子力学の基本方程式は Schrödinger 方程式であるが、実は電磁気学の基本方程式である Maxwell 方程式は Schrödinger 方程式の方に近いのである。場の理論としては、電磁気学と量子力学はほとんど同じであると思っていよう。

基本的には、量子力学は原子における電子の力学を記述するものであると考えて良い。その場合、量子力学では電子の運動そのものにはそれほど興味がない。ここで「運動」と言っているのは Newton 力学における粒子の運動、すなわち粒子の座標の時間発展の意味である。その代わり量子力学では電子の状態を記述する事になり、そしてその状態を表す物理量が波動関数 (状態関数) $\Psi(t, r)$ である。量子力学では水素原子において電子が陽子の周りをどの様に回転しているかと言う事には興味が無いのである。量子力学は「電子の状態」を記述する事が出来るため、もし、電子の運動に興味がある人に対しては、平均したら電子が何処にいるかを教える事が出来るのである。

C.1 Schrödinger 方程式

電子の動力学を記述できる方程式が Schrödinger 方程式である。基本的には、電子が陽子に束縛されている水素原子をしっかりと理解する事が量子力学の最も重要な目標である。、まずはもう少し一般的に、ポテンシャル $V(r)$ に束縛さ

れている場合の質量 m の粒子に対する Schrödinger 方程式を書くと

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(t, \mathbf{r})}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \Psi(t, \mathbf{r}) \quad (\text{C.1})$$

となる．この式が古典力学からどのように求められるかと言う事には興味がなく，むしろ Schrödinger 方程式を量子力学の出発点と考えて行くのが最も自然である．勿論，科学史的にはまた別の興味があって当然であるが，物理学としては古典力学はあくまで量子力学の $\hbar \rightarrow 0$ の極限模型として求められるものと考えべきである．物理量の期待値を取るとこれが Newton 方程式となるが，まずはこの Ehrenfest の定理を見て行きたい．

C.1.1 Ehrenfest の定理

今，オペレータ \hat{A} の期待値を次式で定義する．

$$\langle \hat{A} \rangle \equiv \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \hat{A} \Psi(x, t) dx \quad (\text{C.2})$$

運動量オペレータを $\hat{p} \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ そしてエネルギーオペレータを $\hat{E} \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ とする時，

$$\langle \hat{E} \rangle = \langle \frac{\hat{p}^2}{2m} \rangle + \langle U(x) \rangle, \quad \frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{1}{m} \langle \hat{p} \rangle, \quad \frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle = - \langle \frac{\partial U}{\partial x} \rangle$$

が成立する事が簡単に示される．これを Ehrenfest の定理という．これは Newton 方程式そのものである．すなわち，当然のことではあるが，場の方程式である Schrödinger 方程式の方が情報量は無限に多いのであり，従って，状態によるオペレータの期待値が結局古典力学に対応していたと言う事である．

C.1.2 束縛状態

定常状態の場合，波動関数 ψ は $\Psi(t, \mathbf{r}) = e^{-iEt/\hbar} \psi(\mathbf{r})$ と置く事が出来るので，この時 Schrödinger 方程式は

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right) \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}) \quad (\text{C.3})$$

となる．ここで E が粒子のエネルギー固有値を表している．束縛状態の場合， E が負となる事が条件になる．それは，ポテンシャルが無制限遠方でゼロであ

るように基準値を選んでいる事に対応している。従って、粒子が束縛されて外に飛んでゆかないためには、どうしても $E < 0$ が Schrödinger 方程式を解く上での条件になっている。尤も、この事は力学でも同じであり、地球の公転においては、よく知られているようにエネルギー $E < 0$ は負であり、この事が地球の公転軌道が楕円である事に対応している。

C.1.3 表示の問題

量子力学では Hamiltonian の固有関数である波動関数を状態関数という言い方をしており、その書き方がまちまちである。例えば、 $\psi_n(x)$ と書けば、それは n という固有値を持った状態を表している。この時、量子力学では

$$\psi_n(x) = |\psi_n\rangle = |n\rangle \quad (\text{C.4})$$

などと色々な書き方をする事が一般的である。これにはそれなりの理由があるのだが、特に量子力学では固有値を指定するとその状態が決まってしまうと言うことが最も大きな理由である。ここで、 $\langle n|$ をブラ状態と言い、 $|n\rangle$ をケット状態という言い方をしている。何故このような表示を使うのか？それは常に内積の事を考えているからである。 $\langle n|$ のブラ状態と $|n'\rangle$ のケット状態で内積を作ると

$$\langle n|n'\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^\dagger(x) \psi_{n'}(x) dx \quad (\text{C.5})$$

となっている。わざわざブラとケットを作ったのは、この内積の事を考えているからであり、逆に言えば、それ以上の事ではない。多少便利である事は確かであるが、表示自体には物理的にも数学的にも特に意味があるわけではないので注意した方がよい。またブラとケットの間に棒線を入れる場合とカンマなどにする場合があるが全て物理とは無関係であり好みの問題である。

C.2 水素原子

量子力学を理解するには、水素原子の Schrödinger 方程式をしっかりと解いて、その束縛状態のスペクトルを理解し、覚えてしまう事が最も手っ取り早いものである。学生が最も苦労する所は角運動量の様々な性質とその固有関数であるが、まずは原子核の電荷を一般的にした水素型原子に対する Schrödinger 方程式を書く

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{Ze^2}{r}\right)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (\text{C.6})$$

である。ただし、 ∇^2 は

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{\hbar^2} \frac{\mathbf{L}^2}{r^2} \quad (\text{C.7})$$

と書くことができる。ここで角運動量演算子は

$$\mathbf{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right) \quad (\text{C.8})$$

で与えられている。 \mathbf{L}^2 と L_z の固有関数は球面調和関数で与えられ

$$\mathbf{L}^2 Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \quad L_z Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \hbar m Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (\text{C.9})$$

である。よって、水素型原子の Schrödinger 方程式の動径部分に対する方程式は

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{r} \right) R_{n\ell}(r) = ER_{n\ell}(r) \quad (\text{C.10})$$

となる。この時、水素型原子の Schrödinger 方程式の固有値と固有関数は

$$\psi_{n\ell}(\mathbf{r}) = R_{n\ell}(r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \quad E_n = -\frac{mZ^2 e^4}{2\hbar^2 n^2} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (\text{C.11})$$

で与えられる。後は、この固有関数の具体的な形を $n = 1, 2$ と $\ell = 0, 1$ くらいをしっかりと覚えてしまう事である。どの教科書にも書いてある事なのでここでは省略しよう。

C.3 Maxwell 方程式と Schrödinger 方程式

電磁気学のところで述べている様に，Maxwell 方程式はすでに量子論の方程式である．その事をより具体的にみるために，物質が無い場合の Maxwell 方程式を考える．この場合， $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ というクーロンゲージを取るがこれは最も良いゲージ固定であり一般性を失う事はない．

C.3.1 類似点

この時，Maxwell 方程式を書き直すと Maxwell 方程式は次のようになる．

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = 0 \quad (\text{C.12})$$

一方，自由粒子の場合の Schrödinger 方程式は

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \psi(t, \mathbf{r}) = 0 \quad (\text{C.13})$$

となっており，大変よく似ている．要するに場の方程式としては，2 つとも同じものなのである．これはすなわち，電磁場の方程式はすでに第一量子化を知っていた事を示している．これは何を意味しているのであろうか？科学史は別にして，量子化という過程は原理的なものではない事を意味している．つまり，場の方程式が出発点であるべきである．この当然な事がこれまで見過ごされていたのは，一つには古典力学が最初に作られ，その力学をより一般的にした正準理論が発展してきた事にも依っていると思われる．さらに，電磁気学の方程式が古典論の極限を持っていないと言う事実は，確かに量子化自体が基本原理ではない事を物語っている．

C.3.2 相違点

Maxwell 方程式と Schrödinger 方程式の相違点は何であろうか？一番大きな点は，やはり電磁場の方程式には束縛状態が存在しないと言う事であろう．つまり光子は束縛される事はなく，常に自由粒子の状態のみが，物理上許されている．恐らくは，この事が，電磁場の方程式が発見されてからかなり時間が経ってから量子力学の方程式が発見された一つの理由であろうと思われる．

もう一つ，重要な相違点がある．それは古典論の極限の存在である．Schrödinger 方程式は \hbar をゼロに持ってゆく極限が存在していて，これが Newton 方程式

に対応している．一方，Maxwell 方程式はこの極限が存在していない．そもそも Maxwell 方程式には \hbar が現れてはいないのである．従って，Planck がフォトンエネルギーを

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} n\hbar\omega \quad (\text{C.14})$$

と書いた時，それがたとえ黒体輻射の実験結果を再現する事ができる新しい物理であったとしても，やはり怖かった事であろうと思う．このエネルギーの式は \hbar をゼロとする極限が存在していない．この事は物理を理解する上でかなり重要な意味を持っている気がする．Maxwell 方程式は場の方程式であるが，その場はオペレータとしては定義されていない．すなわち，Maxwell 方程式自体は場の量子化について何も教えてくれないのである．従って，場を量子化した後の電磁場のエネルギーが \hbar の単位で測られるという事は実験からしか我々は知る事が出来ないのである．少なくとも理論的にそれ以上のレベルで理解しようとするには，まだ何か重要な事がわかっていないのであろう．

C.4 場の理論としての Schrödinger 方程式

Schrödinger 方程式における波動関数 $\psi(t, \mathbf{r})$ は場である．従って，量子力学は場の理論であり，この Lagrangian 密度を作る事が出来る．

C.4.1 Lagrangian 密度

Schrödinger 場の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2m} \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \psi^\dagger V \psi \quad (\text{C.15})$$

と書く事が出来る．この式では， $\hbar = 1$ と $c = 1$ の表記を取っている．場の理論では良くこの表記を使うがこれも単に簡単化のため以外に理由はない．ここで，ポテンシャル V は外場として導入している．この時， k が 2 回繰り返して出てきたときは，和を意味しているものと仮定している．すなわち， $k = 1, 2, 3$ の和が取られるものと仮定している．この表記は簡単にする事以上の意味は全く無い．表記の意味するところは

$$\frac{1}{2m} \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{2m} \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} = \frac{1}{2m} \nabla \psi^\dagger \cdot \nabla \psi \quad (\text{C.16})$$

と言う事である．ここで，Lagrange 方程式は

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\frac{\partial \psi}{\partial x_k})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \quad (\text{C.17})$$

となる．ここで μ が 2 回繰り返して出てきたときは， $\mu = 0, 1, 2, 3$ の和が取られるものと仮定している．ただし，4次元微分演算子を

$$\partial_\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (\text{C.18})$$

と定義している．また，4元ベクトルを

$$x^\mu = (t, \mathbf{r}), \quad x_\mu = (t, -\mathbf{r}), \quad p^\mu = (E, \mathbf{p}), \quad p_\mu = (E, -\mathbf{p}) \quad (\text{C.19})$$

とする時，4次元での内積を

$$x^\mu x_\mu = t^2 - \mathbf{r}^2, \quad p^\mu p_\mu = E^2 - \mathbf{p}^2, \quad x^\mu p_\mu = tE - \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \quad (\text{C.20})$$

と定義する．

C.4.2 Lagrange 方程式の導出

Lagrange 方程式の導出は古典力学の場合を一般化しただけである．作用 $S = \int \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi) d^4x$ を極小にする事により Lagrange 方程式が求められる．

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \delta(\partial_\mu \psi) \right] d^4x = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \right) \right] \delta \psi d^4x = 0$$

上式では一度部分積分を行い，さらに境界での3次元表面積分はゼロであるとした．これより，

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \right) \quad (\text{C.21})$$

となり，確かに場 ψ に対する Lagrange 方程式が求められたのである．ここで，表記を省略しているが，場 ψ は複素関数であり ψ^\dagger も独立変数になっている．従って，場 ψ^\dagger に対する Lagrange 方程式も同様に得られる事に注意したい．

C.4.3 Schrödinger 場

Schrödinger 場は非相対論的なのに、何故、相対論的な表記で書けるのかと思われるかも知れない。しかし相対論か非相対論かの違いはダイナミクスを議論する時に重要になるが、場の方程式を求める事においてはその間の差は全く無い。従って、ここで場の理論に慣れておくと Lagrange 方程式や Hamiltonian を作る事など、基本的な物理の形式は相対論的な場の理論も全く同じになるので便利である。場に対する方程式を求めると

$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - V(r)\right)\psi(t, \mathbf{r}) = 0 \quad (\text{C.22})$$

となり、Schrödinger 方程式が求められる。

C.4.4 Hamiltonian 密度

Lagrangian 密度から Hamiltonian 密度を作る事が出来る。何故、Hamiltonian 密度を作りたいのかと言う問題であるが、実は Lagrangian 密度において並進対称性を要求すると下記に定義するエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ が保存量になるからである。

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \partial^\nu \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^\dagger)} \partial^\nu \psi^\dagger - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \quad (\text{C.23})$$

すなわち

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{C.24})$$

である事が証明できて、これは $T^{\mu\nu}$ が保存量である事を示している。そこで Hamiltonian 密度として

$$\mathcal{H} \equiv T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^\dagger} \dot{\psi}^\dagger - \mathcal{L} \quad (\text{C.25})$$

を定義し、さらに Schrödinger 場の Lagrangian 密度を代入して全空間で積分すれば Hamiltonian

$$H \equiv \int \mathcal{H} d^3r = \int \left[\frac{1}{2m} \nabla \psi^\dagger \cdot \nabla \psi + \psi^\dagger V \psi \right] d^3r \quad (\text{C.26})$$

が得られ、これは確かに保存する物理量となっている．ここで一度部分積分を用いて上式を書き直すと

$$H = \int \left[-\frac{1}{2m} \psi^\dagger \nabla^2 \psi + \psi^\dagger V \psi \right] d^3 r \quad (\text{C.27})$$

となり、これは通常の Schrödinger 方程式の Hamiltonian を波動関数ではさんで期待値を取った式と一致している．この Hamiltonian は場の量子化の時に重要になるが、古典場の理論の範囲では、物理的な意味は難しい．すなわち、Hamiltonian それ自身ではそれ程物理的に有用ではない．この事は、古典力学を良く知っている人には明らかな事であろう．すなわち、古典力学の Hamiltonian もそれ自身はそれ程明確な物理的な意味はない．しかし、Hamiltonian を変分する事により Hamilton 方程式が求められ、これは Newton 方程式そのものである．この事情は場の古典論でも同じになる．上記の Hamiltonian を ψ で変分すると意味のある方程式が求められる．この時、拘束条件を付ける必要がある．それは場 ψ が規格化可能であると言う事である．従って、次の量

$$W = \int \left[-\frac{1}{2m} \psi^\dagger \nabla^2 \psi + \psi^\dagger V \psi \right] d^3 r - E \left(\int \psi^\dagger \psi d^3 r - 1 \right) \quad (\text{C.28})$$

を ψ で変分して極小にする事である．ここで E は Lagrangian の未定係数と呼ばれる定数である．統計力学では良く使われる数学の技術であり、簡単で大変便利であるから覚えておいた方がよい．今、

$$\begin{aligned} \frac{\delta W}{\delta \psi^\dagger} &= \int \left[-\frac{1}{2m} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \nabla'^2 \psi(\mathbf{r}') + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \right] d^3 r' \\ &- E \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^3 r' = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) - E \psi(\mathbf{r}) = 0 \end{aligned}$$

であるから、これは Schrödinger 方程式そのものである．ここで、変分法で唯一覚えておく必要のある式

$$\frac{\delta \psi(\mathbf{r}')}{\delta \psi(\mathbf{r})} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{C.29})$$

を使っている．この事より、Hamiltonian を変分する事により確かに量子力学の方程式が得られる事になる．結果的には、Hamiltonian で求めても、Lagrangian 密度から変分した Lagrange 方程式から求めても、確かに同じ Schrödinger 方程式が求まり物理は同じである事がわかったのである．しかしながら、ここで注意したい事は、この Hamiltonian と Lagrangian 密度ともにそれ自体は物理的な観測量には結びつかないのである．これはかなり重要な事である．

C.5 量子力学演習問題

量子力学をしっかりと理解するためには、結局問題を沢山解いてみるという当り前のコメントに尽きる。量子力学は一般的には数学的な難しさは比較的少ない。むしろ電磁気学の方がはるかに数学的には複雑である。しかし、量子力学の考え方になれる事はそれ程易しい事ではない。最初はどうしても力学的な描像に慣れているので場の理論的な描像に慣れるのに、やはり少し時間がかかり、演習問題を解く事によりその描像が自分のものになって行くのだろうと思う。

C.5.1 調和振動子

量子力学を学ぶにあたり、必ず理解しておく必要のある問題がこの調和振動子である。この時、Schrödinger 方程式は

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2\right) \psi(x) = E \psi(x) \quad (\text{C.30})$$

と書けている。ここで境界条件として $\psi(\pm\infty) = 0$ を入れてこの微分方程式を解けば、確かに答えが求まり、

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{C.31})$$

となる。さらに重要な事として、波動関数も解析的に求まってしまうのである。量子数 n の状態の波動関数は $\psi_n(x)$ は

$$\psi_n(x) = \left(\frac{\alpha^2}{4^n \pi (n!)^2}\right)^{\frac{1}{4}} H_n(\alpha x) e^{-\frac{1}{2} \alpha^2 x^2}$$

但し $H_n(\xi) = (-)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}$ であり、また $\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ と定義している。

この波動関数は最もよく使うものの一つである。しかしながら、調和振動子の問題は現実的ではない。それは、このポテンシャルにおける状態には、散乱状態が存在していないのである。つまり、全ての状態は束縛状態なのである。実際に量子力学を自然界に記述に応用する時は必ず散乱状態が存在しているポテンシャル模型を使う必要がある。

C.5.2 生成・消滅演算子

調和振動子のエネルギー固有値やその波動関数を求める時，生成・消滅演算子を用いると非常に便利で簡単である．まず，オペレータ a, a^\dagger を次のように導入する

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat{p}, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat{p} \quad (\text{C.32})$$

ここで， $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ である．この時，

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (\text{C.33})$$

が直ちにチェックできる事である．ここで，数演算子を $\hat{N} = a^\dagger a$ と定義すると，

$$[\hat{N}, a] = -a, \quad [\hat{N}, a^\dagger] = a^\dagger \quad (\text{C.34})$$

が計算で示される．さらに， \hat{N} の固有関数および固有値を ϕ_n, n とすると

$$\hat{N}\phi_n = n\phi_n \quad (\text{C.35})$$

となる．この時，

$$a^\dagger|\phi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\phi_{n+1}\rangle, \quad a|\phi_n\rangle = \sqrt{n}|\phi_{n-1}\rangle \quad (\text{C.36})$$

である事が簡単に証明できるものである．これらの事より，調和振動子のエネルギー固有値は

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{C.37})$$

で与えられることが容易にわかるものである．

この手法により，波動関数も求める事が出来る． a が消滅演算子である事から，基底状態 ϕ_0 の状態に a をオペレートするとゼロになる．すなわち

$$a\phi_0 = 0 \quad (\text{C.38})$$

である．この式を微分で書き直すと

$$\left(\frac{m\omega}{\hbar}x + \frac{\partial}{\partial x}\right)\phi_0(x) = 0 \quad (\text{C.39})$$

となり，これは直ちに解けて

$$\phi_0(x) = N_0 e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \quad (\text{C.40})$$

と求められる．この基底状態の波動関数が求まると，励起状態の波動関数は

$$\phi_n(x) = N_n \left(\frac{m\omega}{\hbar} x - \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \phi_0(x) \quad (\text{C.41})$$

と決められてしまうのである．この $\phi_n(x)$ は先に求められたものと勿論一致している．但し， N_n は規格化定数である．

C.5.3 摂動論

量子力学において厳密に解けるポテンシャル問題としては，水素原子，調和振動子そして井戸型ポテンシャルがある．しかしこれ以外で物理的にある程度面白いポテンシャル問題で厳密解が求められている場合はほとんどない．従って，物理の議論は基本的に摂動論を使う事になる．摂動論を考える時，非摂動項を H_0 とし，摂動項を H' とする時，全 H は

$$H = H_0 + H' \quad (\text{C.42})$$

である．ここで H' は H_0 と比べて十分小さいとする．また，摂動論では， H_0 の固有値と固有関数は知られているものとして，それら H_0 の固有値と固有関数で全ての物理量を計算するというものである．この時，

$$H_0 \Psi_n = E_n \Psi_n \quad (\text{C.43})$$

とする．この時， n 番目の状態に対する 1 次の摂動エネルギーは

$$E_n^{(1)} = \langle \Psi_n | H' | \Psi_n \rangle \quad (\text{C.44})$$

で与えられる事がすぐわかる．一方，基底状態に対する 1 次の摂動による波動関数の変化 Ψ'_1 は

$$\Psi'_1 = \sum_n \frac{\langle \Psi_n | H' | \Psi_0 \rangle}{E_0 - E_n} \Psi_n \quad (\text{C.45})$$

となる．また基底状態に対する 2 次の摂動エネルギー $E_0^{(2)}$ を書いておくと

$$E_0^{(2)} = \sum_{n \neq 0} \frac{|\langle \Psi_n | H' | \Psi_0 \rangle|^2}{E_0 - E_n} \quad (\text{C.46})$$

となる．恐らくは，この式が最もよく使われる公式であろうと思う．大切な事は，2次の摂動エネルギーは常に引力的に振舞うと言う事である．摂動項 H' の形に依らず，何時でも2次の摂動エネルギーは負になっているのである．

C.5.4 変分法

自分の経験として，変分法を理解した時に何か量子力学がぐーんと身近に感じたものである．いつも Schrödinger 方程式を解いて固有値問題を計算し，それを求めて行くのは，どうも難しい数学に振り回されている気がしていたのである．これと比べると，変分法は単純明快であり，しかもその系のエネルギーはかなり正確に求められてしまうのである．但し，一つ欠点があり，この手法では基本的にはその系の基底状態，つまり一番エネルギーが低い状態のみが求められるのである．変分法とは何か？波動関数 $\psi(\mathbf{r})$ の形を適当に変えてみて，エネルギー E

$$E = \int \psi^\dagger(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) d^3r, \quad \int \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d^3r = 1 \quad (\text{C.47})$$

がなるべく小さくなるように $\psi(\mathbf{r})$ の形を上手く見つけると言う事である．ここで，波動関数の規格化条件は常に付けておかなければいけない事である．

• 水素型原子： 例えば，水素型原子の場合， $V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$ であり，また最低エネルギー状態は $\ell = 0$ である事が明らかである．それはエネルギーは

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^\dagger(r) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2} - \frac{Ze^2}{r} \right] \psi(r) 4\pi r^2 dr \quad (\text{C.48})$$

で与えられ，遠心力に対応する項は常に斥力的である事によっている．ここで変分関数として $\psi(r) = Ne^{-\beta r}$ を取ってみよう．この時，規格化条件より， $N = \sqrt{\frac{\beta^3}{\pi}}$ である．これよりエネルギーを計算すると

$$E = 4\pi \frac{\beta^3}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta r} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{Ze^2}{r} \right] e^{-\beta r} r^2 dr = \frac{\hbar^2 \beta^2}{2m} - Ze^2 \beta$$

となる事から最低エネルギーは $E_0 = -\frac{mZ^2 e^4}{2\hbar^2}$ となり厳密解と一致している．これは波動関数の形を正しいものと同じに選んだ事によっている．一方，

もし波動関数を $\psi(r) = Ne^{-\frac{1}{2}\beta^2 r^2}$ と取ってみると

$$E = \frac{3\hbar^2\beta^2}{4m} - \frac{2Ze^2\beta}{\sqrt{\pi}} \quad (\text{C.49})$$

となる．この時，最低エネルギーは $E_0 = -\frac{4mZ^2e^4}{3\pi\hbar^2}$ となり，厳密解よりも少しだけ上に出ている．

● 変分法は何故良いか： 変分法によりエネルギーを求めると，予想以上に厳密解に近い値が得られるものである．それには，勿論理由がある．今，考えている Hamiltonian を H としてその厳密な固有関数を ψ_0 その固有値を E_0 としよう．この時，変分関数を $\psi = \psi_0 + \epsilon\psi_1$ とする．ここで， ψ_0 と ψ_1 は直交していると仮定する．すなわち， $\langle\psi_0|\psi_0\rangle = 0$ である．ここで，変分関数は ϵ だけ厳密な波動関数 ψ_0 からずれているとしよう．この時，エネルギー E は

$$E = \frac{\langle\psi_0 + \epsilon\psi_1|H|\psi_0 + \epsilon\psi_1\rangle}{\langle\psi_0 + \epsilon\psi_1|\psi_0 + \epsilon\psi_1\rangle} = E_0 + \epsilon^2 (\langle\psi_1|H|\psi_1\rangle - E_0) \quad (\text{C.50})$$

となり，厳密解のエネルギー固有値からのずれは ϵ^2 の大きさになっている．すなわち，波動関数が厳密解から ϵ だけずれていても，エネルギー固有値は ϵ^2 の大きさになり，かなり正しい答えを与えてくれると言う事である．

当然の事ではあるが，ここでコメントしておこう．それは ψ を本当に変分してしまうとどうなるかであるが，この時は実は Schrödinger 方程式を解く事と同じになるのである．式は簡単で， $E = \frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$ を考えて，これを変分する．すなわち，

$$\delta E = \frac{\langle\psi + \delta\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi + \delta\psi|\psi\rangle} - \frac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} = \frac{\langle\delta\psi|H\psi - E\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} + O[(\delta\psi)^2] = 0 \quad (\text{C.51})$$

よって，これは $H\psi - E\psi = 0$ を意味しており，Schrödinger 方程式を解く事に対応している．

C.5.5 WKB 法 (準古典近似)

Schrödinger 方程式は \hbar をゼロに持って行くことにより, 古典力学が得られる. この準古典近似の手法は簡単で, まず 1 次元 Schrödinger 方程式

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right) u(x) = Eu(x) \quad (\text{C.52})$$

を解く時, $u(x) = Ae^{\frac{i}{\hbar}S(x)}$ において $S(x)$ に対する方程式に書き直す. ここで, A は定数とする. また, S を \hbar でべき展開する

$$S = S_0 + \hbar S_1 + \hbar^2 S_2 + \dots \quad (\text{C.53})$$

このうち, S_0, S_1 だけを取る近似を WKB 法という. この時,

$$\left(\frac{dS_0}{dx}\right)^2 = 2m(E - V(x)) \quad (\text{C.54})$$

$$i \frac{d^2 S_0}{dx^2} - 2 \frac{dS_0}{dx} \frac{dS_1}{dx} = 0 \quad (\text{C.55})$$

であり, S_0, S_1 は解析的に解けてしまう. 例えば, $E < V(x)$ の時は

$$u(x) = \frac{A}{\sqrt{2m(V(x) - E)}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int^x \sqrt{2m(V(x') - E)} dx'} \quad (\text{C.56})$$

が解になっている.

C.5.6 Hamilton-Jacobi の方程式

Hamilton-Jacobi の方程式は作用を S とした時,

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0 \quad (\text{C.57})$$

である. ここで, $S = -Et + S_0$ を代入し, また運動量 p は $p = \frac{\partial S_0}{\partial x}$ と書ける事から

$$E = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2 + V(x) \quad (\text{C.58})$$

が求まり, これが時間に依存しない Hamilton-Jacobi の方程式である. この式は \hbar がゼロの時の WKB の方程式そのものであり, 確かに Schrödinger 方程式で \hbar をゼロに持って行くと古典力学の方程式が得られる事が分かる.

C.5.7 量子化とエルミート性

ポテンシャルが無い場合の 1 次元 Schrödinger 方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = E u(x) \quad (\text{C.59})$$

を $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$ の範囲に閉じ込めた場合を考える．基本的には自由粒子は箱に閉じ込めるしか今の所，上手く処理する方法はない．この一般解は

$$u(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (\text{C.60})$$

である．ここで，自由粒子は運動量の固有関数である必要があるので，この解が運動量の固有関数である事を要求すると $u(x)$ は

$$u(x) = A e^{ikx} \quad (\text{C.61})$$

となる．この時， $u(x)$ に対して周期的境界条件を課したとき， k に対する条件を求めると

$$k = \frac{2\pi}{L} n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{C.62})$$

となる．これが，最も自然な形の自由粒子の波動関数の解である．

● 量子化条件の式： 量子化条件の式は

$$\hat{p}x - x\hat{p} = -i\hbar \quad (\text{C.63})$$

である．この両辺を上で求めた状態

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i\frac{2\pi n}{L}x} \quad (\text{C.64})$$

で期待値をとると

$$\langle u_n | \hat{p}x - x\hat{p} | u_m \rangle = -i\hbar \delta_{nm} \quad (\text{C.65})$$

となり，この時，運動量演算子 \hat{p} のエルミート性を仮定すると

$$(n - m) \frac{2\pi\hbar}{L} \langle u_n | x | u_m \rangle = -i\hbar \delta_{nm} \quad (\text{C.66})$$

と求まる．この式は $n = m$ の時，明らかに矛盾している．この矛盾は運動量演算子 \hat{p} のエルミート性が周期的境界条件のもとでは一般的に使えない事によっているからである．

- 運動量演算子のエルミート性： 周期的境界条件を正しく使い，運動量演算子 \hat{p} のエルミート性を使わないで計算すると $n = m$ の時

$$\langle u_n | \hat{p} x | u_n \rangle = \langle u_n | x \hat{p} | u_n \rangle - i\hbar \quad (\text{C.67})$$

となり，何処にも矛盾がない事がわかる．ここで注意しておきたいのは，運動量演算子 \hat{p} 自身はエルミートである．すなわち，

$$\langle u_n | \hat{p} u_m \rangle = \langle \hat{p} u_n | u_m \rangle \quad (\text{C.68})$$

は確かに成り立っている．

この議論での教訓は微分演算子のエルミート性が一般的であるかどうかの問題である．すなわち，微分演算子に i を付ければ，その演算子をエルミートとして扱う事が出来るというのは，一般性がある事ではない．これは，波動関数が無限遠方で常にゼロであるという仮定の下に始めて成立する式である．従って，周期的境界条件を持っている波動関数に対しては，運動量演算子のエルミート性をアプリアリに仮定してはいけないという事である．

付録D 統計力学

統計力学に関してはそれ程ここで議論する事はない。大切な事は、統計力学では何が計算出来るのかをしっかりと理解する事である。基本的には統計力学における観測量は平均値 (アンサンブル・アベレージ) である。従って、どの分布関数で平均するのかと言う事だけが物理的な興味である。一般にはある物理系を考えた時に、その分配関数を計算する事がその主要目的である。すなわち、

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}, \quad \beta = \frac{1}{kT} \quad (\text{D.1})$$

を計算する事が基本的には最も重要である。ここで E_n は状態 n におけるエネルギー固有値である。従って、例えばエネルギーの平均は

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_n E_n e^{-\beta E_n}}{Z} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z \quad (\text{D.2})$$

となる事はすぐに計算できるものである。この事は、逆に言えば E_n がどのように計算されて求められているかと言う事が重要になる。そしてこれは量子力学のエネルギー固有値問題を解く事によって得られる事になっている。その意味では、統計力学という「力学」があるわけではない。これが統計力学に関して大半の学生が混乱する原因でもある。

D.1 スピンと統計

粒子のスピンが整数の場合、その統計はボーズ統計であるとどの教科書にも書いてあるし、自分もそれに対して疑いを持たなかった。しかしながら、最近のボーズ凝縮の話をおよび何かがおかしいと思い始めた。それはかなり重い原子のボーズ凝縮について議論しているからである。ボーズ凝縮の実験の話をおよそ信じられない事をボーズ凝縮の実験として議論されている。すなわち、重い原子系でその全体のスピンの時にボーズ凝縮が起こっていると言うものである。原子系の物性は電子の振る舞いにより決定されてい

る．原子核のスピンが影響する事はまずあり得ない．もしある原子系でボーズ凝縮が起こったと考えたならば，原子核の中性子を一つ増やしたアイソトープに関しても実験してみて，今度は全スピンの半整数だからボーズ凝縮が起こらないことを証明する必要がある．しかし，このような現象は現実離れしている．原子核のスピンにより原子系全体のスピンの半整数になったからと言って，系の統計が変わる事は考えられない．物質の性質は全て電子によって支配されている．原子核のスピンが影響するような現象は，余程強い磁場を系にかけたりしない限り現われる事はない．

実はスピンと統計の問題を調べてみると Feynman も不思議に思ったらしくて，電子の場合とフォトンの場合のスピンと統計は理解できるが，それ以外はわからないから教えて欲しいと言うようなコメントをしている．

D.1.1 フォトンとボーズ統計

一つはっきりわかっている事がある．それは光は確かにスピンの 1 であり，これはボーズ統計に属しているという事である．Planck の黒体輻射の公式もフォトンがボーズ粒子であると仮定して求められているし，実験的にもフォトンがボーズ統計に属するとして全く矛盾がない．しかしながら，基本粒子で整数スピンを持っているのはフォトンだけである．他のボーズ粒子と言っているのは全て複合粒子である．そうすると，一体ボーズ統計とは何かと言う基本的な疑問が出て来るのである．

D.1.2 フェルミ統計

実験的にはっきりわかっている事は，電子や核子などのフェルミオンは確かにフェルミ統計に属すると言う事である．これはパウリ原理として良く知られているし，実験的にも疑う所は全くない．Dirac 方程式から始まって，フェルミオン場を反交換関係で量子化するとこのパウリ原理はしっかり理解できるものである．むしろ，ここには理論と実験の矛盾はないし概念的にも理解していると思われる．

D.1.3 複合粒子のスピンと統計

それでは、原子の統計はどうであろうか？原子の全スピンが統計に影響するのであるか？これに対する理論的考察は皆無に近い。人々が疑う事無くスピンと統計をこれまでは信じてきた。問題ははっきりしていて、まだ信頼できる実験が何処にも無いと言う事である。理論模型を作るにしても、複合系を考える場合、それが複合系である事がわかるような現象は統計力学では処理できない。統計力学と言っても、ダイナミクスそのものを扱う事は出来なく、考えている粒子が持っている状態関数によって指定されるエネルギーを分布関数に入れて平均操作をする事が統計力学の本質である。従ってもし複合粒子の内部構造を考える必要があるような物理現象は統計力学では扱えないと言う事である。

例えば、重い原子系の「ボーズ凝縮」の実験を見る限り、これはただ単に、密度の高いミクロ系を作ったと言う事以上に物理的な意味はあり得ないのである。実験的にわかっている現象としては、 ^3He と ^4He の超流動の実験がある。この2つは質量が25%も違うので、その意味では2つの振る舞いに実験的な影響が出てきても不思議ではない。しかし、現実はそれ程大きな差は無く、この両者の全スピンの整数か半整数かによる違いは観測されていない。すなわち、基本的な物性は当然電子によって決められているのである。

D.2 磁気トラップ法

中性原子を磁場によりトラップできる方法がある。この磁気トラップ法の物理を簡単に解説したい。今、原子系全体のスピンを S としよう。ただし、これも簡単のために原子核のスピンはゼロとしよう。この時、電子のスピンの自由度のみが効いて来る場合を考えて、外部磁場 B を原子系にかけた時の Hamiltonian H は

$$H = \frac{P^2}{2M_A} - \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B} \quad (\text{D.3})$$

と書く事ができる。ここで M_A は原子系全体の質量である。また、 $\boldsymbol{\mu}$ は原子の磁気能率であり、

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{g e \boldsymbol{S}}{2m} \quad (\text{D.4})$$

と書かれていて、 g は g -因子である。この Hamiltonian は見てわかるように、Zeeman 効果を考慮した相互作用が入っているだけである。この相互作用で、何

故, 中性粒子をトラップ出来るのであろうか? 量子力学で示されている量はエネルギー分裂だけである. ここで, 今, 磁場を Z -方向に選び, $B = (0, 0, B_0)$ としよう. この時, 原子の最低エネルギー E は

$$E = \frac{\mathbf{P}^2}{2M_A} - \frac{geS}{2m}B_0 \quad (\text{D.5})$$

となる. ここでは, 原子の運動エネルギーの部分も省略しないで入れてある.

この段階では, 原子のトラップはとても考えられない事である. しかし, この Zeeman 分裂エネルギーは原子系の内部エネルギーを与えているが, 原子の重心に対する運動は, まだ何も言及していないのである. ここでレーザーを照射し続ける事により, この原子系の状態を Zeeman 分裂の一番上の量子状態に持って行く事が可能なのである. すなわち, Zeeman 分裂における最も高いエネルギー状態に原子を持って行き, その状態をキープする事である. そうすると, この系の古典力学系の Hamiltonian H_c は

$$H_c = \frac{\mathbf{P}^2}{2M_A} + \frac{geS}{2m}B_0 \quad (\text{D.6})$$

と書ける事になる. ここで, 磁場をうまく取って, $B_0 = aZ^2$ ($a > 0$) のような原点から Z -方向の正負の増加に対して磁場が増加するような磁場勾配が作れたとしよう. 但し, この座標 Z は原子の重心の座標を表している. この時, Hamiltonian H_c は

$$H_c = \frac{\mathbf{P}^2}{2M_A} + \frac{ageS}{2m}Z^2 \quad (\text{D.7})$$

と書け, この古典力学系は常に原点に向かって閉じ込められる力が働いている事になっている. すなわち, 原子はレーザーを照射される事により, 徐々にこの系の原点に向かって動いて行く事になっている.

D.2.1 レーザー冷却

ここで, レーザーを照射する時 Zeeman 分裂のエネルギーギャップよりも少し低いエネルギーのレーザーを照射する事にしよう. その場合, レーザーの方向に向かって来る原子はドップラー効果によりエネルギーを獲得して, このレーザーのエネルギーを吸収する事が出来る事になる. そのため, 原子が光を放出して基底状態に戻る時に, この少しの運動エネルギーを失う事になっており, この事を繰り返し行う事により, 少しずつ原子系全体の冷却になって行く

のである．これがレーザー冷却の本質であるが，非常に面白いアイデアである事は間違いない．しかし，原理は簡単でありドップラー効果を用いたという事である．

D.3 古典統計力学は物理的に意味があるか？

統計力学の教科書には，ほとんどの場合，古典統計力学という解説が出てくる．分配関数を求める時に，古典力学の位相空間で $e^{-\beta E}$ を積分する公式の事である．1次元の粒子を考える場合，

$$Z = N \int \int dx dp e^{-\beta H} \quad (\text{D.8})$$

と書く．ここで H は系の Hamiltonian であり， N は規格化定数である．これはしかしながら物理的には全く意味をなさない．それは明らかで，古典力学では Hamiltonian 自体は意味を持っていないからである．力学のところで議論したように，Hamilton 方程式を求めて始めて物理的に意味のある量が得られるのである．古典力学ではエネルギーは Newton 方程式を解いた場合の積分定数に対応している．と言う事は，エネルギーはダイナミクスで決まる量ではなく，外から手で入れて決める量である．そのような H を位相空間で積分しても勿論，物理的には全く意味のある物理は出て来ないのである．

D.3.1 調和振動子

これは調和振動子の場合を見ると良くわかる．ここで調和振動子の分配関数を計算しよう．但しダイナミクスは量子力学を使う．この時分配関数は

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \hbar \omega (n + \frac{1}{2})} = \frac{1}{2 \sinh(\frac{\beta \hbar \omega}{2})} \quad (\text{D.9})$$

となる事が容易に確かめられる．しかし，ここで明らかに古典力学の極限が無いのである．すなわち， $\hbar \rightarrow 0$ とすると無限大になってしまう．これは何を意味しているのであろうか？答えは明瞭で，古典統計力学は上手く定義できないと言う事を示している．

D.3.2 直感的理由

古典統計力学が定義できない事の直感的理由は何であろうか?きちんとした物理的な理由付けは今後の研究に任せて,直感的理由のみここで議論する事にしよう.分配関数により全ての計算が実行される統計力学では,状態和と言う事が非常に重要になる.ある粒子を考えたとしても,常にその状態を考えるとと言う事,すなわち常に場の理論的な発想が重要であると言う事である.一方,古典力学では,状態と言う概念が存在しない.そこでは常に粒子の軌道を考えている.すなわち,古典力学では系の時間発展のみが物理量に関係するのである.従って,古典力学で統計的な考え方を導入する事が始めから不可能であったと言う事である.この事は,やはり古典力学が基本方程式ではなく,量子力学から求められるものであると言う事と密接に関係している.すなわち,古典力学は量子力学の近似式として理解されるべきであると言う事である.従って,場の概念で全ての基本的な物理は理解して行く事が重要である事を意味していて,統計力学は最初に近似した古典力学では定義できない事に対応している.

物理では,近似をする段階が重要になる事が良く起こるものである.基本的には,近似はなるべく遅い段階ですべきであると言う事である.方程式の早い段階で近似をしてしまい,その近似された式を使うと良く間違えるのである.例えば,量子力学でミニマル変換により Zeeman 効果の相互作用 Hamiltonian を導出する時,Dirac 方程式の段階でミニマル変換をする事と,近似をした Schrödinger 方程式でミニマル変換をするのでは答えが違うのである.勿論,Dirac 方程式の段階でミニマル変換をした式が正しく,この場合スピンの依存した Zeeman 効果を与える Hamiltonian が求められるのである.しかしながら,最初に近似して Schrödinger 方程式でミニマル変換をしてもスピンによる項は出てこないのである.

付録E 量子場の理論

新しい量子重力を理解してもらうためには、どうしても基礎的な場の理論を解説しておく必要がある。ここでは直感的にわかりやすい場の理論を簡潔に解説したい。ある程度高度の数学を使わざるを得ないが、しかしながらこの本を理解するためには、全ての数学を追ってゆく必要は無い。その意味で、出来る限り直感的な描像が取れるように解説して行きたいが、しかし、ある程度、結果優先の記述になる事は避けられないかも知れない。従って、詳細を知りたい場合は拙著の教科書を読んで頂く事にしよう。

E.1 経路積分の問題点

この30年近く、多くの物理屋が経路積分による数値計算を実行してきた。まことに残念ながら、この経路積分による計算は物理的にほとんどは意味のない量を計算した事になっている。何故、この様な事が起こってしまったのであろうか？これには恐らくは様々な要因があるものと考えられるが、数学の形式が先走ってしまい、物理の内容を吟味する事を怠った事が最大の原因であろうと思われる。しかし、現実問題として研究者に与えた影響と言う観点からすれば、Wilsonの「Wilson ループによるクォークの閉じ込め」の論文が最も大きな要因である事は間違いあるまいと思われる。しかし、いつも言う事であるが、これは勿論Wilsonの責任ではない。彼は当然正しいと信じて計算したわけであり、問題はその後我々物理研究者がしっかりチェックをしなかった事であり、容易に追従した事こそが最も重要な問題点である。

E.1.1 QEDでのWilsonのクォーク閉じ込め

Wilsonが「Wilson ループによるクォークの閉じ込め」の論文を発表したのは1974年である。この論文で確かにWilsonはクォークの閉じ込めを議論しているのであるが、しかしこの時に彼が計算した場の理論のモデルは、実は量

子電磁力学 (QED) なのである。この QED の計算にもかかわらず、クォークの線形閉じ込めを「証明」してしまい、おまけにこの論文が高い評価を得てしまったのである。直感的に言っても、QED で閉じ込めてしまったらこれは物理的におかしいと思うべきなのに、どういうわけかこの論文が人々に受け入れられてしまったのである。

この Wilson による閉じ込めの計算は経路積分を用いているが、この計算の基本的な誤りの原因は、たとえそれが QED である事をよしとしても、その他にまだ二つある。一つは、模型計算において、近似をする段階の問題と関係している。近似はなるべく遅い段階でしないと良く間違えるものである。彼の場合、計算したい物理量を格子化して実行するのであるが、彼の提唱した Lagrangian 密度はその段階で連続極限を取れば確かに QED の作用になる事は確かめる事ができるのである。しかし、連続極限を取らないでそのまま先に積分を実行すると間違った計算になってしまうのである。すなわち、彼は連続場の理論の模型ではなく、全く仮想的な模型計算をした事に対応しているのである。一方、Wilson のもう一つの間違いはもっと深刻である。それは、場の理論における経路積分の定式化そのものに関する問題である。後で解説するように、経路積分における場の量子化は、場による積分では場を量子化する事が出来ないのである。この事は、実は Feynman は正しい定式化を行っており、彼のシリーズの論文では、場の経路積分の定式化として、場を自由粒子の状態を展開した時の展開係数による多重積分としており、場による多重積分などしていないのである。パラメータ空間での経路積分は QED の Hamiltonian がそのパラメータにおいて調和振動子となっているので、量子力学の場合と同じで、確かに量子化できるのである。このように、Feynman の原論文を読む限り、経路積分による定式化は十分正しく行われていると思われるが、しかし一つわからない事もある。この Wilson の論文の中で、最後に彼は Feynman への謝辞を書いている。これは Feynman が Wilson の論文を読んでいる事を意味している。Feynman はこの Wilson の論文をどう評価したのであろうか？この事はしかし物理上で興味ある問題ではないので、これ以上の言及はやめにしよう。

いずれにしても、経路積分の手法に対して、何故このような間違いが一般に流布されたのであろうか？その科学史的なところはわからないが、恐らく最初に間違えた定式化を行ったのは、Fadeyev-Popov の論文である。彼らがこの間違った経路積分により、量子色力学 (QCD) の繰り込み可能性を証明してしまったために、QCD の理解は随分遅れてしまった事になっている。この本では詳しい議論はしないで、簡略にその問題点を述べるにとどめるが、基本的には、QCD は摂動論が定義できなくそのため繰り込み以前の問題であるという事で

ある．さらに言えば，QCD の経路積分ではもし正しくパラメータ空間での経路積分にしたら，調和振動子にはなっていないくそのパラメータの 4 乗になっているので，Gauss 積分が出来なく計算自体が不可能であったのである．この事は，QCD が摂動的に計算できないという事と密接に関係しているが，詳細は教科書を参照して貰う事にしよう．

いずれにしても，経路積分における計算ではかなり注意深く実行する必要があり，特に経路積分において Fock 空間をどのように定義したら良いのかと言った基本的な問題はまだ解決されていない．たとえ Feynman による正しい定式化を採用しても問題は残っており，今後の課題である．

E.1.2 量子力学における経路積分

量子力学における経路積分は量子力学的なある振幅を座標を分割した中間状態をいれて，その状態で積分して，微分方程式を解かないで多重積分に持っていった定式化である．ここでは 1 次元系を考えよう．今，振幅 $K(x, x' : t)$ を

$$K(x, x' : t) = \langle x' | e^{-iHt} | x \rangle \quad (\text{E.1})$$

で定義する．ここで H は系の Hamiltonian を表す．これはある時刻における質点の x から x' への伝播を表している．ここで Hamiltonian を

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(x) = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) \quad (\text{E.2})$$

の形に仮定する．実は，経路積分で最も重要な点は運動エネルギーの形である． p^2 に比例している事が本質的である．ここで， t と $x - x'$ を n 分割して中間状態に $|x_n\rangle\langle x_n|$ を入れて多重積分にすると

$$K(x', x : t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1} \times \\ \langle x' | e^{-iH\Delta t} | x_{n-1} \rangle \langle x_{n-1} | e^{-iH\Delta t} | x_{n-2} \rangle \cdots \langle x_1 | e^{-iH\Delta t} | x \rangle$$

と書けて，さらに上式を書き直すと

$$K(x', x : t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2i\pi\Delta t} \right)^{\frac{n}{2}} \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1} \exp \left\{ i \sum_{k=1}^n \left(\frac{m(x_k - x_{k-1})^2}{2\Delta t} - U(x_k)\Delta t \right) \right\}$$

の形が得られる．但し， $\Delta t = \frac{t}{n}$ である．この式をシンボリックに

$$K(x', x : t) = \mathcal{N} \int [\mathcal{D}x] \exp \left\{ i \int_0^t \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x) \right) dt \right\} \quad (\text{E.3})$$

と書くことが一般的である．但し， $\mathcal{N} \int [\mathcal{D}x]$ は

$$\mathcal{N} \int [\mathcal{D}x] \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2i\pi\Delta t} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1} \quad (\text{E.4})$$

と定義されている．これが経路積分の書き直した結果の全てであり，ここまでは数学の変形だけだから，恐らくは問題ないと思われる．しかしながら，ここで右辺を古典力学の Lagrangian であると主張し始めると話が混乱する．それは量子力学では時間と空間座標が独立であり，どのようにしても右辺を速度と解釈する事は出来ないからである．ただし，逆の事は言える．すなわち，古典力学の Lagrangian が

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x) \quad (\text{E.5})$$

で与えられた時，量子力学での振幅は上式で与えられると言う事である．

E.1.3 経路積分による調和振動子

この振幅 $K(x, x' : t)$ はまだ座標 x, x' に依っているので物理的な観測量には結びついてくれない． $x = x'$ にして， x の全空間で積分すれば，物理的な観測量に結びつく場合がある．良く知られているのは調和振動子の場合 $U(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ であり，

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx K(x, x : t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iE_n t} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{\frac{m\omega}{2i\pi \sin \omega t}} e^{-im\omega x^2 \tan \frac{\omega t}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-i\omega t(n+\frac{1}{2})}$$

である事から，調和振動子のエネルギー固有値が求められる．しかしながら，この手法は恐らくは，調和振動子の特殊性によるものと考えられる．それは境界条件を付ける事なしに解けているからである．調和振動子は特殊であり，散乱状態が存在していないと言う事から，経路積分でも解けたものと考えられる．

E.1.4 経路積分の限界

経路積分の良い点は Schrödinger 方程式を解く事なしに、多重積分により振幅が求められるという点である。どちらが簡単であるかは別にして、微分方程式を解かないで振幅が計算されたという事実は面白いと思われる。しかしながら、経路積分は一般的に常に量子力学と同じになっているのであろうか？これは上式を見て良く考えて見るとわかる事であるが、経路積分は運動エネルギーの部分が運動量の関数として p^2 と書けている事が本質的である。従って、運動エネルギーが運動量の関数として p^2 ではない場合、例えば Dirac 方程式の場合は経路積分の言葉で書く事は出来ない。この事は Dirac 方程式が古典論の極限を持っていない事と一致している。この事実が意味している事は物理的に重要である。経路積分により振幅を多重積分で書き直した事は一般性があるわけではなく、非相対論の場合の特殊性であるという事である。さらに、多重積分への書き直しは単に数学的な要請からだけであり、物理的な意味はない。実際、経路積分を古典論の軌道の積分と解説する教科書が見られるものがあるが、これは勿論間違いである。一方、一部のしっかりした教科書では、経路積分は古典力学の軌道を足しあげる事とは関係ない事が書いてはある。

これまで見て来て明らかなように、経路積分による利点はほとんど無いと言って良い。それでは何故人々が経路積分を使った計算をやりたがるのであろうか？それは、場の理論における場の経路積分の方法により、他の方法では出来ない事が計算できるという錯覚があったからである。実際には、一つの方法では出来て、他の方法では出来ない計算などは、あり得ない事である。

いかなる理論模型を発展させても、その時に最も重要な事は物理的な観測量の計算である事は明らかである。しかし、この経路積分の方法は、それよりも Feynman グラフの計算手法が簡単に解説できるという事が主な利点であった。しかしながら、場の理論に経路積分を応用した時に間違った定式化が行われてしまい、その手法により QCD の繰り込み理論が議論されてまた実際それが人々に受け入れられてしまったために、極めて深刻な状態に陥ってしまったのである。この辺の歴史的な事情に関しては、科学史に任せる事にして、また詳しい議論は教科書を参照してもらいたい。

E.1.5 場の理論における経路積分

場の理論における経路積分とは何であるか？これは場の量子化と関係している．量子力学も場の理論であり，電磁場とその意味では差があるわけではない．しかし，電磁場の場合，光子ができたり消えたりする物理的な過程が存在しているのである．これは，どうしても場を量子化するしか他にしようがないのである．従って，どうしても場の量子化とは何かについて，議論する必要がある．

E.1.6 場の理論における Feynman の経路積分

Feynman は場の量子化も経路積分で出来ると考えて，その定式化を行っている．しかし，彼はその手法が特に新しいものではない事をよく認識していたのではないかと考えられる．恐らく，基本的な出発点は電磁場の Hamiltonian にあったと思われる．電磁場の Hamiltonian は

$$H_{el} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} (p_{\mathbf{k}, \lambda}^2 + k^2 q_{\mathbf{k}, \lambda}^2) \quad (\text{E.6})$$

と書かれていて， $p_{\mathbf{k}, \lambda}$ は $q_{\mathbf{k}, \lambda}$ に対するパラメータ空間での運動量に対応していると考えて良い．この時，ベクトルポテンシャル $A(x)$ は

$$A(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \frac{\epsilon(\mathbf{k}, \lambda)}{\sqrt{V} \omega_{\mathbf{k}}} [\dot{q}_{\mathbf{k}, \lambda} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \omega_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}, \lambda} \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad (\text{E.7})$$

と書けている．この時，Feynman は振幅 $K(q_{\mathbf{k}, \lambda}, q'_{\mathbf{k}, \lambda}, t)$ を

$$K(q_{\mathbf{k}, \lambda}, q'_{\mathbf{k}, \lambda}, t) \equiv \mathcal{N} \int [\mathcal{D}q_{\mathbf{k}, \lambda}] \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_0^t \sum_{\mathbf{k}, \lambda} (\dot{q}_{\mathbf{k}, \lambda}^2 - k^2 q_{\mathbf{k}, \lambda}^2) dt \right\} \quad (\text{E.8})$$

と定義した．これは，パラメータ空間での変数 $q_{\mathbf{k}, \lambda}$ の量子化に対応している．従って，これは $c_{\mathbf{k}, \lambda}$ と $c_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger$ の量子化に対応しているのであった．この事より，確かにパラメータ空間での経路積分は電磁場の量子化に成功していると考えられる．これは電磁場の Hamiltonian がパラメータ空間で調和振動子であった事に強く依存している．

E.2 電磁場の Lagrangian 密度

自由電磁場の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (\text{E.9})$$

で与えられる．ここで A^μ はゲージ場であり， $F^{\mu\nu}$ は場の強さと呼ばれるもので

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (\text{E.10})$$

と書けている．この $F^{\mu\nu}$ を具体的に書くと

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.11})$$

となっていて，これは電場と磁場を表している．これは当然で， $F^{\mu\nu}$ はゲージ不変でありゲージ不変な物理量は電場と磁場であるからである．ゲージ場に対する方程式は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (\text{E.12})$$

この式は4個あるように見えるが，実際には独立な式は3個である．それは明らかで，

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (\text{E.13})$$

が恒等的に成り立つからである．そうすると，未知変数は A^0, A^1, A^2, A^3 の4個であるから，方程式の数が1個足りないことになる．この事がゲージ自由度があるという事と関係している． A^μ には任意性があるのである．すなわち，この方程式だけからでは A^μ を決める事は出来ないという事である．そのため，ゲージ固定する必要がある．大切な事は，ゲージ固定して A^μ を決定した時に物理的な観測量である電場と磁場がきちんと求まっている事である．

しかし，第5章で議論しているようにまだもう一つ条件が足りていない．それは運動方程式を解いていないからである．自由場 $A^\mu(x)$ の解

$$A^\mu(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \epsilon^\mu(k, \lambda) \left[c_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ikx} + c_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{ikx} \right] \quad (\text{E.14})$$

を運動方程式に代入すると

$$k_\mu \epsilon^\mu - (k \cdot \epsilon) k^\mu = 0 \quad (\text{E.15})$$

と言う式が求まる．ここで ϵ^μ がゼロでない意味のある解が求められると言う条件より，Lorentz 条件 $k_\mu \epsilon^\mu = 0$ が求まっている．

E.2.1 電磁場の量子化

電磁場の量子化は実験から始まっている．最も単純なところでは，水素原子における $2p_{\frac{1}{2}}$ から $1s_{\frac{1}{2}}$ 状態への遷移の際放出される光の問題がある． $2p_{\frac{1}{2}}$ の状態では電磁場の状態は真空であったのに， $1s_{\frac{1}{2}}$ 状態では 1 個フォトンが生成されている．これは通常の電磁場の理論では理解できない．そこで考案されたのが「場の量子化」である．何故量子化と呼ばれるのかと言うと，それは場をオペレータで書くからである．ゲージ場の量子化を式で書くと

$$A(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) [c_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ikx} + c_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{ikx}] \quad (\text{E.16})$$

となり，ここで $\omega_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$ である．また， $\epsilon(\mathbf{k}, \lambda)$ は偏極ベクトルで

$$\epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \epsilon(\mathbf{k}, \lambda') = \delta_{\lambda,\lambda'} \quad (\text{E.17})$$

を満たしている．量子化とは展開係数 $c_{\mathbf{k},\lambda}$ と $c_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger$ に対して

$$[c_{\mathbf{k},\lambda}, c_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'} \quad (\text{E.18})$$

の関係式を仮定する事である．この時，展開係数 $c_{\mathbf{k},\lambda}$ と $c_{\mathbf{k},\lambda'}^\dagger$ はもはや単なる数ではなくて，オペレータになっている．このため，このオペレータが作用する空間を定義する必要があり，それを Fock 空間と呼んでいる．式で書くと，

$$c_{\mathbf{k},\lambda}|0\rangle = 0 \quad (\text{E.19})$$

を満たす $|0\rangle$ を真空という．従って，この真空に $c_{\mathbf{k},\lambda'}^\dagger$ をオペレートすると，

$$c_{\mathbf{k},\lambda'}^\dagger|0\rangle = |\mathbf{k}, \lambda\rangle \quad (\text{E.20})$$

となり，これは運動量 \mathbf{k} ，偏極 λ をもつフォトンの状態が生成された事を意味している．電磁場の量子化に関してはこれが全てである．それ以上の理論的なことはまだ良くわからない．しかし，この手法で現在までのところ，全ての実験と矛盾はしていない．

E.3 Dirac 場の Lagrangian 密度

質量 m を持つ質点に対する自由 Dirac 場の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi = \psi_i^\dagger[\gamma_0(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)]_{ij}\psi_j \quad (\text{E.21})$$

で与えられる．ここで

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r}, t) \\ \psi_2(\mathbf{r}, t) \\ \psi_3(\mathbf{r}, t) \\ \psi_4(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}$$

$$\psi^\dagger(\mathbf{r}, t) = (\psi_1^\dagger(\mathbf{r}, t) \quad \psi_2^\dagger(\mathbf{r}, t) \quad \psi_3^\dagger(\mathbf{r}, t) \quad \psi_4^\dagger(\mathbf{r}, t))$$

であり，また $\bar{\psi}$ は $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma_0$ と定義されている．この時，質量 m を持つ自由なフェルミオンの Dirac 方程式は

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} - m\beta\right)\psi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{E.22})$$

と書かれている．

E.3.1 Dirac 場の量子化

Dirac 場の量子化は電子と陽電子対が生成される事も勿論実験的な要請の一つであるが，実はそれ以上に重要な実験的な要請がある．それはパウリ原理である．電子は一つの状態に 1 個しか入れない．この実験事実を説明するには，Dirac 方程式だけでは不十分である．このため，Dirac 場を反交換関係式で量子化する事がどうしても必要になる．場の量子化の仕方は基本的には電磁場と同じである．まず，フェルミオン場 ψ を自由場の解で展開する．

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{n}, s} \frac{1}{\sqrt{L^3}} \left(a_{\mathbf{n}}^{(s)} u_{\mathbf{n}}^{(s)} e^{i\mathbf{p}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} - iE_{\mathbf{n}} t} + b_{\mathbf{n}}^{(s)} v_{\mathbf{n}}^{(s)} e^{i\mathbf{p}_{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} + iE_{\mathbf{n}} t} \right) \quad (\text{E.23})$$

ここで $u_{\mathbf{n}}^{(s)}$ と $v_{\mathbf{n}}^{(s)}$ は自由 Dirac 方程式のスピンル解であり

$$u_{\mathbf{n}}^{(s)} = \sqrt{\frac{E_{\mathbf{n}} + m}{2E_{\mathbf{n}}}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{n}}}{E_{\mathbf{n}} + m} \chi_s \end{pmatrix}$$

$$v_{\mathbf{n}}^{(s)} = \sqrt{\frac{E_{\mathbf{n}} + m}{2E_{\mathbf{n}}}} \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{n}}}{E_{\mathbf{n}} + m} \chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix}$$

と与えられている．さらに

$$\mathbf{p}_n = \frac{2\pi}{L}\mathbf{n}, \quad E_n = \sqrt{\mathbf{p}_n^2 + m^2} \quad (\text{E.24})$$

を満たしている．また， χ_s はスピンの固有関数を表し， s は $s = \pm\frac{1}{2}$ である．ここで，Dirac 場の量子化は

$$\{a_n^{(s)}, a_{n'}^{\dagger(s')}\} = \delta_{s,s'}\delta_{\mathbf{n},\mathbf{n}'}, \quad \{b_n^{(s)}, b_{n'}^{\dagger(s')}\} = \delta_{s,s'}\delta_{\mathbf{n},\mathbf{n}'} \quad (\text{E.25})$$

および

$$\{a_n^{(s)}, a_{n'}^{(s')}\} = 0, \quad \{b_n^{(s)}, b_{n'}^{(s')}\} = 0, \quad \{a_n^{(s)}, b_{n'}^{(s')}\} = 0 \quad (\text{E.26})$$

によって行われている．この最後の反交換関係式により，パウリ原理が満たされる事は容易に確かめられる．ここでの場の量子化は，負のエネルギー状態をそのまま使ったものになっている．摂動論で計算を実行する場合，反粒子描像で計算した方が便利である場合が多い．勿論，どちらで計算しても，観測量は同じように得られる事に変わりはない．

E.4 量子重力場の理論

重力場自体はこれまで実験的にも良く知られて来ている．質量 m_1 と質量 m_2 がある時，いかなる場合でも2つの質点間に必ず引力が働く．これは実験事実である．これまでのどの観測をみても，例外は無く常に引力である．しかも，その質点間の引力 $V(r)$ は

$$V(r) = -G \frac{m_1 m_2}{r} \quad (\text{E.27})$$

と書ける事もわかっている．しかしながら，この力を生み出す「場」が何者かがわかっていないのである．ある意味で，わかる前に一般相対論の方に人々の興味が移ってしまったと言った方が良いのであろう．それでは，どのような場がその力をつかさどるのであろうか？

E.4.1 量子重力場の Lagrangian 密度

この問題を解決しているのが，これから議論する Lagrangian 密度である．新しい量子重力場の理論の Lagrangian 密度は重力場を \mathcal{G} とすると

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - m(1 + g\mathcal{G})\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\nu\mu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\mathcal{G}\partial^\mu\mathcal{G} \quad (\text{E.28})$$

書く事ができる．この重力場 \mathcal{G} はスカラー場であると仮定している．これはスカラー場による相互作用が常に引力になる事がわかっているからである．スカラー場であるために，Lagrangian 密度の相互作用項として，その質量項の中に入れる事が出来て，重力が常にその質点の質量に比例するという実験結果と整合性のある理論を作る事が出来ているのである．この相互作用の形を考えた人は恐らくこれまで非常に沢山いるものと思われる．

それでは，何故，この相互作用の形式が人々に受け入れられなかったのであろうか？それは，繰り込み理論と関係している．これまで長い間人々はゲージ理論のみが繰り込み可能であると思いついてきたのであり，それ以外の理論は繰り込み可能性を証明できないから理論としては不十分であると信じていたのである．このゲージ理論に対する必要以上の「評価」が何処から来ているのかと言う点も，今となっては明らかになっている．ゲージ理論への「信奉」は，基本的には繰り込み理論が持っていた問題点を回避する唯一の手法がゲージ条件であると人々が考えたからである．QED の繰り込み理論は，その理論の複雑さにもかかわらず，Lamb シフトの実験値にしても電子の異常磁気能率

の実験値にしてもかなりの精度で再現出来ていると思われている．しかしながら，Lamb シフトの計算には依然として Log 発散がありこれを消去できていないし，また繰り込み理論による $g - 2$ の計算は間違っている事が知られている．Feynman の伝播関数を使い，観測量に Log 発散が現れているのである．現在の繰り込み理論では，観測量の計算に奇妙な発散が見られるのはゲージ理論のみである事がわかっている．

E.4.2 量子重力の運動方程式

Lagrangian 密度が得られるとそれから運動方程式が計算できる．Dirac 方程式は

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - e\gamma^\mu A_\mu \psi - m(1 + g\mathcal{G})\psi = 0 \quad (\text{E.29})$$

となり，重力場に対する運動方程式は

$$\partial_\mu \partial^\mu \mathcal{G} = -mg\bar{\psi}\psi \quad (\text{E.30})$$

となる．この重力場に対して，静的近似をする

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_0(\mathbf{r}) + \bar{\mathcal{G}}(x) \quad (\text{E.31})$$

ここで， $\mathcal{G}_0(\mathbf{r})$ は時間には依らないと仮定している．この場合， $\mathcal{G}_0(\mathbf{r})$ に対する方程式は

$$\nabla^2 \mathcal{G}_0 = mg\rho_g \quad (\text{E.32})$$

となり，これは重力に対する Poisson 型方程式である．ここで ρ_g は時間に依らない密度を表している．この場合，重力エネルギー H_G^S は

$$H_G^S = mg \int \rho_g \mathcal{G}_0 d^3r + \frac{1}{2} \int (\nabla \mathcal{G}_0)^2 d^3r = -\frac{m^2 G_0}{2} \int \frac{\rho_g(\mathbf{r}') \rho_g(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d^3r d^3r' \quad (\text{E.33})$$

となる．これは，勿論よく見慣れた方程式であり，常に引力であるし，またそれぞれの質量に比例している．

E.4.3 重力場の量子化

ここで極めて難しい問題に遭遇する．この重力場は量子化すべきであろうかという事である．これまで繰り返し述べてきたように，場の量子化は現在ま

での所，実験を記述するために導入したが，その物理的な本質は今ひとつ明解とは言えない．はっきりしている事は，電磁場とフェルミオン場はそれぞれ交換関係と反交換関係で場の量子化を行うべきであるという事である．しかし，重力場に対しては，実験的な要請はない．理論的にも重力場を量子化する必要性は全くないのである．

重力場の量子化を行わないとどうなるかと言えば，静的な重力場がフェルミオン間に存在して，これまでの実験的な観測事実と全く矛盾しなく，逆に言えばそれだけである．実際，実験的に重力子が見つかっていない限り，重力場の量子化は不要である．

さらに言えば，繰り込み理論の立場からすると，重力場は量子化しない方が正常であることがわかっている．量子電磁力学に関しては，繰り込み理論が非常に重要な理論体系になっていた．しかしながら最近の研究によって，すべての量子場の理論において観測量に対しての無限大は存在しないことが計算によって確かめられている．従って，重力理論に対しても当然，繰り込みは不要であり，重力場も古典場として扱う事が正しい理論な方法である事がわかっている．

付録F 原子力事故の検証

原子核物理学の専門家として原子力事故を検証する事は非常に重要である。原子炉はすでに工学的な応用が主力であり、サイエンスとしての問題点は見受けられないように思われるし、これまで自分もそう信じて来た。しかしながら、1999年に起こったJCOの臨界事故では核分裂反応が直径45 cm、高さ30 cm程度の小さな空間で現実に起こったものであり、原子核物理の立場から注意深い検証を行う必要がある。実際、硝酸ウラニル溶液を沈殿槽に移している際、それが45 l程度になった時に突然、臨界状態になったという事であるが、この事故は原子核物理学から見てもそれ程単純な現象とは思われないのである。従って、原子核の核分裂反応を一つ一つ吟味して何故この事故が起こってしまったのかの原因を原子核物理学の事例として調べ検証する事は重要な事であると考えたので、その解析結果を解説する。

F.1 JCOの事故

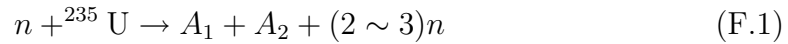
まずJCO作業員が硝酸ウラニル溶液を作り、それを沈殿槽に移す過程を説明しよう。以下の作業過程を1バッチと呼ぶ

- (1) ステンレス容器に8酸化3ウラン (U_3O_8) 2.4 kg, 硝酸 1.7 l を加える
- (2) 全容量が6.5 lになるように純水を加える

この硝酸ウラニル溶液を沈殿槽(直径45 cm, 高さ60 cm)に移してゆく。そして、7バッチ目を注入した時に青い光(チェレンコフ光)が見えたために、臨界状態が起こったと判断された。実際、2人の作業員は重度の中性子被爆被害を受けている。

F.2 核分裂の連鎖反応

ウランなどの重い原子核では中性子を吸収して核分裂する事が実験的に知られている。式で書くと



となる。ここで A_1, A_2 は核分裂でできた新しい原子核をあらわしている。この反応で重要な事が2つある。一つ目は必ず2個か3個の中性子が生成されるという事であり、2つ目はこの核分裂が起こる確率は吸われる中性子のエネルギーがほとんどゼロの場合に最も大きいという実験事実である。

連鎖反応とはこの生成された2個か3個の中性子が再び他の ${}^{235}\text{U}$ に吸われて核分裂反応を起すという現象を言っている。そしてこの核分裂連鎖反応が継続して起こっている状態を臨界という。

通常の原子炉では ${}^{235}\text{U}$ の濃縮度は3~5%と言われているが、ここで使用されたウランは ${}^{235}\text{U}$ が18.8%ある中濃縮ウランである。ちなみに、この濃縮度が90%以上になったものが原子爆弾に利用されている。

F.3 何故、臨界になったのか？

それでは50ℓにも満たない沈殿槽内部で、何故、臨界状態が生じたのであろうか？以下にその主要原因を明らかにして行こう。

F.3.1 最初の中性子源

核分裂の連鎖反応が起こるためには中性子源が必要である。中性子の寿命はせいぜい15分なので、自然界にそのまま存在しているわけではない。このJCOの事故の場合、中性子源は ${}^{238}\text{U}$ の自発核分裂による中性子である。この ${}^{238}\text{U}$ の寿命は約45億年であり、また自発核分裂の割合が 5.45×10^{-7} である。この事を用いると1gの ${}^{238}\text{U}$ が自発核分裂する回数は約0.01回となる。従って1バッチ中では ${}^{238}\text{U}$ が約1.6kg含まれており、1回の自然核分裂で放出される中性子数が1~2であると考えられるので ${}^{238}\text{U}$ は1バッチ中で毎秒、約20個程度の中性子を放出している。

F.3.2 $n-^{235}\text{U}$ 核分裂の平均自由行程（即発中性子）

中性子がウラニル溶液中で ^{235}U と核分裂反応を起こす平均自由行程 (mean free path λ) は

$$\lambda = \frac{1}{\rho\sigma_f} \quad (\text{F.2})$$

と書く事ができる．この平均自由行程の式の導出は Glauber 理論によっている．ここで ρ は ^{235}U の数密度を表し， σ_f は中性子と ^{235}U の核分裂断面積を表している．ここで1バッチ中の ^{235}U の数密度は $\rho \simeq 1.5 \times 10^{20} \text{cm}^{-3}$ である．一方，中性子と ^{235}U の核分裂断面積 σ_f は入射中性子のエネルギーに強く依存している．実験から，核分裂断面積 σ_f の E_n 依存性は

$$\sigma_f \simeq \begin{cases} 1 \text{ b} & : E_n = 1 \text{ MeV} \\ 585 \text{ b} & : E_n = 0.025 \text{ eV} \end{cases} \quad (\text{F.3})$$

となっている．但し $1\text{b} = 10^{-24} \text{cm}^2$ である．

● 即発中性子の核分裂平均自由行程： 核分裂で放出される中性子（即発中性子）の平均エネルギーは約 1 MeV である事が実験からわかっているので，即発中性子による核分裂の平均自由行程 λ_f は直ぐに計算できて

$$\lambda_f = \frac{1}{\rho\sigma_f} \simeq 67 \text{ m} \quad (\text{F.4})$$

である事がわかる．この平均自由行程は非常に長くこれでは明らかに臨界にはならない．それではどうして臨界状態になり得たのであろうか？

F.3.3 中性子と水分子との衝突

核分裂断面積 σ_f が大きいのは中性子のエネルギーが熱中性子程度に小さい場合である．即ち，中性子がウラニル溶液中でエネルギーを失う場合があれば核分裂の平均自由行程は小さくなる．中性子が衝突によりエネルギーを失うためには，同じ大きさの粒子（ここでは陽子）との衝突を考えればよい．それは水分子中の水素原子の陽子である．中性子と陽子の散乱断面積は実験でわかっており，低エネルギーでは角度依存性がほとんど無い事が知られている．

● 中性子－水分子衝突によるエネルギー損失： 中性子が陽子と散乱すると1回の散乱で約半分のエネルギーを失う事が簡単にチェックできる．式で書くと

次のようになる．入射中性子のエネルギーとその運動量を E_n, p とし，陽子は静止状態とする．この時，散乱後の中性子のエネルギーとその運動量を E'_n, k とすると，エネルギーと運動量の保存則より

$$\frac{p^2}{2M} = \frac{k^2}{2M} + \frac{(p-k)^2}{2M} \quad (\text{F.5})$$

となる．これは直ぐに解けて

$$k = p \cos \theta \quad (\text{F.6})$$

と求まる．この断面積は s -波散乱がほとんどのため角度 θ に依らない事が実験でもわかっているので角度で平均すると

$$E'_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{p^2}{2M} \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} E_n \quad (\text{F.7})$$

となり，1回の散乱で中性子は約半分のエネルギーを失う事になっている．

● 中性子－水分子衝突の平均自由行程：ここで中性子が1バッチ中で陽子と散乱する場合の中性子の平均自由行程を計算しよう．1バッチ中の陽子の数密度は $\rho_p \simeq 4.9 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ である．低エネルギーでの中性子－陽子散乱断面積は実験で $\sigma_{np} \simeq 20 \text{ b}$ とわかっている．従って，中性子が1バッチ中で陽子と散乱する平均自由行程は

$$\lambda_p = \frac{1}{\rho_p \sigma_{np}} \simeq 1 \text{ cm} \quad (\text{F.8})$$

となる．この事よりこの溶液中において 1 MeV の即発中性子が約 25 cm 進むとそのエネルギーは $E'_n = 1 \text{ MeV} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{25} \simeq 0.03 \text{ eV}$ となる．但しこの 25 cm の距離は直線とは限らないが，確かにこの中性子は熱中性子そのものである．

F.3.4 $n-^{235}\text{U}$ 核分裂の平均自由行程（熱中性子）

この熱中性子が1バッチ中で核分裂をするための平均自由行程は簡単に計算できる．今の場合， $\sigma_f = 585 \text{ b}$ である事から

$$\lambda_f = \frac{1}{\rho \sigma_f} \simeq 11 \text{ cm} \quad (\text{F.9})$$

となる．これより 1 MeV の即発中性子が 25 cm 進んで熱中性子になり，これが 11 cm 進むと次の核分裂反応を起こす事になっている．40 ℓ のウラニル溶液を沈殿槽に入れた場合，直径が 45 cm で高さが 25 cm 程度になる事を考えると確かに沈殿槽内部で連鎖反応が急速に進む可能性が高い事を示している．

F.3.5 中性子の核反応時間

即発中性子が 36 cm 進むと核分裂反応が起こる事がわかったので、その中性子がこの距離を進むために要する時間を見積もる必要がある。核分裂反応自体は恐らくは 10^{-15} 秒程度と考えられるのでこれは無視しても十分である。

即発中性子の平均エネルギーは 1 MeV であり、この中性子が 1 cm 進むのに要する時間は $\tau_0 \simeq 7.6 \times 10^{-10}$ 秒である。その後、1 cm 進む毎にエネルギーが半分になるので、掛かる時間は $\sqrt{2}$ だけ増えてゆく。従って、25 cm 進むと全時間は $T_0 = (1 + \sqrt{2} + \dots + 2^{\frac{25}{2}})\tau_0 \simeq 15 \mu$ 秒と求まる。この後、熱中性子は 11 cm 進むのだが、この時のエネルギーは 0.03 eV である。従って、熱中性子が 11 cm 進む時間は $\tau_{th} \simeq 46 \mu$ 秒となる。これより、即発中性子が次の核分裂反応を起すまでの時間は $T_{tot} \simeq 61 \mu$ 秒となる。

F.4 臨界時の総エネルギー

この臨界状態での総エネルギーはどのくらいなのであろうか？この評価は非常に難しいが、大雑把な値を求めてみよう。まず、最初の仮定として、再利用される中性子数を $n_r = 1.001$ と取ってみよう。これは大変難しい所であるが、まずは試みとして計算するという事である。原子炉では勿論この値が $n_r = 1$ となるように調整している。ここで核分裂が何回起こったとすれば良いかが問題である。ここでは核分裂数が $N = 40000$ 回と仮定する。この時、核分裂が起こっていた時間は $T_f \simeq 2.4$ 秒であり、また核分裂総数は

$$N_{tot} = 1.001^{40000} \simeq 2.3 \times 10^{17} \quad (\text{F.10})$$

と求まる。最初に ^{238}U の自発核分裂による中性子数は 1 バッチでは約 20 個であったので、そのうち半分が利用されたとしよう。さらに 1 個の核分裂で約 200 MeV のエネルギーが解放されるのでこの場合の全エネルギーは $E_{tot} \simeq 4.6 \times 10^{26}$ eV となり、これは計算機シミュレーションで求められた値に近いものである。

F.5 臨界は何故止まったか？

これまで見たように、確かに JCO の事故では臨界に達して膨大な核エネルギーが放出された事がわかり、重大な中性子被爆が起こった事が良くわかるものである。しかしここで深刻な疑問にぶつかる。それは臨界は何故止まったのか？

と言う事である．単純に考える限り上記の連鎖反応を止めるには別の理由が必要である．それでは臨界は、何故、止まったのであろうか？何故 1 回のバーストで終了したのであろうか？

F.5.1 7 バッチ目の核分裂

この答は恐らくは以下のものであろう．それはウラン化合物は水や硝酸よりも相当に重いのでウランは秒単位の時間を経て沈殿槽の下方に沈殿するものと考えられる．この場合、恐らくは 20% 程度の体積内にウランは沈殿するものと仮定してもそれ程間違える事はないと思われる．従って、6 バッチ目を終了した段階ではウランは沈殿槽の下から 4.9 cm までに沈殿したと仮定しよう．つまりその上の 19.7 cm の所に水が存在していたと考えて良い．この場合の計算をした結果が

$$E_{tot} \simeq 4.6 \times 10^{26} \text{ eV} \simeq 7.4 \times 10^7 \text{ J} \quad (\text{F.11})$$

となったわけである．前述したように、この核分裂反応が継続した時間は全体で大雑把に言って

$$T_f \simeq 2.4 \text{ 秒} \quad (\text{F.12})$$

であったと計算されているが、これはウランが下方に落下する時間に対応しているものと考えられる．

同様な計算を 6 バッチ目に対しても実行した所、6 バッチ目の総エネルギーはこれよりも約 1000 倍小さいものであった．しかし小さいながらも 6 バッチ目でバーストはすでに起こっていたと考えられる．

いずれにせよ、臨界が止まった物理的な理由が確かにあったのである．ウランが下に落下してしまった段階では、下方にたまったウランの回りに水は無く、従って、核分裂が起こっても即発中性子がエネルギーを簡単には失う事が出来なく、それゆえ、もはや臨界には到底なり得ないと言う事である．

F.5.2 8 バッチ目の核分裂

これから先は、現実には起こった事ではないが、状況を考えれば起こったとしても不思議ではない、極めて深刻な問題を議論しよう．もし、8 バッチ目が投入されていたと仮定しよう．この場合ウランが関与する総数はウランが落下す

る時間（水の高さ）に比例するから大雑把に言って $\frac{22.9}{19.7}$ 倍だけ増える．よって

$$N = 40000 \times \frac{22.9}{19.7} \simeq 46500 \quad (\text{F.13})$$

となっている．従って核分裂総数は

$$N_{tot} = 1.001^{46500} \simeq 1.5 \times 10^{20} \quad (\text{F.14})$$

と求まり，その全エネルギーは $E_{tot} \simeq 3 \times 10^{29} \text{ eV}$ となっている．これは $E_{tot} \simeq 4.8 \times 10^{10} \text{ J}$ ，即ち 11 トンの TNT 火薬に相当するエネルギーである．この場合は明らかに中性子被爆だけでは済まされなかった事になる．チェルノブイリの事故が約 100 トンの TNT 火薬に相当すると言われているが，この 8 バッチ目のエネルギーの大きさから考えてみるとチェルノブイリの事故なみの被害になった可能性が否定できないものである．

F.5.3 核燃料濃縮度で事故は起こったか？

JCO の事故は現実には起こってしまったが，通常の核燃料の場合，このような事故が起こったかどうかを検証することは非常に重要である．実際問題としては，以下に見るように，この事故の主な原因が濃縮度にあった事がわかる．このことは重大な意味を持っていて，実はこの事故に関しては，科学者に責任が全くなかったとは言えないと思われる．少なくとも濃縮度の重要性をきちんと具体的な計算で示しておく必要があったことは明らかであろう．

● JCO 事故のウラン濃縮度と核分裂数： これまで議論してきたように JCO 事故のウラン濃縮度は 18.8% である．この場合，核分裂数は $N^{JCO} \simeq 40000$ と仮定されて計算されている．

● 核燃料のウラン濃縮度と核分裂数： 一方，通常の核燃料ではウラン濃縮度が 5% 以下のものが利用されている．濃縮度 5% とした場合，核分裂が起こる平均自由行程は $\lambda_f^{Reactor} \simeq 41.4 \text{ cm}$ である．一方，JCO 事故の場合， $\lambda_f^{JCO} \simeq 11 \text{ cm}$ であった．核分裂で生成された中性子が熱中性子になるための平均自由行程は $\lambda_{th-n} \simeq 25 \text{ cm}$ であった．従って，通常の核燃料を使った場合の核分裂数は大雑把に言って

$$N^{Reactor} \simeq 40000 \times \frac{\lambda_f^{JCO} + \lambda_{th-n}}{\lambda_f^{Reactor} + \lambda_{th-n}} \simeq 21687$$

となる．従って，臨界状態になったとした時の全核分裂総数は

$$N_{tot}^{Reactor} \simeq 1.001^{21687} \simeq 2.6 \times 10^9$$

となる．これは JCO の事故の場合の $N_{tot}^{JCO} \simeq 2.3 \times 10^{17}$ と比べると 8 桁近く小さい数になっている．エネルギーで書き直すと

$$\begin{aligned} JCO : \quad E_{tot}^{JCO} &\simeq 4.7 \times 10^{26} \text{ eV} \simeq 7.4 \times 10^7 \text{ J} \\ Reactor : \quad E_{tot}^{Reactor} &\simeq 5.2 \times 10^{18} \text{ eV} \simeq 0.8 \text{ J} \end{aligned}$$

となっている．これから見て明らかなように，通常の核燃料物質であったならば JCO の事故は起こらなかったのである．濃縮度がこれだけ大きな影響をするという事実を原子炉関係の専門家のみならず，原子核物理学者も十分な認識ができていなかったと思われる．今後，十分な注意とともに，さらにより正確な核分裂反応の研究が必要であると言えよう．

F.6 まとめ

原子核分裂を応用した原子炉は工学的にはかなり安全なものと考えられるし，実際，原子炉関係の事故はむしろ少ない方であると言ってよい．しかしながら，原子炉に関連する問題は原子核物理学として全て理解されているかと言うと，実はそうではない事がわかったという事である．福島原発事故は確かに原子炉そのものの事故というよりも電気系統が完全破壊された場合の事故と考えられている．しかしながら，使用済み核燃料があれば大量の放射線が放出されている事は明らかであり，この放射線による水蒸気破壊の事は良く知られていた事実でもある．この点でも放射性原子核の事を正確に知っている事が原子炉関係では非常に重要である．さらに，核分裂の理論自体もまだ十分理解されているとは到底言えないものである．実際，例えば熱中性子で ^{235}U は核分裂を起すが ^{238}U は起さないという実験事実さえも理論的にはこれまできちんとは理解できてはいなかったのである．これからしばらく(数十年)は原子炉が稼動するものと思われるが，その場合，原子核物理学の研究者はさらにより深くその周辺の物理を理解するべく努力する必要があると思われる．

付録 G 物理屋の数学公式

数学は言語と同じである．まずは覚えるべきことが沢山ある．しかし覚えただけでは駄目で，それが利用できる必要がある．物理でも常に色々な数学が出てくるが，物理学では数学は道具であり，利用する事が目的である．数学に対する物理屋の興味は数学者とは本質的に異なっている．我々物理屋は，例えばの話だが，複素積分によってポールをうまく取れば積分値が正しく求まると言う，その事だけで十分である．しかし数学者はそのような当たり前の事には興味を持っていない．彼らは複素平面で無限遠方でどのようにバックグラウンドがゼロに近づくかに関心があり，物理屋がどんなに頑張っても数学者に対抗できるはずがない．

物理屋にとっては数学の公式が正しい事が全てである．しかし，そうかといって数学の公式を丸呑みして覚えてしまって，それを使いこなせるかと言うと，実はなかなか難しいのである．それで，いくつかの数学の公式は，その証明を物理屋なりに理解しておいた方が得策である事が多い．ここでは，基本的に割合重要な公式の解説をしておきたい．但し，証明として使っている手法は，厳密な意味では勿論証明ではない．

G.1 何故偏微分か？

大学1年生で微分を勉強する時，必ず偏微分が一緒に出てきて多少面食らうものである．何故，偏微分が必要なのかという事が，最初の頃は今一つすっきりしなくて納得できないものである．ここでは，数学の最も基本である偏微分について簡単な解説をしよう．大切な事は偏微分が何故必要かである．

G.1.1 偏微分の定義

関数 $f(x, y)$ に対して

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad (y \text{ をとめて } x \text{ で微分})$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \equiv \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad (x \text{ をとめて } y \text{ で微分})$$

が偏微分の定義である．それ以上の意味は全くない．

G.1.2 2変数関数の偏微分

ここで関数 $f(x(t), y(t), t)$ を全微分したい．すなわち，

$$\frac{df(x(t), y(t), t)}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), t + \Delta t) - f(x(t), y(t), t)}{\Delta t}$$

を計算したいのである．この時，次のようにある項を引いたり足したりを繰り返して変形して行くとどうしても偏微分を使わざるを得ない．すなわち，

$$\begin{aligned} \frac{df(x(t), y(t), t)}{dt} = & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t), t + \Delta t) - f(x(t), y(t + \Delta t), t + \Delta t)}{\Delta x} \frac{\Delta x}{\Delta t} \right. \\ & + \frac{f(x(t), y(t + \Delta t), t + \Delta t) - f(x(t), y(t), t + \Delta t)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ & \left. + \frac{f(x(t), y(t), t + \Delta t) - f(x(t), y(t), t)}{\Delta t} \right\} \end{aligned}$$

と変形できる．ここで $\Delta x \equiv x(t + \Delta t) - x(t)$ ， $\Delta y \equiv y(t + \Delta t) - y(t)$ と定義してある．よって

$$\frac{df(x(t), y(t), t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (\text{G.1})$$

が示される．この式を見てわかるように，偏微分を使うと確かに簡単な形で書く事が出来るし合理的でもある．

G.2 $\delta(\mathbf{r})$ 関数

物理ではどの基礎科目でも $\delta(\mathbf{r})$ 関数が出てくるが、この使い方は慣れたら簡単である。従って、解説する必要はないかも知れないが、学部の2年生だと、まだ、どうしても $\delta(\mathbf{r})$ 関数に違和感を覚えるものである。ここではこの $\delta(\mathbf{r})$ 関数が何故必要になったかに関する数学的な理由を議論しよう。但し、 $\delta(\mathbf{r}) \equiv \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ である。まず、最初にチェックすべき式は

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = 0 \quad (\text{G.2})$$

であり、これは簡単に確かめられる。ところがこの $\nabla^2 \frac{1}{r}$ を原点を中心とした半径 a の球全体で積分すると

$$\int_{|\mathbf{r}| \leq a} \nabla^2 \frac{1}{r} d^3r = -4\pi \quad (\text{G.3})$$

となる。この証明は簡単で Gauss の定理を用いて

$$\int_{|\mathbf{r}| \leq a} \nabla^2 \frac{1}{r} d^3r = \int_{|\mathbf{r}|=a} \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \cdot d\mathbf{S} = - \int_{|\mathbf{r}|=a} \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \cdot \mathbf{e}_r r^2 d\Omega = -4\pi \quad (\text{G.4})$$

である事が直ちにわかるのである。何故、このような事が起こったのであろうか？答えは簡単で、最初の式は確かに正しいが、しかしこの場合常に原点は除かれている。これは式を見れば当然であった。つまりは、原点だけが特殊な役割を担っていたのである。そこで、 $\delta(\mathbf{r})$ 関数を定義する必然性が出てくる。すなわち、

$$\int \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) f(\mathbf{r}') d^3r' = f(\mathbf{r}) \quad (\text{G.5})$$

と定義するのである。こうすると、 $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$ の式は修正されて

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad (\text{G.6})$$

となり、これだと確かに原点での発散がうまく処理されている。

δ -関数に対するより直感的な定義式は、1次元の $\delta(x)$ 関数に対して、

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \quad (\text{G.7})$$

とするものである。但し、この無限大は $\frac{1}{x}$ の発散よりも少し弱いとされているが、物理屋にはそのような事はどちらでも良い。

G.2.1 Green 関数

δ -関数と関係してよく出てくるものに、Green 関数がある。この Green 関数に関しては、ひどく難しそうに教えらるものであるが、実際には単に便利であるとして物理屋は使えば良いものである。Green 関数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ は例えば Poisson 方程式

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \quad (\text{G.8})$$

を解こうとする時に利用する。Green 関数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ を

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{G.9})$$

と定義すると Poisson 方程式の解は Green 関数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ を使って

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d^3 r' \quad (\text{G.10})$$

と書く事が出来る。この証明は簡単で、実際にこの式を Poisson 方程式に入れてみれば良い。ちなみに、この $\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$ と Green 関数の定義式と比較すると境界条件がない場合は

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{G.11})$$

である事がわかる。この式を Green 関数により ϕ を求めた式に代入すると

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \quad (\text{G.12})$$

と求められ、これは良く知られた式になっている。ここで大切な事は、微分方程式を解く立場で言うと、境界条件が入ってくると Green 関数に対する方程式を解く方が Poisson 方程式を直接解くより遥かにやさしいと言う事である。

G.3 Gauss の定理

Gauss の定理は物理でも頻繁に使う公式である。それは、ある任意の閉じた体積に対して任意のベクトル量 $A(\mathbf{r})$ の発散量 $\nabla \cdot A$ を積分する。その結果、

この積分量はこの体積を囲む表面積において A_n という法線方向の成分について積分したものと一致しているというものである．式で書くと

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d^3r = \int_S A_n dS_n \quad (\text{G.13})$$

である．ここで， A_n は表面でのベクトル \mathbf{A} の法線方向の成分を表し，また dS_n はその表面での表面積分を表している．方向は外向きを正としている．

この式の証明は3つのステップに沿って行うとわかり易い．まずは，1辺が a の立方体を考えて，この立方体の隅の1個を原点にとる．この立方体に対して Gauss の定理が成立する事を証明する．次に，この立方体を8つに切り，1辺が $a/2$ の立方体に対して Gauss の定理を証明する．この時に，それぞれ小さな立方体に関しては接する面どうしが打ち消し合い，結局全体の表面だけが積分に効いて来る事が示される．最後に，ステップ3として，任意の体積を考え，これを無限小の立方体に分割して考えると，明らかに接する面はお互いに反対向きになり打ち消し合う事が容易にわかる．従って，結局全体の表面積の積分になる事が証明されるのである．

G.3.1 立方体での Gauss の定理

Gauss の定理の証明をまず立方体で行う．この場合，左辺の積分は

$$\begin{aligned} \int_{0 \leq x, y, z \leq a} \nabla \cdot \mathbf{A} d^3r &= \int \left[\int_0^a dx \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right) \right] dydz \\ &+ \int \left[\int_0^a dy \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \right] dzdx + \int \left[\int_0^a dz \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \right] dxdy \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} \int_{0 \leq x, y, z \leq a} \nabla \cdot \mathbf{A} d^3r &= \int (A_x(a, y, z) - A_x(0, y, z)) dydz \\ &+ \int (A_y(x, a, z) - A_y(x, 0, z)) dzdx + \int (A_z(x, y, a) - A_z(x, y, 0)) dxdy \end{aligned}$$

となり，この右辺は立方体における表面積分である事が直ちにわかる．すなわち，

$$\int_{0 \leq x, y, z \leq a} \nabla \cdot \mathbf{A} d^3r = \int_S A_n dS_n \quad (\text{G.14})$$

が証明されたのである．

G.3.2 一般の場合の Gauss の定理

Gauss の定理の証明が立方体でわかると、前述したように後は簡単である。まずは立方体を 8 つに切ってそのそれぞれに対して Gauss の定理を示すとわかる事は、それぞれにおいて面が接している所は常に打ち消し合っている事が示されるのである。従って、残るのは全体の表面での積分になってくるのであるが、これは直ぐにチェックできる計算である。この事がわかると、一般の場合も同じように無限小の立方体に分割して見れば明らかのように、接している所は打ち消し合い、最終的に残る積分はすべて表面となるのである。

G.4 Stokes の定理

Gauss の定理と同じように重要な数学の定理に Stokes の定理

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{G.15})$$

がある。ここで、 C は閉曲線を表し、 S はその閉曲線で囲まれる面積を表し、この面積積分は右手の法則に従って面積積分の方向を決めている。この証明も一度きちんと理解しておくとお応用の仕方が良くわかると思う。

G.4.1 長方形での Stokes の定理

Stokes の定理の証明をまず長方形で行う。この長方形の一つの頂点を原点に取り、 x -軸方向に a そして y -軸方向に b の長方形を考える。長方形が $x-y$ 平面にあるため、 $d\mathbf{S}$ の方向は z -軸である。よって左辺は

$$\int_S \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy = \int_0^b [A_y(a, y, z) dy - A_y(0, y, z)] dy - \int_0^a [A_x(x, b, z) dx - A_x(x, 0, z)] dx$$

となる。これはしかし長方形の周囲を一周積分する事に対応している。すなわち、上式の右辺は原点から x -軸に沿って a まで積分し、そこから y -軸方向に沿って b まで積分し、さらにそこから x -軸に沿って 0 まで積分し、そして最終的に y -軸方向に沿って原点まで積分したものである。これは長方形に対して Stokes の定理が証明された事に対応している。

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{G.16})$$

G.4.2 一般の場合の Stokes の定理

一般の場合の Stokes の定理の証明は，Gauss の定理の時の証明と同じであり，上式の場合の長方形を4つに分割してみる．そうすると，分割されたものの長方形でお互いに接している線積分は打ち消し合い消えてしまう．結局．残るのは外回りの線積分だけになる．よって，この場合も確かに Stokes の定理が証明された事になっている．この事より，一般の閉曲線で囲まれる面積を無限に小さな長方形に分割してみると，やはり重なった部分は打ち消し合い消えてしまう．そして残った線積分はすべて閉曲線そのものの線積分になっている．従って，確かに任意の閉曲線で囲まれる面積に対して Stokes の定理が成り立っているのである．

G.5 線形代数

物理でよく使う数学として，勿論，微分方程式が最も良く出てくる事は明らかであるが，線形代数の知識もかなり重要である．ここでは，必要最小限の数学について簡単に解説して行きたい．行列は最初はただ並べただけだが，これに演算を定義する事が出来たという事が大きな点である．この行列の問題は学部学生が最も苦手とする所である．この行列の問題をしっかりと理解するには，2行2列の行列の性質をきちんと理解する事である．そうすれば，一般の行列は類推でできるものである．それでもわからなかったら数学者に質問して理解する事が一番である．

G.5.1 エルミート行列

エルミート行列の定義は $A^\dagger = A$ である．ここで A^\dagger の定義が必要である．全て2行2列の行列で示す事にする．すなわち具体的に書くと

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A^\dagger = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix} \quad (\text{G.17})$$

であり，エルミート行列は従って

$$A = \begin{pmatrix} a + d & b - ic \\ b + ic & a - d \end{pmatrix} = a + b\sigma_x + c\sigma_y + d\sigma_z \quad (\text{G.18})$$

と書けることが簡単にわかる。ここで, a, b, c, d は実数である。また, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ は Pauli 行列であり

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{G.19})$$

と表されている。

G.5.2 ユニタリー行列

ユニタリー行列の定義は $U^\dagger U = 1$ である。この時, U は

$$U = e^{i(a+b\sigma_x+c\sigma_y+d\sigma_z)} \quad (\text{G.20})$$

と書く事ができる。これは明らかで, $U^\dagger = e^{-i(a+b\sigma_x+c\sigma_y+d\sigma_z)}$ であるので, 常に

$$U^\dagger U = e^{-i(a+b\sigma_x+c\sigma_y+d\sigma_z)} e^{i(a+b\sigma_x+c\sigma_y+d\sigma_z)} = 1 \quad (\text{G.21})$$

と言う条件を満たしている。

G.5.3 行列式

行列式は 2 行 2 列の行列の場合は簡単で

$$\det A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \quad (\text{G.22})$$

である。一般の場合は

$$\det(A) \equiv \sum_P \epsilon_{(m_1 \dots m_n)} A_{1m_1} \cdots A_{nm_n} \quad (\text{G.23})$$

となる。ここで, $\epsilon_{(m_1 \dots m_n)}$ は偶置換の場合は +1 であり, 奇置換の場合は -1 とする。

G.5.4 行列式の公式

行列式の公式でよく使うものとして覚えていた方が便利なものに

$$\det A = e^{\text{Tr}(\ln A)} \quad (\text{G.24})$$

というものがある．ここで厳密さは全く無いが簡単な証明を書いておく．

• 証明： まず A が x によっているとする．この時 $\det A$ の微分は

$$\begin{aligned} \frac{d \det(A(x))}{dx} &= \sum_{ij} \Delta_{ij} \frac{dA(x)_{ij}}{dx} = \sum_{ij} \det(A(x)) (A^{-1})_{ji} \frac{dA(x)_{ij}}{dx} \\ &= \det(A(x)) \text{Tr} \left(A^{-1} \frac{dA}{dx} \right) \end{aligned} \quad (\text{G.25})$$

であり， Δ_{ij} は小行列式である．ここで $A(x) = e^{xB}$ とし，また B は定数行列であるとすると，

$$\frac{d \det(e^{xB})}{dx} = \det(e^{xB}) \text{Tr}(e^{-xB} e^{xB} B) = \det(e^{xB}) \text{Tr}(B) \quad (\text{G.26})$$

である事がすぐわかる．この微分方程式は直ちに解けて，

$$\ln \det(e^{xB}) = x \text{Tr}(B) + C \quad (\text{G.27})$$

となる．初期条件として $x = 0$ を入れると $C = 0$ が求まる．従って，

$\det(e^{xB}) = e^{x \text{Tr}(B)}$ となる事がわかる．ここで， $x = 1$ と $A = e^B$ とすれば

$$\det(A) = e^{\text{Tr}(\ln A)} \quad (\text{G.28})$$

が証明された事になっている．

閑話休題 1 : 小泉のラウエの斑点

高校生の頃、私は物理が苦手であった。試験をしても常に不出来であったし、そればかりか、物理が面白いと思っただけでなかった。今となつてはその原因がわからないでもない。高校の物理は現象を教える事はしてもその現象が何故起こるのかの原因を教える事は出来ないのである。例えば、地球が太陽の周りを周回しているが、それが楕円軌道であり、ほとんど平面上を周回しているという事を教える事は出来る。しかし、何故、軌道が楕円であり、運動が平面になるのかという事に疑問を持ったら、それは高校の物理では教える事が出来ないのである。

人によって、現象を学ぶ事が楽しいと思うタイプとその現象が起こる原因に興味を持つタイプと分かれてしまう事はよくある事である。勿論、そのどちらが良いかという問題ではない。しかしながら、ある種の天才は現象そのものに興味を持ち、その現象を自分で再現してみたいと思うようである。日立フェローである小泉英明氏(以下、小泉と呼ばせてもらう)は、その天才の中でも、最も凄みのある天才である。私はその天才に引きずられて物理の世界にのめり込んだと自分では思っている。

大学1年の頃、小泉と私は仲の良い友達となり、駒場寮の食堂でよく一緒に昼食やら夕食を食べたものである。私は浜松の田舎者であり下宿していたが、小泉は東京の良家のお坊ちゃんのものであった。よく音楽の話になったが、彼はショパンを自分で演奏し、ショパンが音楽の中心であったが、私はもっぱらバッハのみで演奏ときたらオルガンでバッハのトッカータとフーガ二短調がぎりぎりまで弾ける程度であった。従つて、むしろ聞く方が専門であり、よく音楽そのものの議論(口論?)になったものである。

1年生の10月のある日、小泉の家に遊びに行った。世田谷の上馬にある豪邸でグランドピアノが3台もあるという家であった。着いてすぐに彼の部屋に案内された。ところが小泉は押入れの中に入っていて「藤田、ちょっと待って」と言ったので、自分はぼんやりと座布団に座っていた。その内に小泉が出てきて、興奮気味に3 cm 四方くらいの小さな「セロハン」の様なものを取り出して私に見せてくれた。「藤田、これをよく見てくれ。薄い小さな白い斑

点が見えるだろう。これがラウエの斑点だよ。」一体、ラウエの斑点とは何なのか？その当時、自分には知る由もない。これは X 線を結晶にあてると X 線が干渉して斑点を示すのである。「どうやって写真を撮ったの？」という質問に、小泉はいとも簡単な調子で説明してくれた。「秋葉原に行って不要になったネオンサイン用のトランスを貰ってきた。それで 100 ボルトを変換して高電圧を作り、それを真空管にかけて X 線を出したのだよ。ほとんどの真空管は駄目になってしまったが、生き延びるやつもあるんだ。ただ一番苦労したのは結晶をどうやって薄く出来るかなのだが。実はこれは菊池正士の本に書いてある。」

もはや、何も言う事はなかった。数日後、駒場のキャンパスで小泉に聞いた。「どうして、ラウエの斑点の事がわかったの？」それに対して一冊の本を取り出して「これに書いてある」と言うのだが、さらっと見てみたが、自分には全く理解できない本であった。

どうも小泉は物理の現象を直ちに捉えてしまう事が出来るらしい。おまけにそれをすべて自分で再現したいと思い、それがほとんどすべて自分で出来るという事である。それに加えて、物理のみならず、自然現象を理解するための直観力は並外れて優れているのであろう。これは最近の事だが、小泉が「飛行機が浮力により空を飛ぶ時、我々はこの原因としてベルヌーイの定理により翼の上と下の空気の流れの差によって浮力が生じているのであると教わってきたが、これはおかしいね。何故かと言うに、飛行機は逆にひっくり返っても十分飛んでいる。あれは、翼を上下に向ける操作が基本的だね」と説明したので吃驚したが、確かにその通りであり、ベルヌーイの定理自体は勿論正しいが、しかし流体力学をもう少ししっかり理解しなくてはならないと思ったものである。

大学を卒業した後の小泉の活躍ぶりはここでは省略するが、一つだけ話しておきたい。それは、小泉が大学を卒業して 3、4 年後の事だが、彼は当時社会問題になっていた「髪の毛中の水銀」の量を Zeeman 分裂を使って測定する手法を開発した事である。この事はノーベル賞候補に上っているが確かに十分その価値はある。水銀原子のエネルギーが磁場をかければ Zeeman 分裂する事は恐らくはどの実験家もわかっていた事と思われるが、そのエネルギーが他の分子の Zeeman 分裂の影響なしに測定できるという事を発見したのは凄い事である。特に、偏光させた電磁波を使う事により、スピン磁気量子数の保存則を利用した絶対測定に近い形で水銀の量を測る装置を開発した事は偉大としか言いようがない。この実験を彼は週末土・日に会社に出かけて実験をしたというのだから、これはもう天才しか出来ない事である。

その小泉とは、テニスをしながら色々な事を議論しているが、その内の重要な問題の一つに青少年の教育問題がある。彼は中高生への理科教育問題を議論している委員会のメンバーであり、例によって、様々な模擬実験を提案している。しかしながら、実は理科教育に限らず、人文系の教育でも問題は深刻である。「理科離れ」と言う事がよく言われるが、現実には「文学離れ」でもあり、基礎的で時間がかかり、一見楽しくは見えない教養・学問が敬遠されているのが現状である。

この問題をどのように解決して行けるのであろうか？教育に「ベスト」な方法は存在しないが、現在の日本の教育では、中高生から大学での学問研究に行く過程において、その「中間的な教育」がかなり抜けていると思われる。どうしても大学受験が中心であり、これは教育の観点からすれば、非常にいびつな事になっている。教育は基本的には「人」であり、この「中間的な教育」を実現して行くための一つの方法に、博士号を持つ人材を大量に高校の先生に採用してゆく道筋を作る事であろう。博士課程において初めて研究の難しさを体験するわけであり、この事を経験した教員を増やす事が大学以前の教育ではどうしても必要である。この時、博士号を持つ高校の先生には教える時間数の軽減を保証するべきであろう。さらには、博士号を取得した場合、自動的に高校の先生として教壇に立てるようにするべきである。但し、その場合、授業の教授法を訓練する一定期間を必ず設けるべきである。実は、これは大学の先生に対しても「授業の教授法訓練」はいずれ義務にするべきであると思っている。あまりにも授業の下手な先生が多すぎるのである。授業をする上で最も重要な事は、「学生」が理解できる事であるという当然の事が守られていない。ただ単純に講義をしているのでは、自分の知識を伝える事さえ出来ないものである。さらには、講義の準備にはどんなに頑張ってもやりすぎる事はない程大変であり、この事をきちんと認識する事こそが重要なのである。

小・中・高校生の教育に関しては、その目標はおのずと大学教育とは異なっている。小・中学生に対しては基本的な事を叩き込む事が最重要であり、従って単純計算を繰り返し行う事やまた様々な基本的な事柄を徹底して覚えさせる事が大切である。それに対して高校生の場合は、考える基礎を与える事が重要になる。その意味では、現在の入試システムはあまり良くない事は明らかである。特に、センター入試のような4択の問題は避けるべきであり、これは大学人の怠慢とも関係している。各大学が自分で問題を作り、採点するシステムに戻すべきである。この場合、勿論全ては記述式の問題にするべきである。ただ、問題自体は過去に同じ問題がでてそのような事を問題にするべきではない。似たような問題で十分なのである。記述式にしたら同じ問題でも解答は必

ず個人によって異なってくるし、それこそが重要なのである。このような記述式の問題にする場合、全ての大学が一斉にしないと成り立たないシステムである。これは明らかで、受験生は必ず簡単な方を受験したがるからである。

この大学入試の悪弊と関連している問題で「物理オリンピック」というイベントがある。これはセンター入試と同じくらい、物理を理解するという観点からするとマイナスである。物理を深く理解する事が重要なのに、単純なレベルの物理の問題の解法をパズル的に競う事など最悪であり、教育者としては最も避けるべき事である。ここで恐ろしい点は、それで良い点を取った学生が自分に物理の才能があると錯覚してしまう事である。このレベルの競争に強いことは、余程の例外を除いては、深く理解する能力に乏しい可能性が高いと考えた方が良い。従って、このような学生が研究者になるとまずかなりの確率で「翻訳&リピート」の研究者になってしまう恐れがある。これはいわゆる「東大の秀才」が物理の研究者としては一流になれる人の割合が少なく、また、理解が深くて実力の伴った研究者になる可能性が稀である事を考えれば良くわかる事である。一般的に言って、有名大学の学生が特に「優秀」である事などありえない事は研究者は皆よく知っている事である。この事は有名大学の出身者がその「既得権」を有効に使いたいために出身大学を宣伝していると言う事にすぎないのであり、実力とは無関係である。

それでは、大学での教育はどうであろうか？大学の教育で最も深刻な問題は、大学においても平均的に出来る学生を常に欲しがっているという事である。ところが大学では、その個人の良い点を伸ばすことが最も重要になる事は明らかである。平均点が高いという事はその中に非常に良い点も含まれているかも知れないが、同時に平均点が低い学生のうちで特別に良い点を持っている学生もかなり多い事も事実なのである。ここでこわい事は、平均点が80点の学生と85点の学生の間で才能的な意味での差があると思込んでいる人々が多いという事である。この矛盾点をどう解決したら良いのであろうか？個人の良い点を伸ばす事が大学教育の原点であるが、自分にはその解決法は残念ながらわかっていない。

大学での教育では、その個人の良さを如何に伸ばして行くかが最大の課題であるが、しかし同時に各個人に日本人としての教養をつける事も非常に重要なことである。物理学の講義の時に、必ず「物理の勉強も大事だが、同じくらい本を読む事が大切である」と常に言って来たのであるが、かなり多くの学生がこの事に対してまじめに捉えている。雑談として学生に話している事ではあるが、「源氏物語」を読む必要性を具体例をあげて説明している。これは初めてドイツに渡った冬にハイデルベルグでのある研究者が開いたパーティで起こっ

た事であるが、2人の研究者の奥さんが別々に「源氏物語」のかなり細かい内容について質問してきたのである。これに対して「自分は源氏物語を読んでないのでわかりませんと言えますか？」と学生に問い掛けるのだが、この問いかけは、予想以上に学生にインパクトを与えているようである。

源氏とは直接関係はないのだが、大学での教養課程がかなり軽視されているのが現状であり、これは非常に心配である。これは、大学教育を「改革」してきた責任者達自身の教養レベルが近年では昔と比べて著しく低下している事によっている。教養のない「学者」にとっては、大学での一般教養は不要に映ってしまうのであろう。今後、大学での教養課程を充実させる事が急務である。教養のない人が研究者になっても、本当に重要な研究発展は期待できない。それは学問は人間の文化の一部であるからで、それ自身が独立して存在すべきものではない事によっている。ただ単なる偶然の発見は勿論可能であると思うが、学問の真の発展はその学問が人間文化の中でどのような位置であるかをしっかり把握して初めて可能になるものである事は言うまでもない。

大学での教育に限らないが、教える事は「はきだす事」である。従って、はき出す事が出来るためには常に供給し続けなければならない。すなわち、教育者は常に勉強していないと「もぬけの殻」になってしまうのである。大学ではこれが顕著に現れている。研究していない先生は教える事さえ出来なくなるのである。言い換えれば、教えていても研究をしていない先生は学生にとって全く魅力のない木偶の坊になっているのである。そして、この事を学生は割合敏感にわかっているのであるが、残念ながら教えている当人は予想以上にわからない場合が大半であり、これは一種の「(悲)喜劇」となっている。この当然の事をしっかり理解して常に努力を怠らない事は大学人にとって必要最低限の仕事なのである。

最後に、大学の教育とは直接関係しているわけではないが、語学教育と理工学の技術教育についてコメントしておこう。「伝達としての語学力」と「理工学における技術力」とは、その教育法自体がほとんど矛盾すると思われるほど異なる手法を必要としているものである。「伝達としての語学力」の場合、基本的には丸暗記が最も重要である。特に、小・中学生にとってはこの丸暗記が極めて重要であり、例えば、算術において九九は必ず丸暗記する必要があるし、漢字もしっかり覚える必要がある。しかしながら、理工学の教育では事情がかなり異なっている。例えば、ある「電磁気学の教科書」をすべて覚えてしまった学生がいたとしよう。この場合、この本に書いてある事ならばどの問題でも正確に答えられるであろう。しかしながら、この教科書に書かれてはいない問題だと、この学生はほとんど応えられない事になるものである。それは明らか

で覚える事と理解する事は本質的に異なる作業だからである。

この事は何を意味しているのであろうか？恐らくは、高校生・大学生の場合、丸暗記の教育は控え目にして、理解能力を養う事に力を注ぐ事が重要であるという事であろう。その意味で、日本の大学生があまり英語を話せないからと言ってその事をむやみに嘆く必要はないと言う気がする。さらに言うと、語学力があって国際的な人材だといっても、結局はその学生の中身が最も重要になる時が来るものである。中身のない国際的な人材は一時的に役に立つ事はあっても、いずれは中身自体を問われる時が必ず来るものである。その意味において、現代における日本の理工学系の技術力は健在であり、アジアのみならず、世界的なレベルにおいても抜きん出ている事は確かであると思う。

そうは言っても、勿論、英語を話せた方が良いに決まっている。しかし、英語会話は必要に迫られてやる方が恐らくはより合理的であると思われる。英語で言ったら、本当の語学力は英語圏の文化をどれだけ深く理解しているのかという事であり、喋れるかどうかは本当の語学力とは無関係である。それにもかかわらず、現実問題として英語が喋れるようになるにはどうしたら良いかとよく学生に質問されるものである。これに対して、何時も学生には言っている事であるが、まずは500個程度の英語の基本文章を丸暗記する事が最も大切であり、これが出来ると少しずつ会話が出来るようになるものである。

閑話休題 2 : 西島和彦先生との議論

Heisenberg がアイソスピンという概念を初めて導入したのであるが、それは陽子と中性子の質量が非常に近い事によっている。これは、素粒子を量子数で分類するという意味で非常に重要な仕事であった。さらに、この量子数の概念を拡張して、ストレンジネスという量子数を導入したのが西島先生である。この仕事がいかに重要であるかは、説明するまでもない事である。しかしながら、西島先生の本当の凄さは場の理論に対する理解の深さである。特に「Fields and Particles」の教科書は今でも内容が大変新鮮であり、また物理を深く理解されていることが良く分かる本である。その西島先生にして頂いた講演会について、以下に再現して行きたい。

2006年11月10日に西島先生が日大理工学部に来られて学生向けの「お話」をされた。実は、この一般的なお話を先生にして頂いたのには私なりの理由があった。昔、私が大学3年生の頃、朝永振一郎先生が東大理学部物理教室に来られて「お話」をされた。その時、朝永先生が何を話されたのか私には全くわからなかったし覚えてはいない。しかし、その時の夕暮れの雰囲気は今でも良く覚えているし、また朝永先生の人間としての格調の高さも忘れる事が出来ない。そしてそのような機会を若い人達に設ける事が大切であると考えたが、今現在、その朝永先生と同じ役割をする事が出来るのは、理論物理では西島先生しかありえない。それで少し無理を言って西島先生に「お話」をしていただくようお願いした。先生も直ちに引き受けてくれたが、一つ条件をつけられた。それは「お話」の講演会がインフォーマルである事である。それであまり大げさな宣伝はしないで、純粹に学生・院生用に講演会を設定した。その結果、およそ80名程の学生・院生が1号館133教室に集まり、私としては丁度良いくらいの講演会になったと思っていた。

その時に先生はストレンジネスを発見するに至った苦労話をまじえて、1950年代当時の日本の理論物理の状況と同時に話しされた。特に当時は、朝永グループによる量子電磁力学の繰り込み理論が最も流行していたのであるが、しかし先生はその流行を避けて新しい研究を行った事を話された。その講演の後、質問コーナーを設けたところ、沢山の質問が主に学生から出てきた。

感銘を受けたのは、そのどの様な質問に対しても、先生は非常に丁寧に答えられていた事である。例えば、学生が「先生が文化勲章を貰われた時に、天皇陛下はどの様な御様子であったのでしょうか？」と言う物理とは無関係な質問に対しても「天皇陛下は御自分のお立ちになられる場所を良く心得ていられてとても感心しました」と答えられていた。話の内容だけではなく、その人でなければ伝えられない極めて重要なものがあると言う事を先生の講演からしみじみと感じ取る事が出来、この講演会をしていただいた事は若い学生諸君にとってやはり非常に有意義であったと強く思った次第である。

講演会の後、我々の研究室で行われる「飲み会」に先生も出席して頂く事ができた。当時5号館6階にある通称「サロン」と言う部屋で6時から飲み会を行った。食べ物は寿司、飲み物はワイン。院生と卒業生10名程が参加した。まずは各若手が自己紹介をしてから、飲みながらの物理の議論になった。先生は話し上手であるとともに、聞き上手でもあった。昔、先生はヨーロッパのある所で会議の後のパーティーに出席された。その時のパーティーの席で、両隣に座られた人が Heisenberg と Bethe であったと言っておられたが、皆、啞然として、しばらく次の質問が出てこなかったものである。

その後、先生がいかに厳しい先生であったかを示すために私が学部4年生の時に西島先生のゼミに所属していた時の話をした。当時、Klein - Gordon 方程式の導出の所で、私が「何故ルートの中に ∇^2 を入れて量子化してはいけないのですか」と質問したところ、先生は「そんな事は自分で考えなさい」と言われて仕方なく自分で考えたのだが、結局良くわからなかったものです、という昔話をした。それに対して西島先生は驚くべきコメントをなされた。「それは私がわからなかったからだよ」と。一瞬、院生の方が驚きを通り越して沈黙し、そして次に皆、その正直さにむしろ完全に気を吞まれていた。

続いて、その当時、私が悩んでいた「ベクトルポテンシャルは何故実関数で良いのか」という事を議論した。場が実関数だとその状態は自由粒子として存在できない事を意味している。これに対して先生はゲージ場は観測量ではないから良いのではないかという事を言われ、我々もそうであると思っていると言う事で一致した。その後、院生の一人が実スカラー場は物理的に存在出来ないのではないかという我々の研究室がこの2年ほど研究している問題を提起した。これに対して先生は即座に基本粒子としてのスカラー場は存在しないと切り切ったのだが、Higgs ボソンを探索している人達が聞いたら動転しそうなコメントであった。そして、この点においても我々の研究室と考えは全く一致していた。

その他いろいろな事を議論し続けた。常にワインを飲みながら…。先生の

お酒の強さにも皆、仰天した。様々なお話の中で、物理の議論だけではないもので、私に対する励ましの一つと思われるコメントをここに紹介して置きたい。我々はこの数年、新しい仕事がなかなか論文として雑誌に発表する事が出来なくて、その意味では意気消沈する事が続いていた。その事に関係していると思われるのだが、先生は仕事の評価に関して次のようなコメントをなされた。それはまず Fermi の例を出されて、Fermi の弱い相互作用の論文は結局のところ雑誌に発表される事はなかったと説明された。つまりは、新しいアイデアの論文は簡単には論文として受け入れられるはずがないという事である。「仕事の評価は多数決だから本当に新しい事や、常識を覆す考え方が人々に簡単に受け入れられるはずがない。しかしその事は気にする事ではない」と言われた。

6時頃から飲み会を始めて、実は8時頃に少し心配になり、遅くなってしまっは申し訳ないが大丈夫だろうかと思っていた。しかし、先生は悠然とワインを飲みながら議論に加わっておられた。8時半になってもそして9時になっても、依然として悠々とワインを飲んでおられた。しかしさすがに自分としても9時半になった段階で、先生に申し上げた「先生、9時半になりましたが大丈夫でしょうか？勿論我々の方は全く問題ないのですが」と。その時、先生が言われた言葉を恐らく一生忘れない。先生は「何だ、もうこんな時間か。物理ばかり議論していたので酒が醒めてしまった」……

この稿を書いている途中で西島先生が急逝された。全く思いもよらぬ事であった。これまで30年間近く、折に触れて私は先生に物理の議論をしていただいていたのであるが、特にこの3年間ほどは先生にしばしばメールにより、物理上の考え方をお教え頂いた。それは自分に取って言葉に表せないほど重要でありプラスになっていた。

そして、自分が2008年の10月に先生に送ったメールが先生への最後のメールとなった。残念ながらそのメールに対するご返事をいただく事はかなわなかったが、これまで、何時でもどんな時でもすぐに返事を頂きその人柄を心から尊敬していたし、自分には物理上でも最も信頼している先生であった。結果的に先生からの最後のメールとなった2008年4月のメールと自分が先生に書いた2008年10月のメールをここに転載しようと思う。

To: "Takehisa Fujita" <*****@phys.est.nihon-u.ac.jp>
Subject: Re: 重力論文について
Date: Wed, 16 Apr 2008 11:04:29

藤田 丈久様

早速お見舞いのメールを有難うございました。また素晴らしいお花をお送り頂き感謝致しております。早く藤田さんにお目にかかって議論が出来るようになることを願っております。先ずは御礼まで。

西島 和彦

To: "Kazuhiko Nishijima" <*****@gmail.com >
Sent: Monday, October 10 2008 6:16 PM
Subject: QED の繰り込みについて

西島先生へ

その後、体力の方は少しずつ回復されているものと拝察していますが、こちらは新しい学期も始まり学生が次々と質問してくる日常に戻っています。このところ、QED の繰り込み理論が結局最も信頼できる理論であるという事から、繰り込みをチェックしてきました。私はどうしても vacuum polarization がわからなくて色々な角度から理解しようとあれこれ考えてきたのですが、't Hooft の次元正則化はとんでもない間違いをしている事がわかり、かなりショックを受けています。vacuum polarization の計算で次元正則化を用いると 2 次発散項が消えるのですが、私にはそれがどうしてもわかりませんでした。ところが中身を良く調べてみると、4 を $4 - \epsilon$ にする事は log 発散項の処理には有効なのですが 2 次発散項には意味がなく、数学の公式を間違えて使ったために 2 次発散項が消えていた事が分かりました。やはり 2 次発散項は手で消すしかなかったわけで、これにより vacuum polarization は繰り込みには入れてはいけないものであるという確信を持ちました。主要項が 2 次発散するからといって既にゲージを固定して場を量子化したのに、計算した項がゲージ不変を破るから消すというのはやはり無理があると思っていました。

それで、vacuum polarization の有限項が水素原子の hyperfine 分裂にどの程度効くのか計算した所、むしろ実験と逆の方向に出てしまい、実験は vacuum polarization が不要である事を示していました。それで色々考えたのですが、結局、運動方程式により見る事が重要である事が分かりました。S-行列の方法だとどうしても非物理的なグラフも計算してしまいますが、運動方程式だとそれは無く、実際 vacuum polarization の寄与は存在しない事が分かりました。フェルミオンの自己エネルギーと vertex 補正は問題なく理解されるので、これで QED の繰り込みが私なりにすっきりした形で理解でき、嬉しい限りです。これにより、電荷は繰り込みを受けなく、従って繰り込み群は初めから無かったことになり、これもすっきりしました。それにしても QED の繰り込みが私なりに良く理解できた事は嬉しいのですが、かなり大きな影響が考えられ、それについてどうしたらいいのかと考え込んでいます。先生が体力をしっかりと回復された折には、是非議論して頂きたいと思っています。宜しくお願いします。尚、第ゼロ次での vacuum polarization の論文をお送りしています。

日大理工，藤田丈久

閑話休題 3 : Max-Planck 研究所での大陸浪人

1970年代半ばに、私は3年間 Max-Planck 研究所にポストドクトラルフェローとして滞在し、研究活動に専念した。当時、日本に定職がなくてヨーロッパの国々で研究生活を送っている人達は「大陸浪人」と呼ばれていたが、私もその内の一人であった。

当時、Heidelberg にある Max-Planck 研究所の原子核理論グループは活気あふれる研究者で一杯であった。一つには Heidelberg 大学も原子核理論グループを持ち、基本的には一つのグループとしてセミナーや共同研究をしていた事にもよっている。それと Weidenmüller という理論グループのリーダーが物理なら何でも正確に理解していて、恐らくは当時の原子核理論では世界で最も優れた理論物理学者であった事にもよっている。従って、そこにどうしても優秀な人材が集まってくる事になる。結局、研究所で一番大切な事はリーダーの「人となり」であるが、これはどこでも今でも変わらないものである。Heidelberg における原子核理論グループのセミナーは、Philosophenweg (哲学の道) の坂を上がったところにある、もとは貴族の館を改良した研究所の一室で毎週月曜日に行われた。セミナーの時間は喋る時間が1時間、議論を含めても必ず1時間半で終わる事が規則であった。セミナーが長くなりそうだと誰かが立ち上がり、講演者の主張をはっきりさせ、セミナーを終了させる事がよく起こったものである。ドイツでは若手研究者がこの Heidelberg 大学でのセミナーで失敗すると職を取れないとよく言われたものである。私も半年ほどしてそこでセミナーを行った。しかし、そのセミナーの後、Weidenmüller を車に乗せて一緒に家に帰ったその帰りの車の中で、彼は突然「お前のセミナーを批判していいか」と言い始めたのである。それからほとんど耳を覆いたくなるような厳しいコメントを次々に発せられた。その時はまだ、プレゼンテーションの重要性に気づいていなかったのであるが、それから暫くたってから、今度は共同研究者である Heidelberg 大学の Hufner がやはり自分のセミナーを批判して、あれではどうしようもないから練習しろと言う事になった。そしてある

日の午後、4人の研究者の前でセミナーの練習会を行った。彼らの批判の鋭さは普通の議論でよく知っていたが、それにしても滅茶苦茶に叱責されたものである。例えば、何かの図なり式なりを出したら、それが何を意味しているのかしっかり説明しろと厳しく言われたものである。ともかく2時間半くらいの練習会に自分は完全に打ちのめされていたのである。その日の夜、Hüfner が家に電話してきた。「今日は厳しくコメントしたが、それはお前のプレゼンテーションの技術を批判したのであって、人間性を批判したわけでは無いから、混同しないように」と。この Hüfner とは毎週火曜日に議論する事になっていたのであるが、ある時（それは木曜日であったが）どうしても研究上議論したいと思い彼に電話して議論出来るか聞いた時があった。この時「明日、2年生への力学の講義があるので、その準備で今日は議論できない」との答えが返ってきて仰天したものである。さらには、Heidelberg 大学で行われる大学院の講義では、どの先生方も非常に良い講義をしてくれて、結構、研究者達もその講義に出席していたものである。自分にとっては、このプレゼンテーションに対する重要性の問題は、その後日大で講義をする時になって、非常にプラスになっている事は疑い得ないものである。少なくとも、講義の準備を胃が痛くなるほど懸命にするとする事が当然であるとして、これまで実行できた事は確かな事である。

その Max-Planck 研究所において、最も強く感じた事は「良い仕事をするには体力である」という事である。最初の頃は、彼らは肉を食べていて、日本人は米を食べているからこの違いか？などと思ったくらいである。実際には「食」ではなくて、何らかの形で体力をつけるという事である。むしろ持続できる体力が大切である。物理はわかるわからないはデジタルである。つまり、わかるが1だとするとわからないはゼロ。その中間は存在しないのである。従って、かなりわかったと思われるところで研究を停止すると、次の日はやはりゼロから出発する事になる。Max-Planck 研究所での研究者を見て、その研究に対する集中力と持続力には、本当にびっくりしたものである。研究所での昼食は常に十数名がテーブルを囲んで一緒に食事をした。ドイツは、少なくとも当時は、食文化がない国であるという印象を強く持っていた。美味しいのはパンとチーズとソーセージ。それとワインとビールである。その研究所での昼食会で良く議論して印象的だった事に「教育費」の問題がある。ドイツでは大学まで教育費は一切かからない。それどころか、大学院では院生に給与に対応するものが支払われる。その代わり、院生は何らかの形で大学または研究所で働く事が義務づけられる。例えば、大学では演習のクラスを必ず一つは担当するとか、研究所ではコンピュータの管理を任せられるとか。日本では「受益者負

担」といって、大学生も授業料を払うべきであると言う事になっているので、自分もその理屈を主張した。しかし、この議論は簡単に粉碎された。それは社会のシステムに依存している。ドイツでは社会保障がしっかりしていて、老後は国が面倒を見る事になっている。その代わりに、税金はべら棒である。従って、若い人達を育てるのは国の責任であると言う事である。一方において、日本は長い間、老後は各「家」が見ていた。つまり、家社会である。それが突然老後は国が見ると言う事になったわけであり、若い人達を国が育てると言う意識はまだ無いのである。いずれは、そのようになって行くべきであると思うが、まだまだ難しい気がする。

Max-Planck 研究所はドイツにおける基礎研究の中心を担っている。ほとんど全ての分野で Max-Planck 研究所がどこかにあり、研究費は国が出し、しかしその研究費の分配は研究者が行っているというシステムを採用していて、基礎研究ではあらゆる分野で世界をリードしていると言われている。その研究所全体を統括している Max-Planck Gesellschaft (MPG) の重要メンバーの一員に、ある時 Weidenmüller が加わっていた事がある。この時、最も印象的な一種の「事件」が起こった。Weidenmüller がその MPG の No. 2 に推されてしまったのである。彼は1週間悩んで結局それを引き受けなかったのである。それは彼が物理の研究を選んだ事に対応している。それでは、MPG の No. 2 は何をする人なのか？責任感が強い Weidenmüller がひどく悩んだ理由は聞いて見て良くわかった。それは、Max-Planck 研究所全体の内で、次に何処の研究所をつぶすかを決定する役であるとの事である。国として新しい研究をサポートして行くためには新しい研究所を作る必要がある。しかしそれは同時に古い研究所をつぶして行かない限り、不可能な事である。この当然な事を科学者がしっかりやっけて行こうとしている事に、自分は最も大きな感銘を受けたものである。今の日本の科学研究の状況を見るにおいて、これまである研究所をつぶすなどとは、とても考えられない事である。しかし、研究所の使命は常にはつきりして、その使命や目的が不明瞭になった時は、研究所の使命を終わらなければならない。この最も大切な研究所の新陳代謝をどうやって行うのかは、現代日本の科学研究の最も重要で緊急な課題である。しかし、一方において、研究の領域にも、一種の「市場原理」的な発想を入れようとしている感じがしてならない。これは、最悪の考え方であり、将来の研究と研究者を完全につぶしてしまいかねない危険なものである。研究によって「お金」が儲かる事はあり得ない。長期的に見て、その研究がある分野を教えるような指導原理を生み出す可能性はあったとしても、それが「お金」に結びつく事を考えていたら、科学の進歩はない。

もう一つ、MPG で重要な事として印象に残った事は、国から予算が来た時、MPG の研究者自身がお金の分配を決めているという事である。この時、Weidenmüller の話だと、科学系と文化系でその分配の比率が固定されていて、その当時は常に 4 対 1 であるという事であった。これには、非常に驚いたものである。たとえ国からの予算が削減された年度でも、当時のドイツでは常に文科系の研究の重要さを認識しており、それをしっかりサポートして行くと言うことである。日本においても、研究所の体制が正常になったら、基礎研究は原則として研究所で行われるべきである。大学はその研究所と連携しながら研究を遂行してゆくという体制が最も効率的であり、この体制を早く作るべきである。現在、日本が使っている科学研究費は膨大である。しかしながら、大半は科研費として研究者にばら撒かれている。どこの大学も今や科研費を取るための「科研費講座」を開いている。それは科研費の採択が科研費用の作文の巧拙に大きく作用されている現実を皆が見ているからである。実際、科研費の採用決定をしている研究者達が誰であったとしても、採択の現状をみれば、このように研究費をばら撒くような方法はなるべく早く改めてゆくべきである。科研費のみならず、現在の研究所自体においても結果主義に偏りすぎている気がしてならない。研究において結果をある程度求められることはこれは当然である。しかし、それもバランスの問題であり、結果主義に陥ると研究の成果はおよそその研究者達の能力とは程遠いものしか、実現されない事は明白である。研究費の分配は基本的には公平に行う事がベストである。東大の研究者が優れた業績を出すと思うのは幻想である。地方の国立大学も同じように研究費をしっかりと分配して、その中で運良く良い仕事をした研究者に特別な研究費を手当てして行けば良い。

ところで、この研究所の名前 Max Planck は、科学史上非常に重要な功績を残した人物である事は、良く知られている。それは量子仮説である。すなわち、「光子のエネルギーはある単位 (\hbar) をもとにしたもの ($\hbar\omega$) の整数倍になっているべきである」という仮説である。エネルギーに最小単位が存在すると言う事は、1900 年当時は勿論実験的に知られている事ではなかった。この仮説により、黒体放射の観測事実が見事に説明されたわけであるが、Planck 本人はこの仮説は何かの近似であろうと最後まで信じていた様である。それに対して、アインシュタインはこの光量子仮説をその 5 年後には採用して、光電効果を見事に説明したのである。この事を見てもアインシュタインが新しい理論にすばやく反応して、それを他の現象に応用する抜群のセンスを持っていた事を示しているし、この光電効果の理論模型がその後の物理学に与えた影響は計り知れないくらい大きい。しかしながら、この光量子仮説に関して言えば、

むしろ Planck の方が物理を良く考えそして理解していたのではないかと考えられる。当時、量子力学がまだ発見されていなく、量子という概念は物理屋の理解を超えていた。この事は、逆にアインシュタインはその当時の物理を深く理解していたのではない事を示している。現代の我々理論物理屋に求められている事は、アインシュタインのような冒険心ではなく、しっかり物理を出来るだけ深く理解する努力であるとしみじみと思うものである。それは、時代に応じて自然科学に対する対応の仕方は当然変化すべきであると言う事と関係している。物理学はすでに十分成熟していてアインシュタインの時代ではなく、余程深く考えてゆかないと、新しい理論の進歩とその理解は難しいものになっている。

閑話休題 4 : テニスの上達法

研究で良い仕事をするためには、どうしても体力をつける事が必須条件となるが、その体力をつけるためには何か運動をする事が必要である。Max-Planck 研究所においては、数人の若手研究者が毎週火曜日の夕方集まって、近くの体育館でバスケットボールの練習試合を行ったものである。自分も必ず参加したが、しかしながら自分はずいぶん一度もあのバスケットの中にボールを入れる事は出来なかった。

その後方針を転換して、もっぱらテニスをする事にした。テニスは大学院の博士課程の時に始めたのだが、このスポーツがこれ程までに自分に合っているとは夢にも思わなかったのである。今は毎週2、3回はテニスをしているが、これは確かに体力の維持には打って付けであると思われる。

ここでは、身体能力の劣る我々物理屋のためのテニス上達法を書き留めて行きたい。テニスは不思議なスポーツでもある。私の連れ合いとは結婚以来30年以上ずっと一緒にテニスをしてきたのであるが、ここに来て50歳後半になってから、突然テニスがうまくなってきたのである。彼女はどんなにひいき目に見ても、運動神経は平均以下である。これを称して運動神経はマイナスであると私は言って来たのであるが、本人はゼロである(平均である)と主張はしている。10年位前に理工学部のテニス部の学生に「ちょっと女房にサーブの打ち方を教えてあげてよ」と頼んだところ、当時、JOP ランキング150位くらいになっていたその若者は喜んで教えてくれた。しかし、15分位たってから「ボールにラケットがあたりませんねー」と言って両者ともに練習を諦めたのである。

その彼女が2年前に突然ボレーが非常に上手に出来るようになったのである。ある時、2人でボレーボレーの練習をしていたのだが、ラリーが確かに十分長く(2、30回)続いていたのである。それを遠くから見ていたテニスコーチである三宅さんが「誰かと思ったら弓子さんだったのね」と言って、本人をひどく喜ばせてくれたものである。実際、私が一緒にテニスをしている三宅さんは、全日本ベテランランキング上位を持つ本当のプロであるが、その彼女が女房のボレーをみて吃驚したのである。

何故、この様な事がテニスでは起こりうるのでしょうか？その理由は簡単である。テニスは道具を使うスポーツであるから、その道具を使いこなす器用さを持っていればたとえ運動神経が悪くても、十分上手くなりうるという事である。そして、この道具(ラケット)を使いこなすある種の「感覚」が身につくとその時に突然上手くなるという事である。尤も、この事は即、試合に勝つと言う事にはつながらない。実際、試合における勝ち負けは、ほとんどが身体能力で決ってしまうので、技術があってもなかなか勝てないものである。しかしながら、結局は、試合の勝ち負けとは無関係に、技術を高めてゆく事そのものが、この上ない喜びである事がわかるものである。

(1) フォアハンドのストローク

テニスの基本はどうしてもストロークになる。バックハンド、フォアハンド共に重要である事は明らかである。しかし、まずはフォアハンドのストロークを安定してしっかり打てる事が大切になる。ところが、フォアハンドのストロークをミスしないでしっかり安定して打つ事は予想以上に難しいものなのである。それは明らかで、フォアハンドの場合、打つ事における自由度が大きすぎて、色々な打ち方が可能であり、従って、ちょっとしたズレがどうしても出てしまうのである。

そこで、それでは安定したフォアハンドのストロークはどの様に打てるのかと言う事が誰にとっても問題になる。そして、その答えはやはり力学的に考える必要があるのである。まず、最も重要な事としては、「ラケットの軌道はどの様にしたら安定するのか？」と言う問題を解決する事である。つまり、何回振っても同じような軌道にラケットが行くためには、どうしたら良いのだろうか？その答えは簡単である。ラケットを持っている腕の脇をまずしっかり締めること。この脇があいているとどうしてもラケットの位置が一定せず、さらには振りの力がラケットの先に伝わってくれないのである。次に、ラケットを振る時には、基本的には腰の回転で行う。つまり、体の上半身をしっかりとひねって、それでラケットを振るのである。この時、腕の振りは最小限にする事。この方法と反対の打ち方としては、腰は回転しないで腕だけで振るものである。結構沢山のテニスプレーヤーはこの腕の振りだけでボールを打っているので、フォアハンドのストロークはなかなか安定はしてくれないのである。この腰の回転のエネルギーをラケットに伝えるためには、腕の振りが腰の回転に巻きついてくる様な感覚でラケットを振る必要はある。物理的には当然の事ではあるが、腰の回転よりも早く腕を振ってしまうと、回転のエネルギーは全くラケッ

トには伝わっていないことになっている。一旦腰の回転で打つ打ち方を会得すると、その後は色々なバリエーションを考えて行けばよい。しかし、大切な事は腰の回転でラケットの軌道をきちんと安定させ、ボールを常に体の正面で取れるようにする事である。従って、通常のストロークラリーでボールをしっかりコントロールして相手に返すためには打つ瞬間にベースラインと直角の方向に自分の体の正面を持って行く事が必要になる。これは、体をうまくさばく事に対応している。この時、顔を少し左に向けてボールをしっかり見る事が大切である。ボールを打つ時は、左肩で打つ感じに入って行く事を忘れてはならない。このボールを打つ事で最も大切な事は、ボールが地面にぶつかりバウンドする時に、すでにボールを打つ全ての準備を完了しているという事である。実はこれが意外と難しく、ちょっと油断するとボールを遅れて打つ事になる。この場合、順回転がうまくかかったボールを打つ事が難しくなるのである。いずれにせよ、これらの事をきちんと実行できるように練習して、後は高価なラケット(?)を使えば必ず上達するものと確信している。

(2) バックハンドのストローク(スライス)

バックハンドストロークでスライスを打つ事は、体の態勢が必ずしも楽なものとはならないために、技術的にはかなり難しくなる。しかし、一度マスターしてしまえば、今度はかなり安定してミスの少ないショットが打てるようになるものである。それは当然で、打ち方に自由度があまり無いため、常に同じような打ち方になるからである。バックハンドをより強く打つために「両手打ち」を開発した人達は確かに凄いとは思いますが、しかし、シングルハンドのバックハンドスライスも実は十分、合理的に打つ事が出来るものである。

バックハンドスライスをきちんと打つためのポイントは、まずボールを打つ時に自分の体が真横になる事である。この点では、フォアハンドストロークの場合と体の向きが丁度逆になっている。テニスでは相手のボールがどこに来るのかを何時も見ていなくてはならないので、一般には、自分の体が相手を真正面に見るように立ちたくなるものであり、これがいわゆるオープンスタンスである。しかしながら、これではバックハンドスライスを打つ事は出来ない。まずは体の位置を90度左回りに回転するのである。そうすると、ボールは常に自分の右手から来る事になる。バックハンドスライスはこの時、ボールを自分の直ぐ前で打つ感じになるのである。ここで、ラケットを握っている右手の手の甲を見る感じで構える。ラケットの先は左肩に乗せるくらいに引き、ボールが来たら右肩で打つような感じでラケットをボールにぶつけて行く。この時、

最も大切な事は右手の肘が少しでも良いから曲がっている事である。バックハンドスライスの場合、まず体を回転をして次に肘を伸ばして最後に手首をひねり、これら全ての回転エネルギーをラケットの先に伝えて、そのラケットでボールをしっかりと打てば良いのである。最後に、エネルギーをラケットの先に伝えるために、ラケットをしっかりと握って締める必要がある。そうすれば、いずれバックハンドスライスがしっかりと打てるようになると思われる。最初はボールを打つ時に、ネットをやっと超えるくらいのつもりで打ってゆけばよい。いずれ、力を入れなくてもしっかりとベースラインに届くスライスボールが打てるようになると思えることができるものである。

(3) バックハンドのストローク（ドライブスピン）

バックハンドストロークでドライブスピンのボールを打つ事は打つ前の体の入れ方に強く依存している。いわゆる片手バックハンドと言われている打ち方は、最初の始動の体勢さえしっかり出来ればそれ程難しいものではない。しかし打つ前にいくつか準備が必要である。まず第1にラケットの握りであり、これはかなり薄く握る必要がある。フォアのグリップと丁度逆になる握りとなる。第2にラケットヘッドを必ず下げる事である。これはフォアの場合とは少し異なり、ラケットの先がほとんど地面にくっつく程だらんとさせれば良い。第3に、打つ前に右肩を必ず入れる必要がある。この右肩を入れる作業が身体能力が乏しい我々物理屋にはかなり大変な準備作業となる事が、このドライブスピンのボールを打つ事の難点である。しかし、準備さえきちりして行けば、この打ち方は予想以上に楽である。特に相手方から速いボールが来た時に対処するには、スライスより楽な場合が多い。しかし、この時どうしても準備が遅くなりがちであり、この問題を解決する事がこのドライブスピンでバックハンドストロークを安定して打つための条件になる。まずは最初の練習として、ネットを少し越える程度のゆるい山なりのボールを打つ練習をして行けばいずれ感覚がつかめてくるものである。しっかり感覚がつかめた後、片手バックハンドで腰の回転がうまく使えてそのエネルギーをラケットに伝えられたら、人によってはフォアでのボールよりも速いボールが打てる可能性がかなりある。これは、刀の居合のスピードを見てもわかるように片手バックハンドの打ち方はかなり合理性があるという事である。

(4) スピンサーブ

テニスを長くやっていて何時も不思議に思う事は、サーブの難しさである。ストロークは相手のボールが強かったり変なスピンの掛かっていたりすると、やはり返球はそれなりに難しくなる。しかし、サーブは全て自分で行うので相手方の影響は全く無いのである。しかし、誰にとってもサーブは難しいものである。ある意味での理由ははっきりしていて、狭いサービスエリアに速いボールを打ち込む事は、原理的に矛盾するために難しいのである。ボールが速ければどうしても遠くまでいってしまうし、ゆるければ相手に強打されてしまうし。力学的にはスピンを強く掛ければ確かにボールの弾道が弧をえがく様になり、狭いサービスエリアに入る確率が高くなるのであるが、その分スピードは無くなる。この矛盾はどう解決できるのだろうか？実はこの問題で随分悩まされたが、ある日ドイツ人のテニスプレイヤーである Boris Becker のサーブのビデオを見て、その矛盾を彼が解決している事がわかり、非常に驚いたのである。彼は、セカンドサーブでは、ボールの右上を強烈に叩いているのである。回転を強くかけ、しかしボールのスピードは失わないためには「ボールをこする」のではなく、「ボールを叩く」必要があるという事である。実際、この事を実行してみたところ、考えられないくらいの回転がかかり、しかもそれ程スピードは落ちない事がわかったのである。さらに、ボールは急速に落下して、確かに相手のサービスエリアにしっかり入ってくれるのである。ボールの落下は、勿論二つの理由による。すなわち、重力による落下と流体力学的な圧力の影響である。今、議論しているのは、当然回転による流体力学的なものである。ここで、回転をしっかりかけるには、ラケットの握り方にもかなり影響される事に注意が必要である。握りはフォアハンドの場合の握りと逆で、相当薄く握る事。もう一つ重要な事は、トスの位置であるが、これは一つにはあまり高くは上げない事、それとなるべく自分の体の方近くにあげる事である。スピンサーブを打つためには、どうしてもボールの上側(右上)を叩く必要がある。この時、トスでボールを高く上げてしまうと、ボールが落下してきたところのその上を叩く必要があり、これは原理的にかなり難しい事になってしまうのである。しかし、トスをした時、ボールが上がってくる所かまたはとまったそのボールの上を叩く事はそれ程難しい事ではないのである。そして最後に、ボールをできるだけ強く叩く事である。実はこれがかなり難しくて一種のコツがいる。最も重要な事は手首の使い方である。ラケットをぐう握りでしっかり握り、手首だけでラケットを振る練習をする事が大切である。この時、手首の返しは手首を少し捻るような感じにかえす事になる。と言うか、それ以外は手

首に負担が掛かってしまうのである。ラケットをぐう握りで持って手首でどうやったら打てるかを実験してみれば自然と手首を少し捻るような打ち方になるはずである。そして、後はボールをいかに強打するかである。この「強打」こそが、最も重要なのだが、これは身体能力の低い我々物理屋にとってはどうしても難しい作業である事がこのスピンスーブの打ち方の難点である。しかし、このスピンスーブが出来ると、バウンドした後に、ラケットの握り具合に応じてボールの跳ね方が変わってくると言う利点がある。これは極めて重要で、サーバー本人は握りを変えている事を知っているのであるが、レシーバーはそれにほとんど気がつかないので、結構レシーブのミスショットが出てしまう事になるのである。

スピンスーブの打ち方を教えて気がついた事であるが、ラケット始動の位置取りが最も重要なようである。その構えであるが、まずラケットを右手で持つ人は左手でヘッドの先を軽く押さえてそのまま両手でラケット全体を頭の上にあげる姿勢をとる。この時、ラケット面は真上を向くようにする事がポイントである。そしてボールの右上を強く引っ叩ければまず間違いなく良い回転が掛かったスピンスーブが打てるはずである。

サービスに限らずスピニングがテニスでは予想以上に重要であるが、これは物理的には明らかであろう。テニスのボールは基本的にいって表面にしか質量がないので、全エネルギーの内、回転エネルギーの比率が野球の硬式球などより大きなもの(約2倍)になっているのである。従って、強く回転(自転)しているボールはラケットをあてるだけだとはじかれてしまう事になる。これはスピニングボールはちょっと目ではその回転度合いが正確にはわからない事にもよっている。

(5) 手首の返し

手首を使う事はあまりにも微妙な問題を含んでいるため、余程注意して取り扱わないと混乱する難しさがある。しかし、どうにもならないくらいの重要性を含んでいる。フォアのストロークで軸の回転を主力にしてラケットを振る事が最も重要である事には変わらない。逆に言えば、この軸の回転がしっかりしていないうちに手首の返しを使うとコントロールが悪くなり、ボールの行き先が一定しなくなる。テニスの基本がコントロールである限り、フォアのストロークの打ち方においては、軸の回転が主力である事がしっかり理解できた後に、この手首の返しの事が可能になる。それでは、どうしたらうまくドライブ回転のボールがしっかり打てるのであろうか？これは、ラケットがボールに

あたる瞬間の問題になる。当たる瞬間かそれよりちょっと前ぐらいに手首をうまく返すのである。こればかりは、感覚の問題であり、言葉で書きつくすことは出来ない。一番わかり易いのは、手首を使わない場合と、使う場合と一緒にやって見せてもらう事である。全く同じ打ち方で手首の返しを使う場合とそうでない場合の違いは、ベースラインから相手コートのベースラインまで打ったとき、大雑把に言って1 m程度のボールの伸び方の差に現れてくると考えられる。これはかなり大きな差であるとも言える。従って、最後に手首をうまく返すフォアの打ち方を習得すると、かなり強くボールを打ってもしっかりベースラインの手前に落下するボールを打つ事が出来て、テニスが飛躍的に楽しくなるものである事は間違いない。

(6) ボールコントロール

どの球技においても、結局最も重要な事はボールのコントロールである事は、試合を経験した者には明らかである。しかしながら、このボールコントロールが予想以上に難しいのである。それは、恐らくは、このボールコントロールには、一種特別な「コツ」が必要である事と関係していると思われる。テニスにおいて、もし10 cm 四方のボールコントロールがあったら、試合はめったな事では負けないくらい強い事になる。

それではどうしたら正確なボールコントロールが可能であろうか？ここではフォアのストロークを中心にして、検討して見たい。腰の回転でボールを打つ事の重要性はすでに述べたが、このボールコントロールはこれだけでは十分ではない。ボールを叩く瞬間とその直後が問題なのである。まず、ボールの方向であるが、これは、自分が打ちたい方向に出来るだけ長くラケットを持ってゆきながら打つと言う事で、大方のベクトルの向きを決定する事ができる。それでは、そのボールをベースラインにきちんと落とすにはどうしたら良いのであろうか？これこそが最も難しい問題である。基本的にはラケットを打つ瞬間に締める（振りを止める感覚）その締め方の感覚を覚える事である。例えば、全く締めないでそのまま振り切ってしまうと、ボールが何処に落ちるのかの保証はない。この微妙な瞬間的な締め方こそが、ボールコントロールを可能にしてくれるのである。さらに言えば、このボールコントロールをする上で最も重要な働きをするのは、右手人差し指の第2関節あたりである。この点が丁度ラケットに接触しているのであるが、基本的なボールコントロールは全てこの人差し指の第2関節が主力になっている。しかし、これは解説しても難しいので、自分でやってみるしか他に方法はないと思われる。

(7) 足の動き

最終的に、腰の回転を主力としてボールを打つ事が出来るようになっても、常に安定したフォアのショットを打つ事が出来るとは限らない。ここで最も重要になるのは足の運び方である。ボールがバウンドする場所を大雑把で良いからすばやく特定し、バウンドした時にはそのボールをすでに打てる体制を作る事が最も重要であることは間違いない。この時、どうやったら右足にうまく体重の一部を乗せられるかが勝負であろう。どの程度の体重を右足に乗せたらベストかは、恐らく人それぞれに異なるものと思われる。この感覚さえつかめればフォアのストロークをしっかりとコントロールしてミスなく打てる事が可能になり、フォアのストロークの精度が著しく向上するものである。

(8) 壁を作る (ブロックする)

ベースライン近くに打ち込まれたボールを相手コートに正確に返す事はテニスでは最も難しい事は誰もが経験している事である。それではこの押し込まれた速いボールをきちんと返球する事が技術的に可能であろうか？ これは実は十分可能なのである。身体能力の低い自分がテニス部の学生とそこそこの試合が出来ている事のかかなり重要な理由 (要素) となっている。

ベースライン際の速いボールに対して壁を作って打つとは「ラケットと自分の体が一体となって壁を作りボールをブロックするように跳ね返す事」である。脇を締めて打つ事はこれまでの解説と同じである。ボールを捉える瞬間、自分の体、腕、ラケットが基本的にはベースラインとほとんど平行になる事が必要である。当然の事であるが、この場合、腕の肘部分は直角近くなるので、ボールの高さの調整は膝を曲げて上体を調節する事により行う事になる。このように壁を作って打つ感覚が身につけばショートバウンドやライジングのボールもある程度は正確に打てるようになる事は確実である。

但し、ショートバウンドやライジングのボールは当然上向きの速度ベクトルがかなり残っている事になる。従って、そのままラケット面をボールの方向と垂直にするだけだと、どうしてもボールが上にあがり過ぎて相手側のベースラインを超えてしまう可能性がある。このため、上向きの速度ベクトルを抑える事が必要で、打つ瞬間にラケット面でボールを少し押さえ込むような作業が必要である。これは感覚だからこれ以上の説明はできないが、トライアンドエラーで必ずうまく打てるようになると確信している。

この壁を作って打つ基本的な操作は野球での打撃やゴルフでのスウィングで

も同じ事であると思われる。まずはブロックして打つ事が基本であろう。テニスの場合、押し込まれたボールに対して、ブロックして打つ事の重要性を解説したが、相手からのボールがそれ程強くはなかった場合、ブロックした後、肘の回転をうまく付け加えると、かなり強いボールを相手方に返す事ができて、これこそが最高の喜びであると自分は考えている。

(9) 道具（ラケット）について

テニスの場合、ボールは基本的にはニューボールを常に使いたいものである。少なくとも試合練習をする時は新しいボールで試合をするのがやはりうまくなるコツでもある。普通の人間には、ボールが新しいとそのボールをより大切に打とうとする習性があると考えられるからである。

ラケットはどのようなラケットが良いのであろうか？これはほとんど明らかである。まずは散乱断面積が大きいためにはラケットの面積が大きい方がよりよいのだが、振り切るためには恐らくは120平方インチくらいで軽いものがベストであろう。さらに、出来る限り 스위트スポットが大きいラケットが良いのに決まっている。スイートスポットが大きいという事は、ラケットによって叩かれたボールの散乱角のばらつきが小さい事を意味しているからである。この事から技術さえ高ければ、より大きな 스위트スポットのラケットが良い事は当然である。この点からするとブリジストンの MD35 というラケットがベストである。これまで長い間様々なラケットを使ってきたが、色々検証した結果、このラケットがすべての条件を満たしていてバランスも非常によい。これは製造した技術者がかなり高い技術を持っていた事を示している。残念ながら、このラケットはかなり前に製造中止となっていて、すでに作られてはいないが、最近5年間で新しく製造されたラケットを見る限り、これに匹敵するものはでていない。

次に、ガットのテンションであるが、これはスピンをしっかり掛けることが最重要課題である事から45ポンド以下にする事が必要であろうと思われる。テンションが高いと洗濯板でボールを打つ事に対応しており、余程手首が強くない限り、正しいスピンを掛けることは普通の人には無理であると考えられるからである。

(10) 凡ミスをなくす方法と練習の始め方

(A) 凡ミスをなくす方法:

テニスの試合に勝つためには、まずは単純なミスを減らす事である。これにはコツがある。それは「ボールを引き付けて打つ事」を修得する事である。ボールを引き付けて打つ事を心がけると言う事は、打つ直前までボールをよく見る事に対応している。大切な事はボールがバウンドした後のそのボールの動きをしっかりと見ておく事である。実際には、この操作は極めて難しいものである。まず動態視力が良くないと不可能な作業である。それとボールがバウンドする場所を素早く特定してその場所にいる必要がある。これらはある程度、訓練によって可能な事ではあるが、最終的には身体能力にも依るかも知れない。

もう一つ重要な事がある。それはフォアのストロークの場合のラケットの動き出しの位置である。ラケットの始動位置がフォアのストロークの安定性に非常に深くかかわっている事は確実である。しかし残念ながら、この紙面で解説する事は不可能な事でもある。

(B) 練習の始め方:

週1 - 2回程度のテニスプレーヤーにとって、練習をどのように始めるかと言う事はかなり重要である。それはまずは早目に動体視力を回復しておく必要があるからである。そのためには最初のラリーの時に、まずはラケットに打たせる練習を何10球か行う必要がある。ベースラインから相手のベースラインまで山なりのボールを「ラケットに打たせて」しかし、正確に打つ事が重要である。このラリーを行う事により、ボールがラケットに当たる瞬間を見極めておく事が大切であり、さらにボールがどのくらい飛んで行くかをきちんと確かめておく必要がある。この作業により動体視力を回復しておき、さらに、ラケットがボールを弾く感覚を再確認しておけば、その後のラリーや試合にスムーズに入ってゆけるものである。

(11) テニスボールの力学

テニスコートの広さはベースラインからもう一方のベースラインまでが23.77 m、ダブルスコートの幅が10.97 m、シングルスコートの幅が8.23 mとなっている。またベースラインからサービスラインまでの距離は18.285 mである。ネットの高さは真ん中が一番低くて0.914 mでボールの高さが1.07 mとなっている。細かい数字になっているのは恐らくもともとはフィートで測っていた

からであろう．これまでボールにスピンを掛けることの重要性を書いてきたが，ここではボールの軌道について考察して行きたい，その際，ボールの回転は無視し，さらに空気抵抗も無視した単純な計算をして大雑把なピクチャーを掴みたいと思う．勿論，空気の抵抗や回転の影響を考慮した計算をする事はひどく難しく，手計算ではとてもできない事が最大の理由ではある．

(1) サーブの場合：

今，簡単のためにベースライン上の中央点からサービスラインに向けてボールを打つとしよう．この場合，初速度を v としてボールを打つ角度を水平から θ 下方に向けて打つ場合を考えよう．

(a) 高さ 2.5 m, 初速度 $v=200$ km/h (時速)：ビッグサーバー

● 結果： この時， θ がゼロ (水平) では全く入らない事がすぐに確かめられる．この場合， θ を 6.5 度にとるとネットでは 1.02 m を通り，サービスライン手前でバウンドする事がわかる．

(b) 高さ 2.0 m, 初速度 $v=100$ km/h (時速)：一般のテニスプレーヤー

● 結果： この場合，水平に打つとネットでは 1.1 m を通り，やはりサービスライン手前でバウンドする事がわかる．

(2) ストロークの場合：

ストロークをベースライン上で打つ場合を考えよう．ベースライン間の距離は 23.77 m である．今，高さ 0.5 m の所でボールを打つ場合を考えよう．まず，水平ではネットを超えない事は明らかである．今度の場合，仰角を θ としてどのくらいの θ だと相手方のベースラインに丁度届くか検証する．但し，初速度を $v=100$ km/h として計算する．

● 結果： $\theta = 10$ 度のときに，丁度ベースラインに落下する事がわかる．この場合，ネットの所では 1.7 m を通過している．角度が 10 度と言うのは，感覚的にはほとんど水平と言う事である．ちなみに，野球の場合，外野手が時速 150 km/h でボールを投げて 外野から 70 m の距離のホームベースに届くためには何度の仰角であれば良いかという問題でも，この角度はやはり 10 度である．

(12) 試合の勝負勘

技術はかなり高くても試合になると弱いと言うテニスプレーヤーをよく見かけるものである。この勝負弱さはその人の性格によるのかそれとも何か他に理由があるのかと言う問題を検討してみたい。但しこれは技術論と違ってあまり根拠がある論証とは言えない。

[1] サービスリターンの場合：

テニスの試合では、相手のコートにボールを返している限りポイントを失う事はない。これが全ての原点である事は明らかである。どうしたらボールを相手コートに返せるか？ 今考えている境界条件は「普通だったら返せるボール」であり、風やコートの不規則バウンドはないと言う条件下である。

- ボールだけを見る事： 試合では必ず緊張するものであり緊張したから下手になると言う事はない。この場合、最も重要な事は「ボールだけを見る」と言う作業をする事である。これは「当たり前でしょう」と言われるかも知れないが、ほとんどの場合、所謂あがっている人の大半は、打つ瞬間でも相手を見たりボール以外の事を気にしている。逆に言えば「ボールに集中する事ができれば普段どおりのショットができる可能性が高いものである。

- 何処に返球するか： シングルスとダブルスの試合ではこれは別のスポーツではないかと思うくらい、方法が異なっている。

[a] シングルの試合では、相手の弱点を早く見つけ出して、そこに返球する事は誰でも考える事であり、これがまず第一にするべき事である。しかし一般的には「できる限り深いボールで返球する」事が最も重要である。この深いボールをベースライン際に打つ事が基本であり、それを何処まで続けられるかが勝負の分かれ目になる。昔、A選手が東京毎日選手権のベテランの部で優勝した翌年、初戦で負けて帰ってきた。この相手のB選手はすべてのボールをロブで返してきたと言う。しかしそのロブが絶妙で必ずと言っていいくらいにベースラインいっぱいに入ってくるショットであった。A選手はバックハンドスライスがフォア並みに速いし、コントロールも非常に良いテニスプレーヤーであったが、相手の深いロビングボールに精神的に耐えられなかったと言う。この事は深いボールを返している限り、簡単にはポイントを失わない事を意味しているのである。

[b] ダブルスの試合では基本的には対角線の返球である。しかしこの場合のポイントにはボールを何処まで引き付けて打てるかに掛かっている。このためにはサーブのボールが何処に来るかという予測と関係している。ボールの落下地点

に素早く入る事が最も重要である．ここでバックハンドで打つ場合はロブを選択する可能性を常に頭に入れておく必要がある．

[2] ラリー中の返球コースと立ち位置：

試合をしていて「コートセンス」が際立ってよいプレーヤーが偶にいるものである．昔インカレ選手だった中村さんとの練習試合では、彼女が立っている位置が常にこちらにとってプレッシャーに感じる場所にいた事に驚いたものである．自分が試合（練習）をした相手の中では彼女が群を抜いて優れており、コートセンスの良さとしか言いようがないものと思われる．恐らくは相手の返球コースを狭くするような立ち位置なのであろうが、理論的な考察はまだできてはいない．

[a] シングルス試合では相手コートの空いている場所を狙って打つ事は勿論基本ではある．しかし、相手が足の速い選手の場合、これが必ずしもベストかどうかは難しい．一般には左右空いている場所に打って、しかし相手がそのボールに追いついてしまうと相手から角度のあるボールが帰ってくる可能性が高いからである．自分のように足が遅い場合、もはや角度をつけられたボールには届かないのである．従って深いボールをセンター付近に返す事がやはり基本になると思われる．

[b] ダブルスの場合は、ラリー中に自分の有利な体制で打つ時に何処に打つのが良いか、これは割合ははっきりしている．前衛に人がいたら、その人がギリギリで届くか届かないかと言うコースに打つことである．この場合前衛に偶々決められる確率は勿論有限であるが、恐らくは決められる確率は3割以下であろう．前衛に人がいない場合は、打たせるべき相手方プレーヤーがバックハンドで取る事になるような深いボールを打つ事である．

(13) メンタルな強さ

試合に勝つにはメンタルな強さが必要であるとよく言われるし、またその通りであろう。それではメンタルな強さとは何なのであろうか？勿論、いろいろな側面があるとは思いますが、そのうち、身体能力の劣る我々物理屋にとって重要なメンタルな強さがあるので、それをここで解説しよう。メンタルな強さとは試合中に自分のストロークなどの調子が狂ったときに素早く元に戻す能力である。当然、調子のアップダウンは誰にでも起こることなので調子が悪くなったとき、それを素早く良い状態に回復する必要がある。それではどうしたら、良い状態に素早く戻せるのであろうか？これはテニス技術の理論をしっかりと理解していることが条件となっている。テニスの打球感覚だけではなく、その技術論がわかっているならば、自分の悪い状態の打ち方をいち早く修整できて、これがメンタルに強い選手に対応している。

この事はテニス技術の基本的な理論をきちんと理解する事が、実は、メンタルに強くなるためのほとんど唯一の方法であることを示している。試合では、相手は必ず打ちにくいボールを配給してくる。例えば、走りながら打たざるを得ないボールとかベースラインギリギリのボールとかである。この場合、走りながら打つとどうしても腰の回転で打つ事ができないものである。しかしこの時、早めに手打ちを直して腰の回転でしっかり打って行けば、また次第に良いショットが打てて自分のポイントにできる可能性が増えるものである。またベースラインのボールをしっかり壁を作って打つ事を常に心がけていることが大切であり、この「壁の理論」をきちんと理解しておくことが条件となっている。

これまでは基本的にテニスが上達するための技術論を主に解説してきたが、これは勿論、試合に勝つためにすぐに有効であるとはいえない。それは試合に強いテニスプレーヤーの場合、その調子が良いときは常に合理的な打ち方を本能的にしているからである。従って、試合においてテニスの技術が果たす役割はせいぜい50%程度であろう。それにもかかわらず、そのテニス技術論を一定以上に深く理解していると、メンタルな強さを発揮できるものである。

(14) まとめ

結局、シングルの試合に負けないためにはベースライン際に深いボールを打つ事に尽きるようである。これを続けても勝つ事が出来るとは限らない。負けないと言っているだけであり、勝つためにはもう一つの重要な要素がある。それは「忍耐力」である。しかしこれはここで検討しても無駄かも知れないが、しかし勝ちたい気持ちが忍耐につながれば勝つ可能性が高くなる事は間違いないと思われる。

ダブルスの試合では2人の連携具合に強く依存している。少なくとも、シングルの足し算では決してない事が試合の進め方を複雑にしている。従って連携を良くする事以外に、建設的なコメントはあまり出来ない。

テニスの試合は確率のスポーツの側面があり、その上、その日の運・不運に強く依存している。ライン上にボールが掛ければポイントになり、ボール1個でも外れれば相手のポイントである。

20年くらい前、テニス部のキャプテンだった学生とシングルの練習試合をしたのだが、5 - 5になった段階で彼の方から言ってきた「6ゲーム先取にしますかそれとも2アップにしますか」と。その時あまり考えないでそちらに任せますと返事をした。まだタイブレークが一般的ではなく彼は2アップを選んだが、それからが大変であった。確か12 - 14で自分が負けた事ははっきり覚えている。しかしながらこれは自分にとってテニスの最高の思い出の一つであり非常に楽しいゲームでもあった。

テニスでの試合で最も重要な事は、楽しむ事である。勝ったら単純に喜ばばよいし、負けたら相手を褒めればよい。それがすべてである。

追記 : 2017年5月

テニスの技術に関する小ノートを書いてからすでに数年が過ぎている。この間、様々な人達にテニスの技術に関してお話してきたのであるが、もともとは物理屋を対象にして、力学的な観点からテニス技術を議論してきたわけである。しかし現在まで、テニスの技術論をお話してきた人達の大半は物理屋とは無関係であったが、予想以上に多くの人々が興味を持ってくれたようである。

- ガットのテンション : その中で、最も重要であると感じたことは、実はガットのテンションの問題である。卓球において、ピンポン玉に回転をかけるためにはラケットラバーを摩擦があるものにかえる必要がある事は周知の事実である。実際、木のラケットで強いスピンをかけるのは容易なことではない。それと同じで、ガットのテンションが例えば、55ポンド以上に高いとスピンを掛けることはかなり難しいと思われる。あるいは、強靱な手首があれば可能かもしれないが…。実際、ガットのテンションを40 - 45ポンドにしたらスピがよく掛かるようになったと多くの人達が驚いたように証言している。

- 高速のドライブスピンのボール : 結局、45ポンド前後のガットテンションのラケットを非常に厚く(自分に合うように)握ってほぼ水平にボールを強くそしてうまく引っぱたく。この時、叩いた瞬間は摩擦のため回転に衝撃エネルギーが行き、しかし水平方向の速度ベクトルは保存されるため、スピードボールでもベースラインの内側に入ると言うことである。

- 自分のスピンのボール : ショットを正確にコントロールするために最も重要なことは、打ち返したボールのスピンを自分のスピンに変える事である。そうすれば、ボールが自分の回転のボールになりミスショットが著しく減るものである。この自分の回転のボールにするという操作はラケットでボールを叩く瞬間の感覚的なものであり、必ずしも教えられることではない。そしてそれがテニスの面白さであろうと考えている。しばらく前に、Nさんに片手バックの打ち方を教えた時があった。それは1時間程度であったが、その短い時間に彼は片手バックの打ち方をほぼ完全にマスターして、そのボールに自分の回転をかける事ができていた。このため、次の試合練習では片手バックが十分正確になっていて周りを驚かせたものである。彼には「最初はラケットを地面につけるくらいにして、ボールをラケットに乗せるようにしてスピンをかけ、そのボールが山なりでネットを超えることを目標に打つ事」を教えただけである。

- ラケットを放り投げる : テニスで一番、難しいのがサーブであることに変わりはない。実は、サーブで速いボールを打つためにはコツがあり、それはラ

ケットを放り投げるように打つことである。しかしこれは危険を伴う可能性があり、教えることが易しいとは言えないものである。

閑話休題 5 : 物理は 50 歳台から

自分は学部生の頃も院生の頃もそしてその後の研究者になってからも、物理の勉強をやたらめったらやって来たと思う。それは物理を理解する事がひどく楽しかった事が一番大きな理由であると思う。しかしながら、物理を少しわかり始めたのは実は 50 歳台になってからである。それまでの理解は今の状態と比べると冷や汗が出るほどレベルが低いものである事が自分にはわかっている。物理はそれだけ難しいと言う事である。

21 世紀になって、これまでの研究スタイルを少し変えて、場の理論により束縛状態をしっかりと理解できないものかと思うようになり、最も簡単な 2 次元の場の理論を研究し始めた。特に、Thirring 模型は非常に面白い模型で、最初は恐らく QED の単純化した模型として Thirring により発表されたのであろうが、実際にはそれ自体が場の理論の模型として物理的に意味があり、特にカイラル対称性の観点から面白い事がわかったのである。2002 年の 6 月、この Thirring 模型における新しい計算を終えて、平本君と一緒に論文を書き上げそれをアメリカの雑誌 (Physical Review) に投稿した。フェルミオンが有限質量を持つ場合の Thirring 模型においては、有限質量のボソンが 1 個存在すると言う証明をした論文であった。この論文に対して、投稿後 5 日後にはレフリーから直接コメントが来て、論文の発表は許可するが 1 個参考文献を入れる事という条件が付けられた。そのレフリーはオーストリアの大学の先生であるが、我々も直ちにその引用すべき論文を読み始め、同時にその論文を引用した新しい論文を投稿した。そしてこの論文はそのまま 2 週間後には発表を許可され、自分の論文の中では最も短い時間で発表された論文になった。

ところが、彼らレフリーの論文を読み始めて、その内容が示している事実に仰天し、そして直ぐに我々自身の計算を行った。その結果、驚きのレベルを超えてしまう事実がわかってしまったのである。それは、これまで自分を含めて誰も疑った事のない問題、すなわち、自発的対称性の破れの理論を否定する計算結果が出ていたのである。先のレフリー達はその結果に対して、何とかこれまでの南部達の理論と整合性を取るため、様々な言い訳をして、自分達の計算がまだどこか不十分であるという事を主張していたのである。しかしながら、

我々の計算結果は彼らよりもはるかに精密で正確であるので、計算結果が正しい事は明らかであった。すなわち、南部 - Goldstone の定理がどこか間違っていると言う事である。これは大変な事になったと自分でも驚き、それからはそれこそ狂ったように調べ、計算しそして考え続けたものである。

詳しい事はすべて場の理論の教科書 ([2, 3]) に書いておいたので、そちらを参考にして貰う事にして、結果だけを簡単にお話しよう。南部 - Goldstone の定理は数学の定理であるが、これを自然界に当てはめる事は出来ないと言う事である。この理由は簡単で、自然界にフィットするには様々な条件をクリアする必要があり、Goldstone の定理はそれらを充たしてはいなかったのである。特に南部 - Jona-Lasinio の論文は、残念ながら、どうみても信用できるとは言えないものであった。実際、カイラル対称性が自発的に破れるという事はなく、彼らが使った近似法のために見かけ上カイラル対称性が破れたように見えただけであった。物理的には、彼らの模型では真空のカイラル電荷が有限となったのであるが、これが自由場の真空（カイラル電荷はゼロ）とは異なっているという事であったのである。そして、その有限のカイラル電荷を持つ新しい真空の方がカイラル電荷ゼロの真空よりも低くなっている事は事実であるが、カイラル対称性が破れているわけではない。さらに南部達の論文の計算における深刻な間違いは、ボソンを計算する時のフェルミオンの真空の取り方に関する問題であった。折角、有限のカイラル電荷を持つ真空の方が低くなると言う事を発見したのに、彼らの計算は自由場の真空を基礎にして行われているのである。場の理論においては、真空を正しく選ぶという事は最も重要である。それはその状態から次々と他の励起状態を作っていくからである。このため、真空が正しくないと、非物理的な状態 (Goldstone ボソン) を予言してしまうのである。その後、Thirring 模型における Bethe 仮設による計算で、有限のカイラル電荷の真空の厳密解が見つかった。この最も難しい模型計算が平本、高橋、本間の 3 氏との共同研究により偶然、完璧に解く事ができ、真空のエネルギーを含めて全てが解析的に求められたのである。このため「対称性の破れ」の物理は一挙に明瞭になった。南部達も使ったし、我々も最初の頃は用いていた Bogoliubov 変換による手法は厳密でない事はすでに知られていたが、それがどの程度の近似法かが明白になったのである。その近似解法だと一見、対称性の破れが起こるように見えただけで、従って「自発的対称性の破れ」に付随してでて来るべきボソンなど、当然、どこにも存在しない事が証明されてしまったのである。

これらの事をベースにして場の理論における様々な問題を検証したところ、あちらこちらにほころびが見つかり、ある時期は一時呆然としてしまったもの

である。しかしながら、人々が信じている理論を批判すれば、それに対して、「教科書を読みなさい」という同じオーム返しのような批判のコメントが常に洪水のように戻って来るし、そうかといって、そのままにして置くわけにはいかないし…。それ以上に深刻なのは、その物理の分野で物理上の業績としての「既得権」を持っている研究者達の反応である。これは「凄まじい」のレベルを超えるものであった。確かに、この本で議論しているように、一般相対論が間違っていて、その代わりに新しい重力理論が作られた事は若い研究者にはやるべき事が増えて面白い事に違いない。しかし、例えばブラックホールの物理で名をあげた人達はその業績がゼロになるわけであり、難しい問題をはらんでいる事は確かである。しかしながら、物理は自然を理解する学問であり、それ以上の事もそれ以下の事も人間が出来るものではない。いずれにせよ、これまで物理の研究が楽しくて楽しくて仕方が無いという状態だったのに、この時ばかりは多少がっかりしたり、情けなかつたりしたものである。結構信頼していた物理屋がとんでもない事を言って来たりで、さすがにその頃は人と議論する事さえ疎ましく思われたものである。この問題の最も大きな原因は素粒子物理の理論屋にある気がしてならない。確かに素粒子論は常に時代の最先端を学ぶ学問である事は事実である。しかし、だからといってその研究者が学問を深く理解しているかというところがなくなっていき、現実には全く逆の現象になっている。すなわち余程しっかり謙虚に勉強している研究者でない限り、素粒子論研究者は一般的に言って基本的な物理の理解がかなり浅いものである。この原因として、70年代以降これまでの素粒子論の専門家は現象(実験事実)をしっかり捉えて理解するという努力を怠ってきた物理屋が大半である事によってと思われる。この事は、80年代以降、素粒子物理における実験的な進展がほとんど見られなかったため、ある種の閉塞感があった事とも関係しているかも知れない。

このように、様々な状況における八方塞がりのときに、自分が一番支えられたのは、やはり自分の研究室の院生諸君であった。私の研究室に来た日大理工物理の院生のレベルの高さには、何度も驚かされたものである。物理の理解が正確であるばかりか、やはり物理そのものをしっかり理解したいという情熱にあふれた人達が自分の所に学生として来たのであった。これは本当に幸運としか言いようがないものである。これに加えて、西島先生の様々なコメントと励ましは大きかったものである。自分が大学院進学の際に、西島先生の研究室を選ばないで原子核理論に行った時、「何で来なかったのだ…」と言われて以来ずっと、何だかんだと随分と先生にお世話になってきたが、この時期数年間の物理学上でのサポートは、言葉では表せないほどの大きな意味を自分には持つ

ていたのである。特に、自分の書いた教科書の内容と重力理論の論文に対して、非常に貴重なコメントをして頂き、また想像を遥かに超えた励ましをして頂いたのである。その意味では、これまで、物理を深く考え、正確に理解している人が自分の身近におられた事は、この上ない幸運であったと思う。

これは最近の出来事ではあるが、20数年前に修士を卒業した大木君が、私が退官する前に会いたいと言って研究室に訪ねて来た。彼は昔から物理の理解が異常に深い学生であったが、10年ぶりに再会するなり「以前、一般相対論のチェックをしたら水星の近日点も GPS も観測とは逆に出てしまった。だからあれはおかしいですね」と言い出したのでこちらの方が吃驚した。また、彼は「これは藤田さんが10年前に一般相対論は間違っていると言われたからチェックしてみた事です」とも言っていた。それで最近 Bentham 出版社から出版された本を紹介して解説したところ「ここに来る前と後で物理の景色が激変した」と言ってひどく喜んでくれた。この10年間、一緒に議論する機会はなかった人が物理の全ての内容を即座に理解し、またある意味でそれ以上のコメントをしてくれた事は本当に嬉しい限りである。自分が孤立している事は重々承知をしているが、しかし彼と話をして「科学は多数決で決まてはいけない」と言う当然の事を再確認した次第である。その日はワイン2本を卒研生と3人で飲んだのだが、その途中、大木君が西島先生の「Fields and Particles」の古本を取り出した。電車の中で読んでいるとの事であるが、突然「この本あげる」と言ってその卒研生にひょいと渡したのには仰天した。この古本はかなり高価であるが、大木君にとっては、物理を極めて深く理解している4年生の存在が昔の自分自身と重なったからであろうか。

冒頭に書いたように、自分は物理の理解とその研究に膨大な時間を注ぎ込んできた。それが可能であった事は本当に恵まれていると思う。最近の若手研究者を見ると多くが共働きである。そして子供の面倒を見る事は勿論両者が行う事になる。現実を見る限り、その若手研究者達は研究に割くべき時間が大幅に削られている気がする。共に働く限りは他に方法は無いとは思ふ。しかしながら、これでトップレベルの研究が出来るかどうか難しい問題である。少なくとも、やたらめったら勉強している人達に対抗できるかと言えば、やはり答えはほとんど不可能という事になるだろう。その意味で、自分の研究がこの様に高いレベルで出来た事は、明らかに一人でやれた事ではなく、連れ合いと二人で一緒にやってきたから可能であったと断言できるものである。その意味で、非常に辛い言い方ではあるが、研究者にとっても、共に働く事の功罪をしっかりと認識する事が重要である気がしてならない。

関連図書

- [1] Fields and Particles
K. Nishijima, W.A. Benjamin, INC, 1969
- [2] Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory
T. Fujita, Nova Science Publishers, 2011 (2nd edition)
- [3] Fundamental Problems in Quantum Field Theory
T. Fujita and N. Kanda, Bentham Publishers, 2013
- [4] Bosons after Symmetry Breaking in Quantum Field Theory
T. Fujita, M. Hiramoto and H. Takahashi
Nova Science Publishers, 2009
- [5] New Fundamentals in Fields and Particles
T. Fujita (editor), Transworld Research Network, 2008
- [6] J.D. Bjorken and S.D. Drell, "Relativistic Quantum Mechanics",
(McGraw-Hill Book Company,1964)
- [7] J.J. Sakurai, "Advanced Quantum Mechanics", (addison-Wesley,1967)
- [8] B.W. Parkinson and J.J. Spilker, "Global Positioning System", Progress
in Astronautics and Aeronautics (1996)
- [9] Simon Newcomb, "Tables of the Four Inner Planets", 2nd ed. (Washing-
ton: Bureau of Equipment, Navy Dept., 1898).
- [10] B.G. Bills and R.D. Ray. (1999), " Lunar Orbital Evolution: A Synthesis
of Recent Result