

電 磁 気 学

(現象と理論)

藤田 丈久

はじめに

自然科学の研究においては疑問がすべての原動力であり、その「何故」を幾つかの基本法則を基にして解決してゆこうとする学問が物理学である。例えば最近の疑問の一つとして、電話の有線通信と電波による無線伝達がほとんど同じスピードになっている事実がある。電波は光なので光速による伝達は当然であるが、有線通話の情報伝達は電子の運動によっており、それでも光速に負けないのは何故だろうか？この疑問には、この教科書を読み進み、きちんと理解できれば正確に答えることが可能となる。その電子の流れ（情報の伝達）も電磁波（光）も共に電磁気学で理解すべき対象であるが、電流では「電位差」が空間のみの関数である事の認識が最も重要であるのに対して、光は粒子なのに波の性質を持ち、さらに静止系が存在しない事が本質的である。

自然界は物質により構成されており、その物質の構成要素である陽子と中性子が原子核を構成し、さらにはその原子核と電子が多種多様な原子を作り出している。原子は更に分子を形成して、その分子により様々な物質が自然界に作られ存在している。原子核を形成する基本力は強い相互作用であるが、原子・分子に関係する力はすべて電磁的な相互作用である。そしてその中心的な役割は勿論、電子が担っている。従って電子の動力学とその性質をしっかりと学び、その言葉で自然現象を理解して行く事がこの教科書の目標となっている。

日常生活に関係する現象においてその基本的な構成粒子は電子とイオンである。イオンとは原子中の電子が複数個、原子から取り去られたもの（正電荷のイオン）か電子が余分に原子に付いたもの（負電荷のイオン）である。これら電子とイオンの運動を支配する法則がMaxwell方程式とSchrödinger方程式であり、それらの方程式に現われる力はすべて電磁気的な相互作用である。ただし地球上における自然現象の中には重力が重要になる場合もあるが、この教科書では重力の影響を考慮した議論はしていない。いずれ溶液における電磁場の振る舞いを考え始めると重力を考慮する事が必要になると思われる。

電磁気学は電場 E と磁場 B に対するMaxwell方程式が基礎方程式であり、これは実験から求められている。その意味では、Maxwell方程式が何か別のより基本的な方程式から導かれるわけではない。この点はNewton方程式とは異なっている。Newton方程式もある意味では実験を記述するために作られたものであるが、その方程式はSchrödinger方程式から座標等の期待値を取る事により、その期待値に対する方程式として求められている。

電磁気学は難しい学問であり、学生にとって常に最も難渋する科目である事は間違いない。その点では力学の問題は明解であり、1体問題を扱う場合が大半で、その場合質点の座標がどのような時間の関数になっているのかを解けばよい。これは初期値問題の微分方程式がしっかり解ければ、例えば Kepler 問題が理解される。しかしながら、電磁気学の難しさの主な原因は Maxwell 方程式における微分方程式の複雑さにあるわけではなく、その右辺にあらわれる電荷密度と電流密度の多様性とその繁雑さにあり、これが深刻な問題となっている。さらにこの電荷密度と電流密度は物質が生み出しているのも Maxwell 方程式とは直接関係あるわけではない。そしてその物質の性質はその物質固有のものであるため、それぞれを別個に解く必要がある。さらに実際問題としてはこれが量子力学的な多体問題であるため、ほとんどの場合、それを解く事は不可能なのである。例えば、良く導体における電荷分布とか導体を流れる電流などに関係する問題が出てくるが、この時、「導体とは何か」の定義が今ひとつ不明瞭なのである。これは導体が物質であるため、どうしてもそれがそれぞれの物質によって微妙に異なる性質を持っている事と関係している。さらに誘電体においては、その定義を余程しっかりしない限り、新しく学ぼうとしている学生にとっては何を言っているのか理解できない方が当然なのである。

これらと関連して、言葉を厳格に使うとすると、 $\mathbf{B}$ は磁束密度と呼ばれている物理量である。これは物質中に磁気双極子モーメントの集団があると磁場が影響して少し変わってしまうからである。しかし、これは電場の場合と異なり、影響を受けるのは磁場 $\mathbf{H}$ の方である。むしろ、磁束密度 $\mathbf{B}$ の方が電場と同じでより基本的な物理量に対応している。通常の議論では磁場と磁束密度を混乱して使用しても物理に影響はないので、 $\mathbf{B}$ をそのまま磁場としても使って行こう。

この本の解説のうち最も重要な部分として、電流についての新しい物理的描像について説明している。これまでは古典力学の枠内で電流と抵抗を理解しようとする教科書が大半であるが、この描像は物理的に正しいものとは言えない。伝導電子のエネルギーは非常に小さく、従って完全に量子力学的である。電流とは、電子が電位差を感じた瞬間に近隣の原子に飛び移る事によって生じる情報の流れである。これはおよそ古典力学的な描像とは相容れないので、抵抗を Newton 力学での摩擦として理解する事は避けるべきである。また、量子力学において状態の平均を取ると確かにそれは古典力学の方程式になるのであるが、電流を考える場合、この平均は統計的な平均であり、量子力学的な期待値としての平均ではない事に注意する必要がある。

しかし、これらの知識を持ってしても、オームの法則を理論的にきちんと理

解する事は非常に難しい。実験的には確かな式であるが、しかし、伝導電子が飛び移る時に格子の原子系と相互作用してエネルギーを失う過程を正確に記述できる理論計算が極めて困難である事が主な原因である。恐らく、この現象をきちんと理解できた時に初めて、正しい超伝導の理論が作られるのであろう。

この本では電磁気学の基本法則をしっかり理解できるよう最大限の努力をしている。一般的に言って物理学においてはそれが基本的であればあるほど理解は難しいものであり、余程じっくりと考える事が必要である。我々は数学を言語として使っているので数式変形での疑問は数学公式集を参照すれば良く、物理においては自分の描像を自分の中に作って行く事が最も大切である。

この本の後半では、電磁気学を場の理論としてみる定式化も説明して行き、現代物理の持つ様々な問題点に関しても、その理解を深めてゆけるように解説して行こう。当たり前のことではあるが、電磁気学に限らずその学問の知識を覚える事とそれを理解する事は別問題である。電磁気学の教科書をすべて丸暗記したとしてもそれをきちんと理解していないと電磁気学を正しく応用する事は出来ない。この事をしっかり頭に入れてこの本を読みそして理解して欲しいと願っている。その理解を確実にするためには、各章に入れてある例題や章末の演習問題を解きそしてその問題をじっくり考える事が大切である。この作業を繰り返す事により電磁気学を理解してそれを応用する力を養う事ができるものと考えている。なお、演習問題の解答はネットで公開しておこう。

この教科書では必要に応じて断りなしに自然単位系 ($\hbar = 1$, $c = 1$) を用いている。物理の理解に影響がない限り、単位系は適当に扱っている。自然単位系から元に戻したい場合は、 $\hbar c \simeq 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ を用いればよい。また、長さの単位である $\text{fm} = 10^{-13} \text{ cm}$ はフェムトメートルと呼ばれるがフェルミと呼ぶ方が素粒子・原子核の議論ではより現実的である。同様に $\text{\AA} = 10^{-8} \text{ cm}$ (オングストローム) を使う事は原子・分子の理解には重要だと考えている。それらはそれぞれ典型的な大きさのスケールをうまく表しているからである。(藤田)

目次

第 1 章 電磁気の風景画	1
1.1 日常の電磁現象	2
1.1.1 静電気：摩擦帯電	2
1.1.2 圧電効果	3
1.1.3 電流と電池	3
1.1.4 電気による照明：熱輻射か電子の量子状態遷移か？	4
1.1.5 電波・電線による通信	5
1.1.6 レーダーとレーザー光	5
1.1.7 黒体輻射と電磁波の放射	6
1.1.8 オーロラと地球磁場	8
1.1.9 電磁誘導の現象	8
1.2 Maxwell 方程式	9
1.2.1 Poisson 方程式と Laplace 方程式	10
1.2.2 重ね合わせの原理	10
1.3 電場	11
1.3.1 Coulomb の法則	11
1.3.2 電場と電位と電位差	12
1.3.3 電荷の物理的意味	13
1.3.4 電気双極子モーメント	13
1.3.5 連続方程式と電荷保存	14
1.3.6 電荷保存の描像	15
1.4 導体と半導体と誘電体	15
1.4.1 導体	16
1.4.2 半導体	17
1.4.3 誘電体	17
1.5 磁場	19
1.5.1 磁荷 (モノポール)	19
1.5.2 磁気双極子モーメント	19

1.5.3	磁化と磁石	20
1.5.4	超伝導と Meissner 効果	21
1.6	電磁場と粒子の閉じ込め	22
1.6.1	コンデンサー	22
1.6.2	コイル	22
1.6.3	イオントラップ	23
1.6.4	磁気トラップ	23
1.7	電磁誘導	23
1.7.1	発電機構	24
1.7.2	誘導加熱：IH	24
1.8	荷電粒子と磁場の相互作用	24
1.8.1	Lorentz 力	25
1.8.2	モーター	25
1.9	電磁波 (光, フォトン)	26
1.9.1	フォトン (光子)	26
1.9.2	フォトンの生成・消滅の相互作用	27
1.9.3	フォトンの性質：波長と偏極ベクトル	27
1.9.4	空の青さと光の散乱	28
1.9.5	太陽光発電	30
1.9.6	電子レンジ (Microwave oven)	30
1.10	第 1 章の演習問題	32
1.11	閑話休題 1	33
第 2 章	電場と電位	34
2.1	電場	34
2.1.1	1 個の電荷が作る電場	34
2.1.2	2 個の電荷が作る電場	35
2.1.3	n 個の電荷が作る電場	35
2.2	電位	36
2.2.1	n 個の電荷の作る電位	36
2.2.2	2 個の電荷 $[q, -q]$ の作る電位	37
2.2.3	電気双極子	38
2.2.4	球状一様電荷分布の作る電位	39
2.3	第 2 章の演習問題	41
2.4	閑話休題 2	42

第 3 章 Gauss の法則	43
3.1 Gauss の法則 (微分形)	43
3.2 Gauss の法則 (積分形)	44
3.2.1 点電荷密度分布	45
3.2.2 球内に一様電荷分布	46
3.2.3 平面に一様電荷分布	47
3.2.4 球殻に一様電荷分布	48
3.2.5 球殻に一様電荷分布の電位	49
3.2.6 2 個の球殻間の電位差	50
3.3 第 3 章の演習問題	51
3.4 閑話休題 3	52
第 4 章 Poisson 方程式	53
4.1 Laplace 方程式	53
4.1.1 Laplace 方程式とその極座標解	53
4.2 Poisson 方程式	54
4.2.1 点電荷の場合	54
4.2.2 平面上の電荷分布	54
4.2.3 一般の電荷分布の場合	55
4.2.4 球殻に一様電荷分布：Poisson 方程式による解	56
4.3 鏡像法：境界条件付き Poisson 方程式	57
4.3.1 境界条件付き Poisson 方程式の解法	57
4.3.2 $x - y$ 平面での電場	58
4.3.3 電気双極子の鏡像法	59
4.4 Green 関数	60
4.4.1 Green 関数の導入	60
4.4.2 Green 関数の解法	60
4.4.3 Green 関数の物理応用への注意点	61
4.5 何故 ϕ はいつも $\frac{1}{r}$ の形なのか？	62
4.6 第 4 章の演習問題	63
4.7 閑話休題 4	64
第 5 章 電場のエネルギー	65
5.1 荷電粒子間のエネルギー	65
5.1.1 N 体系の電位と電場のエネルギー	65
5.2 電場のエネルギー	66

5.3	電場のエネルギーの具体例	67
5.3.1	点電荷の自己エネルギー	67
5.3.2	導体球のエネルギー	67
5.3.3	球状一様電荷分布のエネルギー	68
5.4	第 5 章の演習問題	69
第 6 章	電気容量	70
6.1	平板の電場	70
6.2	コンデンサー	70
6.2.1	コンデンサーの容量	71
6.2.2	コンデンサーのエネルギー	71
6.2.3	コンデンサーに導体を挿入	72
6.3	第 6 章の演習問題	73
第 7 章	誘電体	74
7.1	分極	74
7.2	分極電荷分布と誘電率	75
7.3	誘電体のミクロな解釈	75
7.4	誘電体と電束密度	77
7.4.1	誘電体の境界	77
7.5	誘電体の電場のエネルギー	78
7.6	誘電率 ϵ のコンデンサー	78
7.7	第 7 章の演習問題	79
第 8 章	物体に働く力	80
8.1	電荷に働く力	80
8.2	電気双極子に働く力	80
8.3	コンデンサー平板間に働く力	81
8.4	電磁場と荷電粒子の相互作用	82
8.5	第 8 章の演習問題	83
第 9 章	定常電流	84
9.1	電流 (カレント)	84
9.2	オームの法則	85
9.2.1	電流 J	86
9.2.2	電気容量 C と電気抵抗 R	86

9.2.3	$RC = \frac{\varepsilon}{\kappa}$ の物理的意味	87
9.3	Kirchhoff の法則	87
9.4	第 9 章の演習問題	88
9.5	閑話休題 5	89
第 10 章	電流の作る磁場	90
10.1	Biot-Savart の法則	90
10.1.1	Biot-Savart の法則と Ampère の法則	90
10.1.2	直線電流の作る磁場	91
10.1.3	円電流の作る磁場	92
10.2	Ampère の法則 – 積分形	93
10.2.1	直線電流の作る磁場	93
10.2.2	平面電流の作る磁場	94
10.3	電流に働く力	95
10.3.1	例題：円電流と直線電流に働く力	95
10.4	ベクトルポテンシャルと Biot-Savart の法則	96
10.4.1	ゲージ不変性	96
10.4.2	Biot-Savart の式の導出	97
10.5	第 10 章の演習問題	98
第 11 章	磁場と磁性体	99
11.1	磁場のエネルギー	99
11.2	磁性体	100
11.2.1	円電流の作るベクトルポテンシャル	100
11.2.2	磁化	101
11.3	磁気双極子の物理	103
11.3.1	磁気双極子	103
11.3.2	磁気双極子と磁場の相互作用エネルギー	103
11.3.3	磁気双極子 m_1 と m_2 間の相互作用エネルギー	104
11.4	超伝導	105
11.4.1	Meissner 効果	105
11.4.2	超伝導体の電気抵抗	105
11.5	強磁性体	106
11.6	第 11 章の演習問題	107

第 12 章 電磁誘導と磁束	108
12.1 Faraday の法則 (電磁誘導)	108
12.1.1 磁束	109
12.1.2 ベクトルポテンシャルでの表現	109
12.2 Maxwell 方程式: $\{\phi, \mathbf{A}\}$ による表記	110
12.3 起電力の例題	110
12.4 インダクタンス	111
12.4.1 インダクタンスの例題 (1)	111
12.4.2 インダクタンスの例題 (2)	112
12.5 LCR 回路	113
12.6 第 12 章の演習問題	114
第 13 章 電磁波	115
13.1 Maxwell 方程式	115
13.1.1 変位電流	116
13.2 電磁場のエネルギー	116
13.2.1 電磁場の仕事率	116
13.2.2 電磁場のエネルギー: 例題 RC -回路	117
13.2.3 電磁場のエネルギー: 例題 LC -回路	118
13.3 電磁波: 直感的な記述	119
13.3.1 電磁波とベクトルポテンシャル	119
13.4 電磁波の発振機構: 古典描像	120
13.4.1 電磁場と電子との相互作用	120
13.4.2 電磁波の発振機構	121
13.5 電磁場の量子化	122
13.5.1 場の量子化	122
13.5.2 量子化された電磁場のエネルギー	123
13.6 偏極ベクトルの物理	123
13.6.1 偏極ベクトルの運動方程式	123
13.6.2 偏極ベクトル $\epsilon_{k,\lambda}$ の描像	124
13.7 フォトン (電磁波) の性質	125
13.7.1 フォトンの状態関数	126
13.7.2 フォトンの偏光	126
13.7.3 偏極ベクトルの群論的解説	127
13.8 フォトンの弾性散乱	128

13.8.1 Compton 散乱	128
13.8.2 Thomson 散乱	128
13.8.3 Rayleigh 散乱	129
13.9 第 13 章の演習問題	130
13.10 閑話休題 6	131
第 14 章 磁場の量子力学	132
14.1 電子と電磁場の相互作用	132
14.1.1 電磁場中の電子の Hamiltonian	132
14.1.2 電子と磁場の相互作用	133
14.2 古典力学：サイクロトロン運動	133
14.3 量子力学：Zeeman 効果	134
14.3.1 傾斜磁場と MRI	135
14.4 磁気トラップ法	136
14.4.1 量子論のエネルギーとトラップ	136
14.4.2 レーザー冷却	137
14.5 第 14 章の演習問題	138
14.6 閑話休題 7	139
第 15 章 量子電磁力学	140
15.1 量子電磁力学の Lagrangian 密度	140
15.2 Dirac 場の量子化	141
15.3 S-行列による計算	142
15.4 量子電磁力学 (QED) の繰り込み理論	142
15.4.1 電子の自己エネルギーと繰り込み	143
15.4.2 フェルミオンのバーテックス補正	143
15.4.3 フォトンの自己エネルギー	144
15.4.4 真空偏極を含む物理過程	145
15.4.5 物理的観測量は有限量	146
15.5 量子場の理論	147
15.5.1 重力	147
15.5.2 強い相互作用	147
15.5.3 弱い相互作用	148
15.5.4 伝播関数のまとめ	149
15.6 第 15 章の演習問題	150
15.7 閑話休題 8	151

付 録 A 電荷と電流	152
A.1 電荷とは何か？	152
A.1.1 結合定数としての電荷	152
A.1.2 量子数としての電荷	152
A.1.3 W-ボソンの電荷	153
A.2 真空中の電磁場	153
A.3 電流とは何か：直流・交流	154
A.3.1 電子による情報の伝達	154
A.3.2 直流	154
A.3.3 交流	155
付 録 B 相対性理論	156
B.1 相対性原理	156
B.2 ガリレオの相対性理論	157
B.3 特殊相対性理論	157
B.3.1 相対論における速度の和	158
B.3.2 運動量の Lorentz 変換	158
B.3.3 微分量の Lorentz 変換	159
B.4 運動方程式の変換不変性	159
B.5 相対性理論の具体例	161
B.5.1 光のドップラー効果	161
B.5.2 大気圏で生成された μ -粒子の寿命	161
B.5.3 相対性理論の適用範囲	162
B.6 一般相対論	164
B.6.1 一般相対論の方程式	164
B.6.2 一般相対論の問題点	165
付 録 C 古典力学	166
C.1 古典力学の Lagrange 方程式	166
C.1.1 Lagrange 方程式の導出：最小作用の原理	168
C.1.2 電子と電磁場の相互作用	168
C.2 調和振動子	169
C.3 Kepler 問題	170
C.3.1 軌道は楕円：Kepler の第 1 法則	170
C.3.2 面積速度一定：Kepler の第 2 法則	171
C.3.3 周期 2 乗が長半径 3 乗に比例：Kepler の第 3 法則	172

C.4 銀河の衝突	173
付 録 D 統計物理学	174
D.1 分布関数	174
D.1.1 ミクロカノニカル集団	174
D.1.2 カノニカル分布	175
D.2 エントロピー	175
D.2.1 エントロピーと観測量	176
D.3 スピンと統計	176
D.3.1 フォトンとボーズ統計	176
D.3.2 フェルミ統計	177
D.3.3 複合粒子のスピンと統計	177
付 録 E 古典場の理論	178
E.1 場の方程式と Lagrangian 密度	178
E.2 Schrödinger 場	179
E.2.1 Lagrangian 密度と Lagrange 方程式	179
E.2.2 Hamiltonian 密度	180
E.2.3 場の Hamiltonian	180
E.3 量子電磁力学の Lagrangian 密度	181
E.3.1 Dirac 場の Lagrangian 密度	181
E.3.2 Dirac 方程式の自由粒子解	181
E.3.3 電磁場の Lagrangian 密度	182
E.3.4 量子電磁力学の全 Lagrangian 密度	183
E.4 重力場の Lagrangian 密度	183
E.4.1 Lagrangian 密度	183
E.4.2 重力場の方程式	184
E.4.3 重力場中の Dirac 方程式	184
E.4.4 重力場中の Dirac Hamiltonian の非相対論近似	184
E.5 重力理論：付加ポテンシャルの物理	185
E.5.1 水星の近日点移動の観測値	186
E.5.2 GPS 衛星の遅れ	186
E.5.3 地球公転の遅れ：うるう秒	187
E.5.4 月の後退	188

付 録 F 物理の数学	189
F.1 座標系	189
F.2 積分公式	190
F.3 δ 関数	190
F.4 ベクトル	191
F.4.1 ベクトルの公式	191
F.4.2 ∇ と ∇^2 の公式	191
F.4.3 内積	191
F.4.4 外積	192
F.5 微分演算公式と座標系	192
F.5.1 直交座標系 (x, y, z)	192
F.5.2 円筒座標系 (r, φ, z)	192
F.5.3 極座標系 (r, θ, φ)	193
F.5.4 $\nabla^2 \phi = C$ の対称性とその解	194
F.6 複素数と複素積分	195
F.6.1 複素数の定義	195
F.6.2 Euler の公式	195
F.6.3 解析関数	195
F.7 三角関数	196
F.8 指数関数と対数関数	197
F.9 Taylor 展開	197
F.10 線積分と面積積分	198
F.10.1 線積分	198
F.10.2 面積積分	198
F.11 Gauss の定理	198
F.11.1 直感的解説	199
F.11.2 Gauss の定理の証明	199
F.12 Stokes の定理	200
F.12.1 直感的解説	200
F.12.2 Stokes の定理の証明	201

第1章 電磁気の風景画

電磁気学とは電荷と電流があった時に電場と磁場がどのように生成され、またどのような振る舞いをするかという問題を解決してくれる学問である。まずは電荷がある分布関数で存在している場合、電場がどのように生成されるのかと言う問題を解く事から始めるのが一般的であろう。この場合、電場は時間には依らず座標のみの関数と仮定して問題を解く事になり、これは静電場と呼ばれている。この電場を決定する方程式が Gauss の法則である。一方、電流が流れると磁場が生成され、その磁場がどのように作られるかを決定する方程式が Ampère の法則である。電場と磁場が決まれば電磁気学はそれでほとんど十分ではある。しかし物質の中だと電場の形成されかたがその物質の性質にもよってしまう事になる。また、磁場の形成もやはり物質の性質にかなり依存している。これらの事が電磁気学を複雑にしている主な原因でもある。

この章では電磁気学を理解するために必要な「言語」を簡単に解説しておこう。そしてそれらの言葉の詳しい内容は教科書の中で説明する事になる。従ってこの章は教科書全体を読んだ後に、もう一度読み直して見ないとわからない内容もかなり含まれている。その意味では最も難しい部分と言えるかもしれない。しかしながらこの章を読んで電気・磁気の描像をしっかりとつかめたら、必ずやその勉強が楽しいものになる事は間違いない。最終的には、どのような方法にせよ、電磁気学をきちんと理解して、そしてそれを具体的に使えるようになる事が目標である。ここでは電磁気学全体の景色を大雑把に描いているので電場・磁場・電磁波が織り成す風景画を眺めてみて、それに興味を持って欲しいものである。そしてこの本をさらに読み進んで行き、その電磁気の景色の中に入って、その細かい部分をしっかりと理解して、電磁気学を応用できるようになって欲しいと思う。ここでは電磁気学の景色を出来るだけわかり易く描写して、読者が直感的なしかし正確なピクチャーを作れるよう最大限の努力をしている。しかし、同時に簡単な計算チェックを自分自身で出来るだけ多く行い、数式の意味を自分のものにして欲しい。数学で表現した物理の方程式を自然界と結びつけるためには大変な努力が必要なのである。

1.1 日常の電磁現象

物理学を学ぶ目的の大半は自然現象を理解する事にある。物理学の最新知識を何かに応用する事も非常に重要ではあるが、しかしこの本の第一の目標は、日常現象における様々な不思議な謎を解決できる力を身につける事にある。ここでは電磁気学を勉強して行く上で、どのような自然現象がこの電磁気学の理論で理解されるのかについて大雑把な描像を描いて行こうと思う。従ってこの章では主として現象を羅列的に書いているのでその解説は丁寧とは言えないであろう。しかし、この本を読みすすみそして内容をきちんと理解出来れば、いつの日かその疑問の何割かは解決できるようになるものと考えている。

1.1.1 静電気：摩擦帯電

電気はすでに紀元前から知られていた。琥珀(樹脂化石)を毛布で擦ると電気が起こる事がわかっており、従ってこれが Electron (ギリシャ語の琥珀) の起源である事は良く知られている。今は Electron は電子の事である。

● **摩擦帯電**： ある種の物質(誘電体)は摩擦により帯電する。これは幼い頃に誰でも経験した事だと思う。静電気によってビリッと来たと言う事である。物質間の摩擦でどちらが正に帯電し、どちらが負に帯電するかはその誘電体の性質によっている。この原因は勿論、電子がどちらかの誘電体からは取り去られ、その分がもう一つの物質に移動した事によっている。

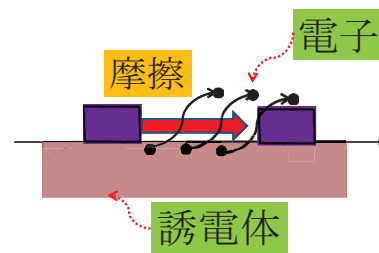


図 1.1: 静電気

● **摩擦放電**： 摩擦により帯電させ、それを直ちに放電させると火花ができる。この時、放電(Discharge)とは電荷の移動が急速に起こり、その結果、電子の移動(電流)に伴い激しい衝突が起こり、空気が励起状態に持って行かれて火花が出るのである。この火花の利用は様々な機器(例えば古い形式のライター)に応用されている。

● **雷の生成**： 雷(Thunder)も摩擦による帯電現象である。大量の水蒸気を含んだ上昇気流が上空で冷やされ水滴になり、さらに氷の小粒になり、お互いに激しく衝突を繰り返す。この過程で氷の小粒は正の電荷(Positive charge)を帯びてより上空に行き、水滴は負の電荷(Negative charge)を帯びて雲の下層

部を形成すると考えられる。これらの電荷がマクロスケールで一定以上たまると放電する、それが雷である。ここで放電とは流れた電子による連続的な空気のイオン化の事である。これは一定以上の電圧 (Voltage) が貯まると電子が急速に移動し、その際、空気と激しく衝突する事になり、空気の分子を強引にイオン化しながら電流が流れる現象の事を言っている。

1.1.2 圧電効果

圧電効果 (Piezoelectric effect) とはある種の結晶体に機械的応力 (圧力) を掛けるとそれに応じて電気分極 (Electric polarization) が起こり、電束密度が生じる現象である。これは Pierre Curie が 100 年以上も前に発見している。この現象は機械的な力が結晶構造の対称性を少し壊すため電気分極が起こり、これが電気現象に直接に結びついているものである。圧電効果は機械的な力と電気力を結びつける現象であるため、この応用は現在では非常に広範囲に渡っている。特に液晶画面に手で触れてそれを電気信号に変換する機構はこの圧電効果の応用そのものである。

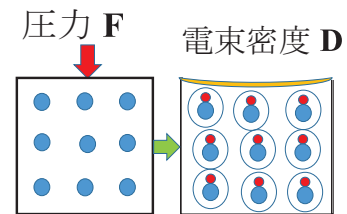


図 1.2: 圧電効果

● **水晶 (Quartz) の逆圧電効果**： 圧電効果と丁度反対の物理現象が知られている (逆圧電効果)。それは電場を掛けると機械的な振動をする現象の事である。その性質を示す物質としては水晶がよく知られていて、電場をかけると非常に正確な振動をする。この正確な振動を利用してクォーツ時計が作成されている。但し、この原理の応用は高度な技術が必要であったと考えられる。

1.1.3 電流と電池

電流の発見は Galvani による蛙の筋肉の痙攣実験から始まった事はよく知られている。この現象は異なった金属版の間に塩水を置くと電位差ができ、従ってここに電気力が生じる事により起こったものである。

● **電流**： この現象の原因を実験で明確に示したのが Volta である。彼は 2 種類の金属間に塩水を含む紙などを置くことにより、この間に電位差が生じて電流 (Current) が流れる事を示したのである。

● **電池**： 静電気を集めてもその利用は一瞬の放電でしかない。それに対して電池 (Battery) を作り電流を流してその電気力を利用する場合、電気を定常的に利用できる事になる。このためその利用価値は飛躍的に増大している。そして2種類の金属板の間に塩水を含む紙をはさんだものを単位としてこれを何層か重ねたものが電池の基礎となっている。

1.1.4 電気による照明：熱輻射か電子の量子状態遷移か？

電気による照明は電気の日常生活への利用のうちでも最も初期の段階で行われたものと言えよう。火を焚けば光がでる事は古来知られていたが、電気により光を生成する現象は電磁気学を利用して行く上での原点でもある。

● **熱輻射**： 白熱電球による発光はフィラメントのジュール熱による輻射 (Radiation) を利用している。フィラメントの温度が 2500°C 前後だとこれは 0.25 eV 程度の原子励起状態の遷移に対応しており、この輻射は様々な波長 (Wave length) が混合した光のため白色光になっている。

● **原子遷移による輻射**： 蛍光灯は微量の希ガスをいれたガラス管の両端に電極をおいて電圧を掛ける事により発光している。一方の電極から放出された電子が水銀原子 (Mercury atom) と衝突して水銀を原子励起させる。そしてそこから原子遷移 (Atomic transition) により放射された紫外線 (Ultraviolet rays) を蛍光物質にあてるとこの蛍光物質が発光して可視光 (Visible rays) を放出している。

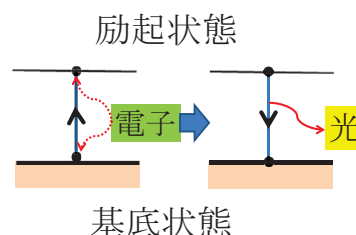


図 1.3: 原子状態遷移と光放出

● **半導体素子の輻射**： LED (Light Emitting Diode) は電圧を加えると発光する半導体素子 (Semi-conductor device) を用いて照明に利用している。これは半導体ダイオードにおいて電子を励起状態 (Excited states) に持って行くとその電子は直ちに状態遷移して光を放出する。そしてこの輻射光を集めたものがLEDである。この発光には余分な熱エネルギーの生成はほとんどないため、エネルギー効率は上記2個の照明と比べると格段によい。恐らくこの発光のメカニズム自体は蛍などの生物の発光に近いものと言えよう。但し生物は化学変化により電位差を生み出す事によって状態遷移を起させて発光している。

1.1.5 電波・電線による通信

情報伝達としての通信手段には現在、主として電磁波 (Electromagnetic wave) が使われている。すべての情報量は2進法で数えあげられるため、フォトン受信の有 (1)・無 (0) による情報の集合体を電磁波により完全に伝達する事ができている。

● **電波による通信**： ラジオもテレビもそして最近の電話通信もすべて電磁波によって伝達が行われている。光は電磁波であり、その電磁波は波長によって特徴づけられている。大雑把には、波長が 1 mm よりも長いと電波 (Radio wave) と呼ばれる。見える光 (可視光) は数千 Å (数 eV) 前後となっている。また可視光よりも少し長い波長の光を赤外線 (Infrared rays) と呼び、短い波長を紫外線と呼んでいる。この紫外線より大幅に短い波長になると、それらはむしろそのエネルギーで表される。1 keV よりも高いエネルギー (短い波長) の電磁波は X-線と呼ばれ、それよりも更に高いエネルギーの電磁波 (1 MeV 以上) は γ -線と言われている。しかしこの境界はかなり大雑把なものである事にも注意しよう。

● **電線による通信**： 現在では、有線による電話はむしろ少なくなっている。しかしこの有線電話による通信速度と電磁波による伝達速度がほとんど同じである事は、非常に重要な物理的意味がある。これはまさに、電線中の電子による情報伝達がほとんど光と同じである事を示している。

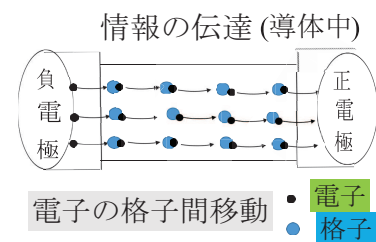


図 1.4: 電子の情報伝達

1.1.6 レーダーとレーザー光

レーダー (Radio Detecting and Ranging) とレーザー光 (Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation) は両者ともに電磁波である。違いはその周波数帯と発生機構にある。

● **レーダー**： レーダーはその周波数帯として 0.1 ~ 100 GHz の電磁波を使っている。電磁波発振機構は通常の発信機である。レーダーは物質と衝突すると反射するため、この反射光を測定する事により、その反射物体の場所などを特定する事ができる。

● **レーザー光**： 一方，レーザー光は原子における電子のエネルギー準位間の遷移による電磁波放出機構を利用している．基底状態 (Ground state) の原子を励起状態に持って行くとその状態は短時間で基底状態へ遷移して光を放出する．この光の波長は原子状態のエネルギー差により厳密に決められているため，その原子では常に同じ波長の光が出てくる事になっている．この光をうまく集めたのがレーザー光である．従ってレーザー光の周波数はどの原子励起を使うかにより決定されている．高エネルギーレーザー光 (1 keV 以上) の作成が難しいのは原子をこのエネルギー状態にポンピングする事が簡単ではない事によっている．

1.1.7 黒体輻射と電磁波の放射

黒体輻射 (Black body radiation) の物理は「量子」 (Quantum) の概念を解説する時に必ず議論されている．歴史的にも Planck が黒体輻射のスペクトルの温度依存性を説明するために h という定数を導入し，フォトンのエネルギーは $h\nu$ の整数倍しか取れないと仮定した事で知られている．Planck はこの量子仮説の下で黒体輻射の正しい理論式を発見して実験を見事に説明した．

● **Planck の公式**： 19世紀後半，溶鉱炉の温度を正確に知る手法として溶鉱炉から放射される光の周波数測定がよく使われていた．この輻射光強度 (Radiation strength) の周波数依存性を再現するため Planck は量子仮説を導入した．今，フォトン は粒子的であると仮定しよう．この場合，フォトンの運動量が p と $p + dp$ にある時の光の

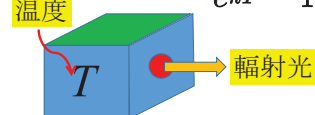
$$I(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$


図 1.5: 黒体輻射

強度 $I(p)$ は 単位体積当り何個のフォトンが放射されたか である．それを式で書くと

$$I(p)dp = 2 \langle p \rangle \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = 8\pi \langle p \rangle \frac{p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \quad (1.1)$$

であり，最初の 2 はフォトンの偏極度である．また $\langle p \rangle$ は振動数 ν のフォトン集団のアンサンブル平均である．

ここでエネルギー $E_n (= npc = nh\nu)$ を持つフォトン集団の分配関数 Z は温度 T の場合に

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}, \quad \left(\text{但し } \beta = \frac{1}{kT} \right)$$

であり, k は Boltzmann 定数である. よってフォトンの平均運動量は

$$\langle p \rangle = \frac{1}{c} \langle E \rangle = \frac{1}{cZ} \sum_{n=0}^{\infty} E_n e^{-\beta E_n} = \frac{1}{cZ} \sum_{n=0}^{\infty} (nh\nu) e^{-\beta nh\nu} = \frac{1}{c} \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

となる. ここで強度 I を振動数 ν で表すと Planck の公式

$$I(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (1.2)$$

が求まる.

● **Stefan-Boltzmann 則:** 有限温度の物質は輻射によりエネルギーを失っている. 例えば地球は太陽からの輻射エネルギーを吸収し続けているが, 地球の表面温度が一定値であるのは Stefan-Boltzmann 則 $[U = \sigma T^4]$ によるエネルギー放射と太陽からの輻射エネルギーが平衡状態になっているからである. この Stefan-Boltzmann 則は式 (1.2) を ν で積分すれば

$$U = \sigma T^4, \quad \text{但し, } \sigma = \frac{8\pi k^4}{c^3 h^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \quad (1.3)$$

と求まる.

● **固体の黒体輻射:** しかし有限温度の固体 (Solid state) は何故, 黒体輻射 (電磁波の放射) をするのであろうか? その輻射量は恐らくは物質の性質に依存しているのだろうが, この輻射の発生機構はよくわからない. 固体は結晶格子 (Crystal lattice) の集団としては束縛状態になっているが, その範囲内で格子振動をしており, それが温度に対応しているものであろう. その意味では有限温度の固体は量子力学的には励起状態になっている. 黒体輻射は固体全体での状態遷移により電磁波を放射するものと考えられるが, その電磁波放射は物質の構造とその状態に強く依存しているものと考えられる. このため, その具体的な計算は現在まで, 近似的にさえ行われていない.

1.1.8 オーロラと地球磁場

オーロラは地球規模の発光現象である。この現象は太陽風 (Solar wind) (主に陽子) が地球大気と衝突して、結果的に大気中の分子 (N_2 , O_2 など) を励起し、その分子の状態遷移による電磁波が観測されたものと考えられている。一方、その衝突により何らかの理由でラージスケールの電位差が生じて、その結果、放電による大気分子の発光現象が起こっている可能性もある。電位差ができる原因は恐らくは電子と陽子 (イオン) の Larmor 半径の違いが関係しているのであろう。

● **オーロラの生成機構：** 個々の太陽風が地球大気と衝突してもそれらがオーロラ現象になるとは到底考えられない。これはオーロラが何らかの形で地球磁場の影響を強く受けている事を示唆している。その結果、太陽風がマクロスケールで磁場に閉じ込められ、そしてそれが十分な量に貯められて一定量の「イオン風」が形成されるものと考えられる。そのイオン風が大気中の分子と衝突を繰り返すことによりオーロラ現象が発生するのであろう。

● **大規模スケールの発光現象：** オーロラが太陽風を主原因としている電磁現象である事は確かであるが、それがどのようにマクロスケールで集められるのかは良くわからない。この大規模スケールの発光現象としては、雷が強い静電場による空気のイオン化による発光であるのに対して、オーロラは太陽風がもたらしたエネルギーが大気分子を励起しその状態遷移による発光である事は確かであろう。しかしその分子励起が分子間衝突によるものなのか、あるいはラージスケールの電位差が作られて電流がながれて起こる放電現象によるものなのか、恐らくはそのどちらかであろうが、まだよくわからない。

1.1.9 電磁誘導の現象

電磁誘導 (Electromagnetic induction) は発電の原理と関係しているし、近年の誘導加熱 (Induction Heating) もまさにこの電磁誘導を応用したものである。電氣の利用と言う点からすると、電磁誘導の発見は極めて重要な意味を持っている。しかしながらこの現象は電荷と電流が直接の原因とはなっていない方程式 (Faraday の法則) を基礎方程式としている。

この電磁誘導について解説するためには、まずは Maxwell 方程式を議論する必要がある。従って、Maxwell 方程式を紹介した後、この章の後半部分で Faraday の法則を解説し、電磁誘導について議論しよう。

1.2 Maxwell 方程式

電磁気学 (Electromagnetism) を理解するための準備として Maxwell 方程式を覚える事がどうしても必要である。これは実験的に検証された最も信頼できる理論体系であり、別の基本方程式から導出はされないなので、覚えるしか他に方法はない。まずはじっと眺めて、頭の片隅にそっと置いておけばよい。Maxwell 方程式は次の 4 個の方程式から成り立っている。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{Gauss の法則}) \quad (1.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{磁荷がない}) \quad (1.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{Faraday の法則}) \quad (1.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (\text{Ampère-Maxwell の法則}) \quad (1.7)$$

ここで ρ と $\mathbf{j}$ は電荷密度 (Charge density) と電流密度 (Current density) を表し、それらは物質が作っている。今の場合、基本的には電子かイオンで作られていると考えて良い。以下の章で強調する事ではあるが、この ρ と $\mathbf{j}$ が最も複雑で良くわからない物理量である。さらにこれらの振る舞いは電磁気学と直接は関係ないところで決められているため、例えば電流密度そのものを物理的に理解しようとするとはこれは量子力学の多体問題を解く事に対応している。この事が電磁気学の物理を複雑にそして難しくしている主な原因である。

● **物理定数** : Maxwell 方程式には 2 個の物理定数 ε_0 と μ_0 があり、 ε_0 は真空の誘電率、 μ_0 は透磁率と呼ばれている。しかし電磁気学を学ぶ上でこれらの定数が何らかの役割を果たすという事はない。具体的に電場や磁場を数値的に求める時に必要になる。また c は光速で $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ と表されている。

● **未知関数** : この方程式は電場 (Electric field) $\mathbf{E}$ と磁束密度 (Magnetic flux density) $\mathbf{B}$ を未知関数としていて、その数は全部で 6 個 ($E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$) である。従って、Maxwell 方程式は 6 個の独立した方程式になっている。Gauss の法則が 1 個、磁荷がない式が 1 個、Faraday の法則が 2 個そして Ampère-Maxwell の法則が 2 個となっている。Ampère-Maxwell の式は一見 3 個あるように見えるが、今の場合、連続方程式 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ が成り立つ事は仮定されているので 2 個となる。

● **場の定義：** ここで電場 E と磁束密度 B が「場」(Field) であるという事の意味を解説しておこう。これは単純で、電場も磁束密度もともに時間・空間の関数になっていると言う事である。すなわち、 $E = E(t, \mathbf{r})$, $B = B(t, \mathbf{r})$ となっているため、それらは場所によっており、従って「場」なのである。それ以上の特別な意味はなく、粒子的描像で座標の時間発展のみを扱う Newton 力学との対比である。実は電荷密度も電流密度ももとを正せば量子力学の波動関数 $\psi(t, \mathbf{r})$ に関係していてやはり「場」で書けている。その意味では電磁気学と量子力学は同じ場の理論であり、今後、物理学の勉強をすすめて行くとこれらが同じ形式で全て書ける事がわかる。さらに、重力の問題もやはり同じレベルの定式化の枠組みに入っている。その意味においても、電磁気学をきちんと理解する事は非常に重要な事であるし、また限りなく楽しい事でもある。

1.2.1 Poisson 方程式と Laplace 方程式

Gauss の法則 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ を磁場がない場合の Faraday の法則 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ を使って書き換える事が出来る。その方程式が Poisson 方程式であり

● **Poisson 方程式：** $\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$ と書かれている。

一方、電荷密度 $\rho = 0$ の場合は Laplace 方程式という微分方程式であり

● **Laplace 方程式：** $\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = 0$ となっている。これらの微分方程式の解法は数学公式集を参照して一度くらい眺めておいた方が良いでしょう。

1.2.2 重ね合わせの原理

複数の電荷がある場合、そこから受ける力はそれぞれの電荷から受ける力を単に足せば良い。この事を物理では「重ね合わせの原理」(Superposition principle) と呼んでいる。この事実は物事を非常に簡単にしているが、何故、単純に重ね合わせてよいのであろうか？それは Maxwell 方程式が線形方程式である事によっている。もし非線形方程式だったら解を重ね合わせる事はできなく、その方程式の厳密解を探すしか他にしようがないのである。しかし一般的に言って、非線形の現象は多体問題を無理やり簡単化して一体問題にした場合に起こる問題であると考えて良い。しかし自然現象を理解するためには多体問題から出発するべきであり先に近似してしまうと本質的な物理が失われてしまう可能性が高く、非線形方程式と自然界との接点はあまりないと考えられる。

● **何故、重ね合わせて良いのか？**：これから学ぶ電磁気学や量子力学などの基礎方程式はすべて線形方程式であり、重ね合わせの原理が成り立つ。そして重ね合わせは「原理」ではなく方程式の線形性の「結果」である。今、電荷密度 ρ_1 と電荷密度 ρ_2 がある場合を考えて、それぞれの電荷密度が作る電位を ϕ_1 と ϕ_2 としよう。Poisson 方程式は $\nabla^2\phi_1 = -\frac{\rho_1}{\epsilon_0}$, $\nabla^2\phi_2 = -\frac{\rho_2}{\epsilon_0}$ である。ここで2個の電荷密度が足された場合 ($\rho_1 + \rho_2$) を考えよう。この時の Poisson 方程式は $\nabla^2\phi = -\frac{\rho_1 + \rho_2}{\epsilon_0}$ となっている。この電位の解 ϕ は $\phi = \phi_1 + \phi_2$ で与えられることがすぐに確かめられる。

● **非線形方程式**：非線形方程式 (Non-linear equation) の場合、重ね合わせが成立していない。単純な非線形方程式として $\nabla^2\phi + \eta\phi^2 = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ (ここで η は定数) を考えて見よう。この場合 $\nabla^2\phi_1 + \eta\phi_1^2 = -\frac{\rho_1}{\epsilon_0}$, $\nabla^2\phi_2 + \eta\phi_2^2 = -\frac{\rho_2}{\epsilon_0}$ に対して電荷密度 ($\rho_1 + \rho_2$) の解は $\phi = \phi_1 + \phi_2$ と仮定するとこれは非線形性のため方程式の解になっていない。代入すればすぐに確かめられるように $(2\eta\phi_1\phi_2)$ という項が現われてしまい、よって ϕ は解ではなく重ね合わせはできないのである。

● **非線形方程式の物理**：前述したように物理学の全ての基本的な方程式は線形である。従って、非線形性は多体問題を近似した結果、現われた近似的な方程式である。物理では近似はなるべく遅く実行しないとよく間違える事が知られている。非線形物理もその例であり、余程慎重に扱わないと非線形性と自然界を結びつける事は不可能であろう。

1.3 電場

電気の力は荷電粒子の間に力が働く事が出発点である。これらの力の場合、基本的には時間に依らないものとして取り扱ってよいので、これを静電場 (static electric field) という。これから電場 $\mathbf{E}$ という「場」について勉強して行く。

1.3.1 Coulomb の法則

電磁気学の最も基本的な法則は Coulomb の法則であり、2つの電荷 q, Q 間に働く力 $\mathbf{F}$ が

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \mathbf{e}_r, \quad \left(\mathbf{e}_r \equiv \frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$

である事を示している。

ここで電荷 q は原点にあるとし、電荷 Q は点 $\mathbf{r}$ に存在していると仮定している。また $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ は定数であり、 $\mathbf{e}_r$ は r 方向の単位ベクトルである。

● **Coulomb ポテンシャル** : Coulomb 力を表す時、その力をポテンシャルで記述する事が良くある。2つの電荷 q, Q 間に働くポテンシャル $V(r)$ は

$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}$ と表す事が出来る。この場合、重要な事は2つの電荷 q, Q 間に働く力が相互に及ぼし合っているという事である。

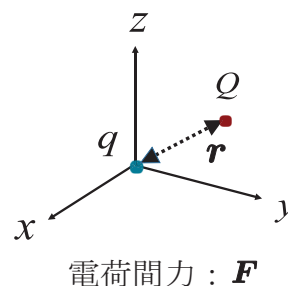


図 1.6: 電荷間に働く力

1.3.2 電場と電位と電位差

Coulomb の法則はそれぞれの電荷がそれぞれの電場を形成して、お互いに力を及ぼし合うという解釈の方がより自然である。

● **電場** : 電荷 q がその場所から r 離れた場所に作る電場 $\mathbf{E}$ を

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (1.8)$$

と定義している。この電荷が作る電場に対して、他の荷電粒子 Q があればその間の力は Coulomb の法則で与えられる力そのものになっている。

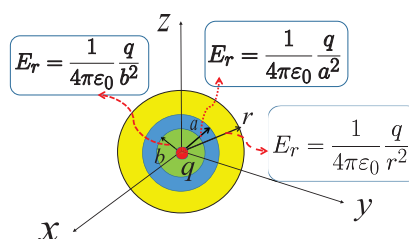


図 1.7: 点電荷の電場

● **電位** (Electric potential) : 電位 ϕ を導入しておこう。これは $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ によって定義される量である。従って、式 (1.8) の電場に対応する電位は

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \text{定数}$$

となっている。この定数は境界条件をつけて決まる量である。

● **電位差** (Potential difference) : 物理的な観測量は $V \equiv \phi(\mathbf{r}_1) - \phi(\mathbf{r}_2)$ であり、この場合、定数は消えている。回路の問題で出てくるのはこの電位差 V である。

1.3.3 電荷の物理的意味

これから電磁気学を学ぼうとしている大学初年度生には「電荷」とは一体何なのかという疑問を持つ事が大切である。実は、電荷という物質があるわけではない。基本的には電子が負の電荷を持ち、陽子が正の電荷を持っている事が電荷の正体である。さらにマクロな意味での電荷とはこれらの粒子の集合体であり、それに電気力が働いているという事であり、それ以上の事ではない。

• **電荷 q は力の強さ：** 電荷 q は力の強さを表している。電子が N 個集まっている集合体を考えるとそれから十分離れた荷電粒子に対しては力の強さは線形性により N 倍になっている。従ってその全体の電荷 Q を $Q = Nq$ と書いて「電荷 Q の物質」という言い方をしても十分正しいのである。しかしそれでは N 個の陽子がどのくらい狭い空間に集まった時に電荷 Q の物質に対応するのであろうか？ 例えば N 個の陽子が半径 R の球の中に集まっているとしよう。この場合、この球の半径よりも外側では電荷 Q の物質と取り扱う事が出来る。しかし、一般的には分布関数を考えて問題を解く事が必要になる。それは N 個の陽子間同士にも電気力が働いているからである。但し、この陽子間の力は、その球の外側に置いた電荷に対していかなる影響も与える事はないと言う事に注意する必要がある。

1.3.4 電気双極子モーメント

自然界において、複数個の粒子よりなる系を考える時、その系全体としては常に中性である。原子でも分子でもその集合体でも、それらが全体として中性である事はエネルギーの観点からも必要である。

従って、この中性の集合体は遠方において電場を生成しないのが普通である。しかしながら正・負の電荷がマイクロサイズの距離 d でペアとして存在する時は、電気双極子 (モーメント) $\boxed{p \equiv qd}$ による電場が生成される。但し、何故そしてどのようにこの電気双極子が作られているかの物理はそう単純ではない。

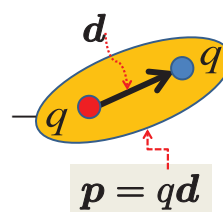


図 1.8: 電気双極子

- **電気双極子を作る電位と電場：** 電気双極子 $\mathbf{p}$ (Electric dipole moment) から距離 $\mathbf{r}$ だけ離れた場所 ($r \gg d$) において, その $\mathbf{p}$ が作る電位 ϕ_d は

$$\phi_d(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

である. この時, 電気双極子 (モーメント) による電場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi_d(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{p}}{r^3} - \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right] \quad \text{となっている.}$$

- **2個の電気双極子間のエネルギー：** 2個の電気双極子 $\mathbf{p}_1$ と $\mathbf{p}_2$ が距離 $\mathbf{r}$ だけ離れている時の相互作用エネルギー U_I を書こう. 電気双極子 $\mathbf{p}$ と電場 $\mathbf{E}$ の間のエネルギーは第8章の式 (8.2) で見るように $\boxed{U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}}$ なので, 相互作用エネルギー (Interaction energy) U_I は

$$U_I = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right] \quad \text{と書けている.}$$

1.3.5 連続方程式と電荷保存

ここで電荷が動く (電子が運動すると) どうなるか? という問い掛けをしてみよう. 後で議論するように電荷が動くとはそれは電流になり, 電流があると磁場ができる事になる.

電荷が流れるとそれが電流に対応するという事はそこに何かの制限 (保存則) があるはずである. それが連続方程式 (Continuity equation) または電荷保存の式と言われているものである. ここで電荷密度を $\rho(t, \mathbf{r})$, 電流密度を $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$ とすると

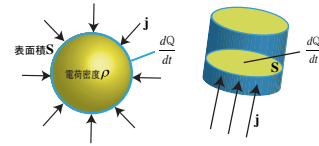


図 1.9: 連続方程式の描像

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (1.9)$$

が $\boxed{\text{連続方程式}}$ であり非常に重要な役割を果たしている. この式が満たされていない場合は理論形式のどこかに欠陥がある事に対応している. それは電流密度 $\mathbf{j}$ が正しく定義されなかった可能性を示しているからである.

1.3.6 電荷保存の描像

この電荷保存 (Conservation of charge) の内容をもう少し詳しく見るため、式 (1.9) を半径 a の球で積分して見よう。 $\int_{r \leq a} \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3r = - \int_{r \leq a} \nabla \cdot \mathbf{j} d^3r$ 。ここでこの体積 V の中の総電荷を $Q = \int_V \rho d^3r$ と定義すると連続方程式は

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_{r=a} \mathbf{j}_n dS_n \quad (1.10)$$

となる。この式の左辺は「単位時間あたりに電荷がどれだけ増えたか」を意味している。一方、この式の右辺はマイナス符号を除いて「球の表面から流れ出る電流を足したもの」である。法線方向の定義が球の表面から外向きであることからマイナス符号まで入れると、右辺の意味は「この球に流れ込む電流の総量」を意味している。すなわち、電荷の保存をあらわす式そのものである。

また、電荷保存の式で方向を電流の流れる方向に取り、電流を $J \equiv \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$

とすると $J = \frac{dQ}{dt}$ となる事がわかる。

1.4 導体と半導体と誘電体

電流とは比較的自由に動ける電子が隣の格子 (原子) に一斉に飛び移る事を繰り返す現象である。従って A 点から B 点までマクロの距離でも電子が一斉に隣に飛び移れば、A 点から B 点まで即座に電流が流れた事になっている。すなわち、電流が A 点から B 点まで流れた (情報の流れ) 時間は、大雑把には電子が隣の原子に飛び移る時間であるから、まさに瞬間である。

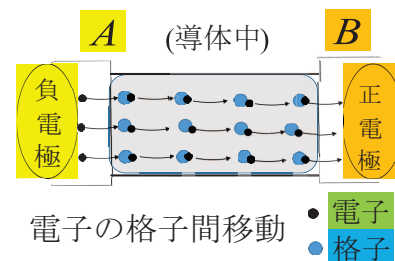


図 1.10: 電流の描像

1.4.1 導体

導体 (Conductor) とは銅などの金属でその原子には隣に飛び移れる準自由電子の数が十分多く存在している物質である。

● **オームの法則**： オームの法則として知られている式は電流密度 j と電場 E の間に成り立っている $j = \kappa E$ という関係式である。ここで κ は電気伝導率 (Electric conductivity) と呼ばれていて電流の流れ易さに関係している。従って、導体での電流の流れ易さは、まずは自由に動ける電子の数が多し事が条件になるが、同時に隣に飛び移る時に、その原子または分子を励起状態に持って行く確率にもよっている。しかしこの点でのミクロの理論計算はまだ知られていない。

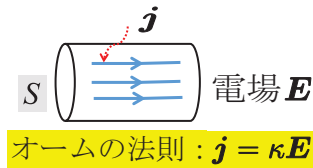


図 1.11: オームの法則

ここでは電気伝導率 κ を導入したが、この逆数が電気抵抗率 $\sigma = \frac{1}{\kappa}$ であり後で使う抵抗値 (Electric resistance) R と関係している。この R は電流 J が流れた時に電位差 V がどれだけになるのかを示す量で $V = RJ$ と書かれる。この場合、 R は電流が流れる面積 S とその距離 d によっている。後で議論するように電気抵抗率 σ と抵抗値 R との間には $R = \frac{d}{S}\sigma$ の関係式がある。

● **電気抵抗率**： ここで導体、半導体そして誘電体 (絶縁体) の場合の抵抗値を大雑把に定義しておこう。これは一つの目安でしかないが、しかし物質の多様性を知る上でも大切であると思われる。

導体：	$\sigma \leq 50 \times 10^{-8} \quad \Omega \cdot \text{m}$
例	$\left\{ \begin{array}{ll} \text{銅：} & \sigma \simeq 1.7 \times 10^{-8} \quad \Omega \cdot \text{m} \\ \text{ニクロム線：} & \sigma \simeq 108 \times 10^{-8} \quad \Omega \cdot \text{m} \end{array} \right.$
半導体：	$\sigma \sim (10^{-6} \sim 10^6) \quad \Omega \cdot \text{m}$
例	$\left\{ \begin{array}{ll} \text{ゲルマニウム：} & \sigma \simeq 6.9 \times 10^{-1} \quad \Omega \cdot \text{m} \\ \text{海水：} & \sigma \simeq 2.0 \times 10^{-1} \quad \Omega \cdot \text{m} \end{array} \right.$
絶縁体：	$\sigma \geq 10^7 \quad \Omega \cdot \text{m}$
例	$\left\{ \begin{array}{ll} \text{磁器：} & \sigma \simeq 3 \times 10^{14} \quad \Omega \cdot \text{m} \\ \text{水晶：} & \sigma \simeq 7.5 \times 10^{17} \quad \Omega \cdot \text{m} \end{array} \right.$

1.4.2 半導体

よく半導体 (Semiconductor) という言葉を見かけるがこれはある種の半導体が日常生活品に頻繁に使われているからである。特に半導体ダイオードが整流器に使われてから真空管のかわりに半導体がほとんど取って代わった程である。真空管ダイオードも半導体ダイオードも共に電流が少し流れて、しかも一方方向しか流れないので、整流効果がありよく利用されている。半導体物質としてはゲルマニウムがよくあげられている。

● **水は半導体か？**： それでは水はどうであろうか？例えば純水と海水を見るとこれらの電気抵抗率は

$$\text{純水： } \sigma \sim 2.5 \times 10^5 \quad \Omega \cdot \text{m}$$

$$\text{海水： } \sigma \sim 2.0 \times 10^{-1} \quad \Omega \cdot \text{m}$$

である。従って、海水は確かに半導体と言ってよい。この違いは勿論、海水には沢山のイオンが存在しているため、動ける電子の数が格段に多いという事に依っている。海水の伝導率はイオンのモビリティに依っている事が知られているが、これは伝導性電子の数に直接反映しているのであろう。

1.4.3 誘電体

誘電体 (Dielectric) とは電流をほとんど通さない物質の事である。電流を通す通さないと言う観点から言えば、これは絶縁体 (Insulator) と呼ばれている。ところで、水が半導体である限り生物も半導体であろう。それでは氷はどうであろうか？氷は $\sigma \sim 4 \times 10^6 \quad \Omega \cdot \text{m}$ である。従って、氷は半導体というよりも絶縁体に近いと言ってよい。

● **分極**： 電流の流れと言う点では前述したように、誘電体には電流がほとんど流れない事が特徴である。しかし、この誘電体にはもっと重要な性質がある。それは誘電体に電場を掛けた時に、誘電体内部の電場が変更されてしまう事である。どのように変更されるのかと言う物理的な機構は後で詳細に議論するがこの解説は多少複雑ではある。従って初年度生には、まず誘電体とはどのような物質なのかを知る事が大切である。

誘電体では電場を掛けると電子は隣の分子に飛び移る事はしないが、しかし、少し分子の中心からはずれる事になっていてこれを分極 (Polarization) と言う。この分極が起こる物質の事を誘電体の定義だと思ってもよい。この場合、1個の分子に注目すると電子が偏って存在するとしたら原子核の正電荷が少し電子とは反対側に偏って見える事になる。これは遠くから見るとまさに電気双極子モーメントに対応している。

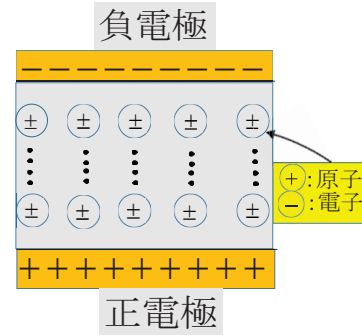


図 1.12: 誘電体の分極

- **電気双極子 p が作る電位** : この電気双極子を p としてこれを全部集めるとこれらすべての電気双極子が作る電位 $\phi_d(\mathbf{r})$ が

$$\phi_d(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho_p}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} d^3R \quad (1.11)$$

と書ける事が示される。ここで ρ_p は $\rho_p \equiv -\nabla \cdot \mathbf{P}$ と定義されており、また $\mathbf{P}$ は分極ベクトルで電気双極子 $\mathbf{p}$ と $\mathbf{P} = n(\mathbf{r})\mathbf{p}$ と結びついている。ここで $n(\mathbf{r})$ は電気双極子の分布関数である。

- **電束密度 $\mathbf{D}$** : これより電場が変更を受けている事がわかる。即ち Gauss の法則 $\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ は変更を受けて

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho + \rho_p = \rho - \nabla \cdot \mathbf{P}$$

となる。ここで電束密度

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}$$

を定義すると誘電体の Gauss の法則は

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1.12)$$

と修正される。但し ϵ はその物質の誘電率である。

1.5 磁場

電流が流れるとその回りに磁場 (Magnetic field) ができる. どのように磁場が生成されるかを決定する方程式が Ampère の法則 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ である. この Ampère の法則を $\mathbf{B}$ に対して解いてしまうと (即ち $\mathbf{B}$ を積分で表すと) Biot-Savart の法則になる. この時, 電流 J が作る磁束密度 $\mathbf{B}$ は

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (\text{Biot-Savart の法則})$$

と書ける. この導出はそれ程難しくはないが詳細は第 10 章で議論しよう.

1.5.1 磁荷 (モノポール)

電荷は 1 個の粒子, 例えば電子が持っている性質であるが, 磁場の場合, 電荷に対応する磁荷 (Magnetic monopole) が存在していない. これは Maxwell 方程式が示している事であるが, 実験的にも磁荷は見つかっていない. もし磁荷があったとして磁荷密度を ρ_m とすると $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ の式は $\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m$ と変更される事になる. ところがこの式は時間反転不変性を破っており, もしあったとしたら場の理論の最も基本的な対称性を破ってしまう事になっている. 幸い現在まで, その様な現象は見つかっていない. 従ってモノポールが存在しない事 ($\rho_m = 0$) は場の理論の基本的な対称性からの要請でもある.

1.5.2 磁気双極子モーメント

電場の場合, 2 個の正・負の電荷がペアで存在する時に電気双極子が生成されたが, 磁場の場合はどうであろうか? 磁場の場合, 磁荷が存在しないため磁気双極子 (モーメント) が非常に重要な役割を果たしている.

● **円電流:** この磁気双極子 (Magnetic dipole moment) は円電流があると生成される. ここで電流 J が半径 a の円電流を作っているとするとこの磁気双極子 $\mathbf{m}$ は $\mathbf{m} = J\pi a^2 \mathbf{e}_n$ である. 但し, $\mathbf{e}_n$ は円に垂直な右ねじ規則に沿った単位ベクトルである. この場合, 磁気双極子 $\mathbf{m}$ が作る磁場は

$$\mathbf{B} = -\nabla \phi_m = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{m}}{r^3} - \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right],$$

但し, $\phi_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right)$ である.

但し、 ϕ_m (磁位) は物理的に意味のある量ではないが、電気双極子と全く同じで形であり覚えるためには便利である。この磁気双極子は磁場の問題では最も重要な役割を果たしている。磁荷が存在しないので磁場を生成するミクロな構成要素としては磁気双極子が最も基本的な単位になっている。ここでは円電流による磁気双極子を議論したが、後で見るように電子のスピンも磁気双極子を生み出している。

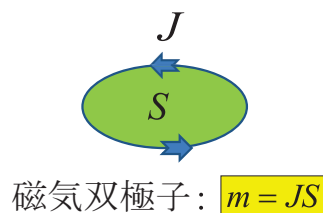


図 1.13: 磁気双極子

● **2個の磁気双極子間エネルギー**： 2個の磁気双極子 m_1 と m_2 が距離 r だけ離れている時の相互作用エネルギー U_I も書いておこう。磁気双極子 m と磁場 B の間の相互作用エネルギー U は第1章で示すように $U = -m \cdot B$ で与えられるので、相互作用エネルギー U_I は

$$U_I = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{(m_1 \cdot m_2)}{r^3} - \frac{3(m_1 \cdot r)(m_2 \cdot r)}{r^5} \right] \quad \text{と書けている。}$$

1.5.3 磁化と磁石

導体とは割合自由に動ける電子が十分多く存在している物質である。従って外から磁場を掛けるとそれらの準自由電子は円運動をする事になる。

● **磁化**： 円電流は磁気双極子に対応しているため、これが内部磁場を生成する。この磁場を全て集めたのが磁化 (Magnetization) である。磁化は外からの磁場を打ち消すように生成される。これは自然界は必ず物質中の磁場の全エネルギーが最小になるように選択するからである。電子が円運動してもエネルギーを消費する事はないが、この電子が回りの電子または格子と衝突するとエネルギーを失う事がある。しかしこの場合は円運動が起こらないので磁化により外から掛けた磁場が物質内部で完全になくなる事は一般的にはない。

● **磁石**： 通常の物質は外部からの磁場を取れば内部の磁化も消滅する。ところが内部磁場が消滅しない場合が存在していて、これが磁石 (Magnet) である。しかし磁荷がないので、磁石のように物質の内部で生成される磁場はすべて磁気双極子によるものである。通常は外部磁場をはずしたら磁気双極子の方向がいずれ揺らぎ始め、最終的には平均すればゼロになるはずである。しかし

磁石は何らかの理由で m の方向が揃ったままの状態が半永久的に実現されている。現実の磁石では電子のスピンによる磁気双極子 ($m \simeq \frac{e}{m} s$) の方が円運動による磁化よりもはるかに重要である。従って最初に最外殻の電子のスピンを揃わせるのは外から掛けた磁場であろう。しかし一度揃ってしまうと磁石では何らかの理由でスピンの揃ったままの状態が優先され、ランダムにはならないのであろう。しかし、この強磁性体の現象は理論的にはまだ良くわかっていないとは言えない。

1.5.4 超伝導と Meissner 効果

電場や磁場を物質に掛けた時、準自由電子は何らかの運動をする事になる。電位差があれば電子は運動して電流を生成する。しかし、この電子は他の電子や格子と衝突するとエネルギーを失う事になりこれが電気抵抗の原因である。

● **超伝導**： 伝導電子が隣に飛び移っても格子と衝突してもエネルギーを失わない時にその物質は超伝導 (Superconductor) 状態となっている。超伝導状態では、恐らく何らかの理由で電子と格子等との散乱が弾性散乱しか起こらない状態が実現されているのであろう。

● **Meissner 効果**： 磁場の侵入に対して準自由電子が円運動により磁気双極子を作り、これにより物質の磁場のエネルギーを最小にするのが磁化である。この時、準自由電子がその円運動により、格子等と衝突してもそこでエネルギーを失う事がない場合には、その時の内部磁場は完全にゼロとなる。これが Meissner 効果 (Meissner effect) と呼ばれている現象であり、超伝導物質で起こっている。

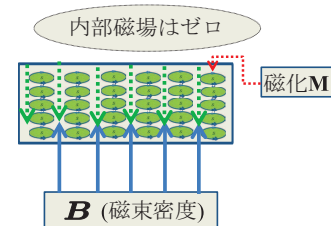


図 1.14: Meissner 効果

● **超伝導物質と磁石**： 超伝導物質の上に磁石を置くとその磁石は浮き上がる事がある。これは磁石の磁場が超伝導物質内部に侵入するとそれを打ち消し合う磁化が生成される (Meissner 効果) が、この内部で生成された磁場は当然、外側にも有限の場で存在している。この磁場が磁石と斥力的 (Repulsive) に相互作用している事から磁石が浮き上がる現象が起こっている。

1.6 電磁場と粒子の閉じ込め

電磁場を狭い空間に閉じ込めて電磁場をうまく利用する機器が沢山知られている。これは電磁場が日常生活にも非常に有効である事を意味している。ここではコンデンサーとコイルと発振回路 (Oscillator circuit) について議論しよう。また、荷電粒子の閉じ込めについても簡単に解説しよう。

1.6.1 コンデンサー

電場を2個の平板にうまく閉じ込めたものがコンデンサーである。この場合、コンデンサー内の電場はそのエネルギーを失わないので、保存系である。

● **Poynting ベクトル** : 電場を時間変化させると変位電流 $\mathbf{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ が生じる。このため、このコンデンサーのエネルギーは電場のエネルギー $\frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2$ に加えて Poynting ベクトル $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ によりコンデンサー内のエネルギーが増減する。しかしこの Poynting ベクトルのエネルギーは電磁波の放出とは無関係である。この系が保存系である事を理解していれば当然ではあるが、最近の電磁気学の教科書においては、正しい記述をしていない場合がほとんどなので十分注意する必要がある。

1.6.2 コイル

コイルは磁場をうまくコイル内に閉じ込めている。この場合、コイル内の磁場は系のエネルギーを失う事はないので、保存系となっている。磁場の生成やその磁場と荷電粒子との相互作用 (Lorentz 力) ではエネルギーが保存しているので、磁場が時間変化しない限りその系がエネルギーを失う事はない。また荷電粒子の電流が時間変化をした場合、電磁波を発生する可能性がある。

● **発振機構** : コイルとコンデンサーを組合わせて発振機 (Oscillator) を作る事が出来る。この場合電磁波はコイルの電子から生成されている。更に1個のコイルでは電磁波を発生させる事は出来なく、もう一つコイルが必要である。2個コイルを並べた場合、1個の作るコイルの磁場の勾配が他のコイルの電子に作用して電磁波が発生する。この詳細は第13章で解説しよう。

1.6.3 イオントラップ

イオントラップとは荷電粒子を狭い空間に閉じ込める方法の事で、Pauli トラップとも呼ばれている。今、簡単のために2枚の平板コンデンサーを考えてその中にプラス電荷を持つイオンを注入したとしよう。この時、このイオンは当然、マイナス電荷側の平板に引き付けられその方向に移動し始める。

ここで平板の電荷の正負を逆転させよう。この時このイオンは今度は反対側の平板の方向に進む事になる。この動作を繰り返し、かつ3次的にうまく実行すると、イオンはこのコンデンサー内にトラップされる事になる。

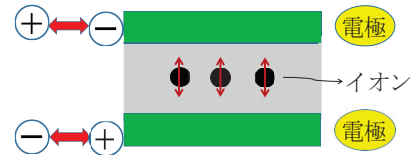


図 1.15: イオントラップ

閉じ込めただけでは応用性はあまりなかったが、このトラップされたイオンにレーザー光を照射する事により、真空中のイオンの様々な性質を高精度で測定する事が可能になり、現在では実験の重要な手法の一つになっている。

1.6.4 磁気トラップ

中性原子のトラップには、この Pauli トラップ法は使えない。しかし中性原子をトラップする方法がある。これは第14章で議論しよう。

1.7 電磁誘導

Faraday の法則として知られている電磁誘導 (Electromagnetic induction) は日常生活では最も身近な電磁気現象と言えるであろう。この法則は

$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ である。そしてその積分形は

$$V = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1.13)$$

と書けている。ここで $V \equiv \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ は電位差、 Φ は磁束 (Magnetic flux) で $\Phi \equiv \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ である。すなわち、磁束が時間変化すると起電力が生じる事を示している。

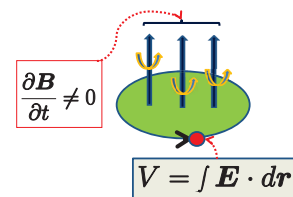


図 1.16: 電磁誘導

1.7.1 発電機構

この電磁誘導の法則を応用した最もよく知られているものが発電機構であろう。磁場中でコイルが回転するとそのコイル中の磁束 (Magnetic flux) が時間変化する事になり、起電力が生じる。従って、このコイルには電流が流れる事になり発電 (Generator of electricity) が起っている。これは回転のエネルギーを電力に変えた事に対応している。原子力発電 (Nuclear power generation) や火力・水力発電はすべてタービンを回して発電している。

1.7.2 誘導加熱 : IH

近年よく使われる誘導加熱 (Induction heating) も電磁誘導の法則を利用したものである。まず磁場をうまく時間変化させる事により導体中に起電力を起こさせる。そしてこの起電力によってその導体中に電流が流れることになり、その電気抵抗により導体物質を発熱させる事ができる。この原理は非常に簡単であり、エネルギー効率もかなり良いものと考えられる。また直接の発火現象を伴わないため安全性も優れている。但し発熱させる機器が絶縁体では効果がない事に注意する必要がある。

1.8 荷電粒子と磁場の相互作用

一見、不思議に思うかも知れないが、Maxwell 方程式における Gauss の法則と Ampère の法則の両者ともに、荷電粒子と電磁場の相互作用が起源となつて電場・磁場が作られている。それに対して Faraday の法則 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ と磁荷がない $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ という2個の方程式は荷電粒子と直接は関係していない。電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{B}$ はこの2個の方程式を用いてベクトルポテンシャル $A^\mu \equiv (\phi, \mathbf{A})$ により書き直されている $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 。しかしながらさらに不思議な事に、荷電粒子との相互作用はすべてベクトルポテンシャル A^μ で書けていて、電場も磁場も直接は現われて来ない。従って磁場中における荷電粒子の運動や磁場の時間変化が荷電粒子に与える影響のダイナミックスなどはすべてベクトルポテンシャルによって記述されている。

1.8.1 Lorentz 力

Ampère の法則では相互作用 Hamiltonian

$$H' = -e \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d^3r$$

における $\mathbf{j}$ が重要な役割をしている。一方, Lorentz 力 $\mathbf{F}$ として知られている力は磁場 $\mathbf{B}$ によって荷電粒子が受ける力であり, これも相互作用 H' が起源となっている。この Lorentz 力は

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.14)$$

であり $\mathbf{v}$ が荷電粒子の速度を表している。この点では力自体は荷電粒子に働いているが, しかしダイナミクス全体としてはベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ が Faraday の法則を満たしているという事実がどこかに反映されているものと考えられる。

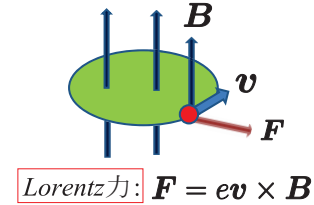


図 1.17: Lorentz 力

1.8.2 モーター

モーターは磁場中に流れる電流が力を受ける事を利用している。Faraday の法則は磁場の時間変化が起電力を生み出すというものであるが, Lorentz 力は荷電粒子と磁場との相互作用を含んだ法則である。電磁気学全体として見たらそれぞれの法則がお互いに絡み合っ電磁現象につながっている。モーターの原理に対応する回転力そのものは相互作用によっているが, その相互作用はベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ で書けている。その意味において, モーターの動作機構全体としては電磁誘導と無関係とは言えなくなっている。

● **モーターの整流子**： 磁場 $\mathbf{B}$ の下に置かれたコイルに電流を流すとその電流を担っている電子 (その速度 $\mathbf{v}$) は Lorentz 力 $\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ を受ける事になる。このコイル全体が力を受けて回転できるようにうまく工夫された機器がモーターである。この時, 外部電流をコイルの回転方向に応じて切り替え, 回転を一定方向に保つために工夫されたものが整流子 (Commutator) である。

1.9 電磁波 (光, フォトン)

光は日常生活で最も身近な存在であり、同時に非常に重要な役割を果たしている。ところが、この光を理解する事は電磁気学の範囲を少し超えているためかなり難しいものと考えて間違いない。大方の電磁気学の教科書では、Maxwell 方程式から電磁波がでてくると言う書き方をしているが、この表現は必ずしも正しいとは言えない。物質がないときの Maxwell 方程式をベクトルポテンシャルで書くと $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\mathbf{A} = 0$ と求まる。これは確かに自由フォトンが満たすべき方程式となっている。しかしながらこの式は電磁波の存在を示唆してはいても電磁波の生成・消滅とは無関係である。電磁波の生成・消滅は場の量子化を行わない限り理解できなく、また電磁波は出来たり消えたりする事で初めて物理的に意味のある存在となっている。この事はベクトルポテンシャルが実関数である事と密接に関係している。

1.9.1 フォトン (光子)

フォトン (Photon) は電磁場 (ベクトルポテンシャル場) を量子化する事により、その結果として場が粒子 (フォトン) になったものと考えてよい。場の量子化を実行する時は、まずベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を自由粒子の状態で

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k},\lambda} \left[c_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + c_{\mathbf{k},\lambda} e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] \quad (1.15)$$

と展開する。ここで $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k},\lambda}$ が偏極ベクトル (Polarization vector) と呼ばれているものである。フォトンの状態を理解するためには場を量子化する必要がある。

● **場の量子化** : 場の量子化 (Field quantization) とは係数 $c_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger, c_{\mathbf{k},\lambda}$ を演算子と見なす事である。 $c_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger, c_{\mathbf{k},\lambda}$ が生成・消滅演算子 (creation annihilation operator) と呼ばれていてこれらは交換関係式 $[c_{\mathbf{k},\lambda}, c_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'}$ などを満たしている。この式 (1.15) の右辺の第1項がフォトンを生じさせ、第2項が消滅させる項に対応している。これを見てもわかるように、光はもはや電場・磁場とは全く関係なくなっている。むしろフォトン粒子と考えて、さらにその振る舞いは波として扱えばそれ程間違える事はない。実際フォトンにはエネルギーと運動量の関係として Einstein の関係式 (分散関係式 Dispersion relation) $E = |\mathbf{p}|c$ を満たしている。

• **フォトンのエネルギー, 運動量とその波長:** フォトンのエネルギー E_k とその角振動数 ω_k は $E_k = \hbar\omega_k$ と結びついている. また運動量 $\mathbf{p}$ と波数 $\mathbf{k}$ の関係は $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ となっている. さらに波数と波長 λ の関係を見ると $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ (但し $k = |\mathbf{k}|$) というよく知られた関係式である. フォトンは波長により特徴づけられていてその波長が長ければ電波と呼び, 可視光 ($\lambda \sim 5000 \text{ \AA}$) を中心にして更に短い波長だと X-線や γ -線と呼ばれている.

1.9.2 フォトンの生成・消滅の相互作用

電子とフォトンの相互作用 Hamiltonian は

$$H' = -e \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d^3r \quad (1.16)$$

である. ここで $\mathbf{j}$ は電子の電流密度である. 場の理論ではこの電子の場も量子化される必要があるが, ここではその議論はしないで第 15 章で解説しよう.

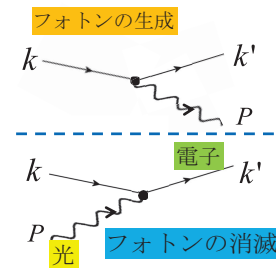


図 1.18: フォトンの生成・消滅

この相互作用から e が相互作用の強さである事が良くわかると思う. この e を結合定数 (Coupling constant) とも言う. ここで重要な事は電磁波の生成・消滅はこの相互作用によってのみ起こっている事である. 従って, この式 (1.16) からわかる事は生成されたフォトンとはもはや電場・磁場とは関係ないと言う事である. さらに生成された電磁波 (フォトン) が相互作用する場合は, すべてこの (1.16) 式からである事に注意する必要がある.

1.9.3 フォトンの性質: 波長と偏極ベクトル

ベクトルポテンシャルの場を自由粒子の状態で展開した式 (1.15) には偏極ベクトル $\epsilon_{\mathbf{k},\lambda}$ があらわれている. 光の特徴はその波数ベクトル $\mathbf{k}$ と偏極ベクトル $\epsilon_{\mathbf{k},\lambda}$ (Polarization vector) により決められる.

• **偏極ベクトル:** この偏極ベクトル $\epsilon_{\mathbf{k},\lambda}$ は波数ベクトル $\mathbf{k}$ の依存性に加えて偏極の自由度を記述する量子数に対応する λ にも依っている. この $\epsilon_{\mathbf{k},\lambda}$ は基本的にはフォトンのスピンの事であると思って良い. しかしスピンの持っている重要な性質が欠けている. すなわち角運動量の性質 [交換関係式] を満た

していない。さらにフォトンのスピンの大きさは1であるが、フォトンの状態は2個しかなく、通常のスピン1の状態の3個とは異なっている。

● **偏光状態**： それでは偏光(状態)とはどういう現象なのであろうか？ 偏光とはフォトンの2個の状態のうち、1個だけが実現された光の事である。そしてこの2個の状態を指定するのが偏極ベクトルに現われる λ であり、状態を指定するこの量子数は磁気量子数と同じで必ず保存する量となっている。ここで最も重要な事として、光は波長と偏光状態によってその性質が決定されていると言う事である。そして一般的な光、例えば白色光は様々な波長が混じった状態であり、さらに偏光状態のフォトンが等分に混ざっている多数のフォトンの集合体である。以下に簡単なまとめを書いておこう。

● **太陽光**： 太陽からくる光は様々な波長と2個の偏光状態が等分に混ざったものである。太陽光の偏光に関しては日常の世界にあらわれる事はあまりないが、沢山の波長が混じっている事は虹を見れば明らかである。

● **レーザー光**： レーザー光はその光がすべて同じ波長を持っている。その偏光に関しては、そのレーザー光によっては偏光している場合もあると考えられている。

● **偏光**： 波長は混じっていても光の偏極状態は1個だけにした状態の光を偏光(Polarized light)と呼ぶ。昔から偏光版を通して偏光した光を取りだす事はよく行われていた。

1.9.4 空の青さと光の散乱

フォトンは荷電粒子との相互作用で生成または吸収される事がその本質である。しかしフォトン－荷電粒子の弾性散乱もよく起こる散乱過程であり、量子場の理論による Compton 散乱の計算は最もよく知られている。これはフォトンが電子に吸収され、直ちにその電子がフォトンを放出して、結果としてフォトン－電子の弾性散乱過程に対応していると言うものである。この散乱過程は古典電磁場による計算では Thomson 散乱として知られており、Compton 散乱の結果と合っている。このように古典電磁場による計算が予想以上に実験を再現する事があるが、しかしながら以下に見るように常にうまく計算されていると言うわけではない。

● **空はなぜ青いか？**： 可視光が物質 (N_2 など) と散乱した場合は Rayleigh 散乱として計算されている断面積になっている。この散乱断面積は古典電磁場で求められていて Rayleigh 散乱断面積 ($\sigma_R \simeq \sigma_{\text{Thom}}(\frac{\lambda_0}{\lambda})^4$, λ_0 は定数) として良く知られている。この計算はかなり複雑であるが、これまで場の量子論による計算も実行されており、その形は古典論と一致している事が分かっている。このため、これまでは空の青さは光と大気分子との散乱が Rayleigh 散乱である事から理解されると考えられてきた。ところが、最近になってこの Rayleigh 散乱の断面積が場の量子論的に詳細に計算され、また λ_0 の値が具体的に求める事が出来ている。その結果、Rayleigh 散乱の断面積は Compton 散乱の断面積よりも 10 桁以上、小さい事が分かり、これは自然界に応用はできない事が証明されている。このため『空は何故、青いか？』の問題は Rayleigh 散乱では説明できなく、振り出しに戻っている。

● **Thomson 散乱と Compton 散乱**：

フォトンと電子の散乱過程において電子が自由粒子の場合、吸収は起こらない。これはエネルギー・運動量の保存則から禁止されているからである。その代わり、フォトン－電子の弾性散乱が起こっている。このうち一般的な散乱過程としては Compton 散乱が知られていて、場の理論の教科書における初等の定番問題である。Compton 散乱断面積 $\{\sigma_{\text{Com}}\}$ の非相対論極限を取ると Thomson 散乱の断面積 $\{\sigma_{\text{Thom}}\}$ が求まるが、これは古典電磁場の理論で計算されたものである。

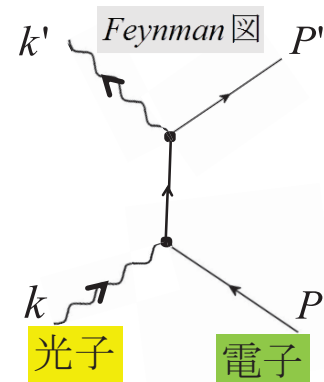


図 1.19: Compton 散乱

1.9.5 太陽光発電

発電形態として最もよく使われているのはすでに解説したように電磁誘導を利用したものである。これは回転エネルギーを電流に変える方法が基本である。一方、光電効果を利用して光のエネルギーを電流に変える方法を用いているのが太陽光発電である。

● **光電効果：** 光が波よりも粒子の性質を強く示している現象が光電効果 (Photoelectric effect) であり、これは光が電子と相互作用して電子にそのエネルギーを与える物理過程である。

その際、格子 (電荷 Z) に束縛されている電子が光子を吸収して自由電子になる。この時光子の運動量を k 、束縛電子のフェルミ運動量を p_F 、その衝突後の運動量を p とすると $k + p_F = p$, $k + E_B = \frac{p^2}{2m_e}$ が運動量とエネルギーの保存を示したものである。但し E_B は束縛電子の束縛エネルギーである。光子の吸収確率は光子 - 束縛電子の散乱断面積 $\sigma_K \simeq \sigma_{Thom} \alpha^4 Z^5 2^{1.5} \left(\frac{m_e}{k}\right)^{3.5}$ により決まっている [1]。

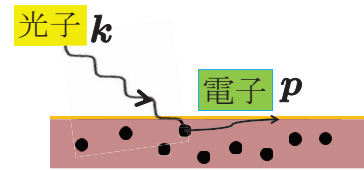


図 1.20: 光電効果

● **光の発電機構：** 光電効果により光を吸収した電子を電流として取り出し、それを太陽電池としてエネルギー変換したのが太陽光発電である。この場合、半導体を利用する事により電子のエネルギーをうまく電流に変換している。しかし、光と物質の散乱で熱エネルギーに転換する部分をどの程度抑えられるかが高い変換効率を得るポイントであろう。

1.9.6 電子レンジ (Microwave oven)

電磁波は光子であり、その質量はゼロであるがエネルギーそのものを運んでいる。この電磁波を利用して物質にエネルギーを与えて熱を起させる様々な方法がある。そのうち、マイクロウェーブを用いた「電子レンジ」は日常的に最もよく知られている電気機器である。この電磁波の波長として 2.45 GHz が日本では使われている。ところが水分子 1 個の共鳴状態は 2.45 GHz から程遠くそれよりも 3 桁も高い周波数領域にある。しかし電磁波の吸収は必ず電

子により起こるのでその吸収メカニズムを考える必要がある。

● **熱による水分子のゆらぎ**： 水によるマイクロ波吸収の機構は水分子の共鳴状態による吸収と考えようとするさらには深刻な問題がある。水は $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ 以上であるので、この熱は 0.03 eV 程度の分子運動のエネルギーに対応している。従って、このエネルギーは水分子による吸収エネルギー ($\Delta E \sim 10^{-5}\text{ eV}$) よりも遥かに大きいのである。従って、 2.45 GHz に対応する状態は大きな分子運動の熱ゆらぎ (Thermal fluctuation) の中にある。しかし電磁波には電子に吸収される以外の相互作用が存在していないので、電子の速度 v_e と分子運動の速さ V_{H_2O} を比較して見て行くしか方法はない。今の場合、電子の速度は $v_e \simeq 6.3 \times 10^{-6}c$ であり、一方、水分子の熱運動の速度は $V_{H_2O} \simeq 1.9 \times 10^{-6}c$ である。よってギリギリで電子の方が速く運動している事がわかる。しかしながら、電磁波と電子の反応で形成された量子状態に対して、ゆらぎがかなり大きな影響を与える事は確かであろう。

● **水分子の量子状態**： マイクロ波を吸収する量子状態は励起エネルギーが $\Delta E \simeq 1.01 \times 10^{-5}\text{ eV}$ である事から集団運動状態の可能性が高い。

それは吸収直後の電子の波長が

$\lambda \simeq 3900\text{ \AA}$ である事にも依っている。明らかにこれは水の状態になった時に特別に生じる量子状態である。しかし水によるフォtonsの吸収過程は共鳴散乱ではない事は確かであろう。恐らくは水においては集団運動状態の準自由電子が存在していて、光電効果と同じメカニズムでこの電子によるフォtonsの吸収が起こっているものであろう。マイクロ波を吸収した後の電子は他の水分子との衝突を繰り返して、結果的にマイクロ波のエネルギーが熱エネルギーに変換されるものと考えられる。

これは「水光電効果」 (Hydro-photoelectric effect) とでも呼ぶべき物理過程であると考えられる。宇宙に大量に存在している背景輻射はマイクロ波であり、「水光電効果」はこの電磁波が水に吸収されて熱エネルギーに変換されている事を示している。この現象が自然現象にどのような影響を与えているかを明らかにする事は今後の研究テーマの一つになるものと思われる。

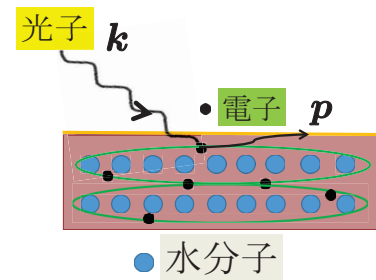


図 1.21: 水光電効果

1.10 第1章の演習問題

問1 静電場 $\boldsymbol{E}$ が $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ と書けるためにはどのような条件が必要か？

問2 電荷を e と書くがその次元は何か？

問3 全空間では電荷保存の式 $\frac{dQ}{dt} = 0$ が成り立つ．この事を連続方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0$$

を用いて証明せよ．ただし， $Q = \int \rho d^3r$.

問4 Maxwell 方程式は時間反転に対して不変である事を示せ．但し，時間反転： $t \rightarrow -t$ に対して $\boldsymbol{E} \rightarrow \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B} \rightarrow -\boldsymbol{B}$ となっている事を使ってよい．

問5 電子に Lorentz 力が働く時，電子のエネルギーは保存している事を示せ．

問6 Planck の公式で光の振動数が十分小さい時，どういう振る舞いになるか？

演習問題の解答：

http://sg2.phys.cst.nihon-u.ac.jp/fffujita/indexDTEXT.html

1.11 閑話休題 1

物理を勉強して、その言葉で自然現象を理解する事は限りなく楽しいものであり、単純な事でもわかるという事は恐らくそれが人間本来の感じる最も大きな喜びなのだろうと自分は思っている。例えば、エジプトで紀元前3世紀に地球の半径を測定した人達がいる。この人達は地球が球のようになっている事を月食などを通して知っていたのであろう。しかし、地球の半径を、当時どのようにして測ったのであろうか？これを考えるとその手法をどうしても知りたくなるが、その方法は非常にシンプルであった。それは赤道直下の町で夏至の日の正午に太陽の位置を測定したとする。その時、その町では影が出来ない事が知られていたので、これは太陽が真上にある事になる。一方、そこから真北に千キロ離れた町で同じように太陽を測定すると、今度はほんの少しの角度($\delta\theta$)だけ真上からずれてしまう事になる。これは勿論、地球が球だとわかっていれば図を描いてみると簡単にわかり、この角度の差から地球の半径($R \simeq 1000/\delta\theta$ km)を計算する事は中学生が最も得意とするところであろう。

人間の文化はゆっくりゆっくり進歩してきたのであろう。最初の講義の時に学生に話している事だが、大学生が学問に勤しむ事は重要ではあるが、しかしそれと同じくらい重要な事がある。それは本を読む事である。どんな本でも良いから手当たり次第に読む事である。科学を学ぶ事は非常に楽しい事であるが、しかし同時に「科学も文化の一部である」という当然の事をしっかり理解する必要がある。そしてさらに日本の文化を出来るだけ深く理解して欲しいと思う。学生に「源氏物語」を読みなさいとすすめると結構、反響はある。何故、源氏ですか？と言う事であるが、これは日本の書物の多くは何かと言うと源氏を引き合いに出していて源氏がある種の「リファレンスシステム」になっている。まるでNewton力学のように。そしてNewton力学が最も重要な「物理的センス」の源になっている事は間違いない。基本法則はむしろMaxwell方程式の方であったが、力学的直感とその描像をしっかり持っている人の方が、物理の理解でひどく間違えたりはしないものである。

第2章 電場と電位

電荷があると電場 $\mathbf{E}$ ができるがその電荷が分布関数 $\rho(\mathbf{r})$ で分布している場合は、その分布関数によって電場の形が著しく変わるものである。また電場を直接求める事ができるのは、電荷分布に対称性がある場合で Gauss の法則の積分形を用いる事により、誰でも割合簡単に解く事ができる。しかし、対称性がない場合は電位 ϕ を導入して Poisson 方程式を解く事になる。それは未知変数の数と方程式の数が同じである必要があるからである。電位はほとんどポテンシャルと同じであるが、その概念に慣れておくと便利である。

2.1 電場

電荷 q が原点にあり電荷 e が点 $\mathbf{r}$ にある時、電荷 e が感じる力は

$$\mathbf{F} = \frac{qe}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (2.1)$$

である。これは電荷 q が感じる力でもあり、従って相互作用と呼ばれている。ここで力 $\mathbf{F}$ があらわれているがこれは古典力学での概念であり、場の理論の物理量ではない。しかし、量子力学において期待値を取る事により確かに力が現れることでもあり、マクロスケールの物理ではやはり力の概念に慣れておく事は重要である。

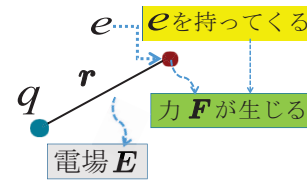


図 2.1: 電場と力

2.1.1 1個の電荷が作る電場

式 (2.1) の右辺で e を取った物理量を電荷 q が作る電場 $\mathbf{E}$ と言い

$$\mathbf{E} \equiv \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (2.2)$$

と書かれる．この $\boldsymbol{E}$ を「場」とであるという理由は，この電荷 q から距離 $\boldsymbol{r}$ にある電荷 e に力 $\boldsymbol{F}$ が働くからである．有限の距離 $\boldsymbol{r}$ だけ離れていても力を感じるのは，そこに力を生み出す「場」がある事に依っており，そこにある電荷が「場」を感じて相互作用が働くという事である．

● **1個の電荷が作る電位 ϕ** ： ここで電位 ϕ を

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r}) \quad (2.3)$$

によって導入する．この場合，原点にある電荷 q が作る電位 ϕ は

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (2.4)$$

と書けている．電位はスカラー量である．スカラー量とはその成分が1個であると言っているに過ぎないが，電場はベクトル量になっているので3個の成分を持っている．その意味で式 (2.3) は重要である．これは1個のスカラー量を微分したら3個の成分を持つベクトル量が求まったわけだから，そこには何か別の条件があるはずである．何故このように書けるのかという理由は後ほど詳しく議論するように $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ があるからである．

2.1.2 2個の電荷が作る電場

電荷 q_1 が点 $\boldsymbol{r}_1$ にあり，電荷 q_2 が点 $\boldsymbol{r}_2$ にある時，点 $\boldsymbol{r}$ におけるこれら2個の作る電場は重ね合わせの原理から

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q_1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|^2} \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|} + \frac{q_2}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2|^2} \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2|} \right\} \quad \text{と書けている.}$$

2.1.3 n 個の電荷が作る電場

一般に電荷 $q_1, \dots, q_n$ が点 $\boldsymbol{r}_1, \dots, \boldsymbol{r}_n$ にある時，点 $\boldsymbol{r}$ における電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^2} \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|} \quad (2.5)$$

となっている．それぞれの点にそれぞれの電荷があり，それらが作る電場はただ単に全てを足せばよいという事である．但し，電場はベクトルなので，この足し算は見かけよりも簡単ではない．

2.2 電位

これまですでに電位 ϕ に関して幾つかの実例をあげて具体的に書いてきたが、それは電位と電場は基本的に同じ物理量に対応している事によっている。しかしまずは電場から解説するのが自然である。それは電場 $\mathbf{E}$ は観測量になっていて Maxwell 方程式にもあらわれているからである。さらに電位 ϕ は直接には Maxwell 方程式にはあらわれては来ないしそのままでは観測量にはなっていないので、電位を導入するにはその物理的な裏づけが必要でもある。この電位 ϕ が観測量になるためには、電位の微分かまたは電位の差分を取る必要があり、それらは確かに物理的な観測量になっている。

● 何故、 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ と書けるのか？： 電位 ϕ と電場 $\mathbf{E}$ との関係をもう一度書いておくと $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ と結びついている。これはかなり重要な式になっている。それは左辺の電場 $\mathbf{E}$ は3個の自由度を持っているのに対して、右辺の電位 ϕ は1個の自由度である。この様に書けるためには当然何かの条件があるからである。そしてその条件とは

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.6)$$

である。これがあれば、確かに $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ と書く事が出来るのは簡単にチェックできる。しかし、これは何処で保証されているのであろうか？その答えは Maxwell 方程式である。すなわち、Faraday の法則から磁場がゼロの場合、式 (2.6) は確かに成り立っているのである。ここで式 (2.3) 式におけるマイナス符号であるが、これは物理的な意味が特にあるわけではない。この電位 ϕ とあとで導入するベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ はそれ自体が直接観測量にはならないのだが相互作用を扱う場合、この2つの物理量が本質的な役割を演じている。

2.2.1 n 個の電荷の作る電位

電荷 q が原点にある場合、そこから点 $\mathbf{r}$ 離れた場所における電位 ϕ は

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (2.7)$$

で与えられている。この時、電場 $\mathbf{E}$ を $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ により求めると

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (2.8)$$

となり，式 (2.2) と一致している．これに応じて n 個の電荷が作る電位 ϕ は

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \quad (2.9)$$

と求められている．実際，これを $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ に代入して電場 $\mathbf{E}$ を求めると確かに式 (2.5) が求められる．この場合，電位はそれぞれの電荷が作る電位をただ単に足しているだけである．さらに今の場合，スカラー量として足しているので取り扱いが電場の時よりもはるかに簡単である．ここで n 個の電荷がある時，その系全体のエネルギー U を計算しよう．この時 U は

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i,j=1}^n \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (2.10)$$

となる．ここで2で割っているのは数えすぎを抑えるためである．

2.2.2 2個の電荷 $[q, -q]$ の作る電位

今，電荷 q を点 $(0, 0, d)$ ，電荷 $-q$ を点 $(0, 0, -d)$ に置いた時，この2つの電荷が点 $\mathbf{r}$ に作る電位 $\phi(\mathbf{r})$ を計算すると

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} + \frac{-q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right)$$

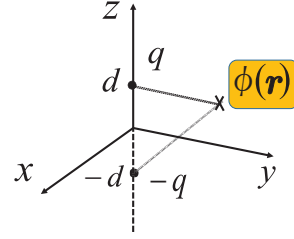


図 2.2: 2個の点電荷の作る電位

となる．この時，遠方 ($r \gg d$) では，近似式

$$(1 + \epsilon)^k \simeq 1 + k\epsilon + \frac{1}{2}k(k-1)\epsilon^2 + \dots, \quad (|\epsilon| \ll 1, k \text{ は実数})$$

を用いて

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\left(1 - \frac{2zd}{r^2} + \frac{d^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1 + \frac{2zd}{r^2} + \frac{d^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qdz}{r^3}$$

と求められる．ここで $p \equiv 2qd$ を定義し，この p の事を電気双極子と呼んでいる．この時，電位 ϕ は

$$\phi(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pz}{r^3} \quad \text{と書けている.}$$

2.2.3 電気双極子

電気双極子 $\mathbf{p}$ は電荷 $-q$ から電荷 q へのベクトルを $\mathbf{d}$ とする時、 $\boxed{\mathbf{p} \equiv q\mathbf{d}}$ と定義されている。この $\mathbf{p}$ が点 $\mathbf{r}$ 離れた場所に作る電位 ϕ は

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-q}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{d}|} + \frac{q}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{d}|} \right]$$

となるが、遠方の点 ($|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{d}|$) では

$$\phi(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (2.11)$$

となる事が簡単に示される。

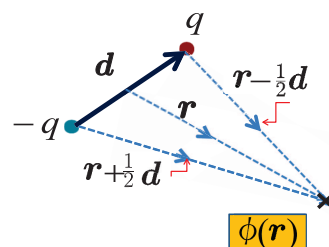


図 2.3: 電気双極子の電位

電気双極子 $\mathbf{p}$ が作る電位 ϕ は式 (2.11) で書いているが、この結果を覚える事が大切である。電気双極子は自然界で様々な役割を果たしているが、何故、これが物理で重要なのであろうか？その理由はこの電気双極子が電荷の次に大きな単位を与えているからである。また電場を掛けた時に少し動くような原子系があると、それは遠くから見たら電気双極子に見えることになり、これが誘電体の基本物理になっている。この事は第7章で詳しく見ることにしよう。

● **電気双極子が作る電場：** ついでに書いておくと、上記の電位から求められる電場は $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ より

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{p}}{r^3} - \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right] \quad \text{となっている。}$$

● **電気双極子の場の遠方での振舞い：** ここで重要な点として r が大きい場所の振る舞いがある。電荷による電位の場合、遠方では必ず $\boxed{\sim r^{-1}}$ で減少するが、電気双極子の電位は $\boxed{\sim r^{-2}}$ で減少している。従って、遠方では電気双極子が電荷と比べてたらそれ程大きな影響は見られない事を意味している。

● **2個の電気双極子間エネルギー：** また2個の電気双極子 $\mathbf{p}_1$ と $\mathbf{p}_2$ が距離 r だけ離れている時の相互作用エネルギー U_I も書いておこう。電気双極子 $\mathbf{p}$ と電場 $\mathbf{E}$ の間の相互作用エネルギー U は第8章の式 (8.2) で導出するように $\boxed{U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}}$ なので相互作用エネルギー U_I は

$$U_I = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right] \quad \text{と書けている。}$$

2.2.4 球状一様電荷分布の作る電位

半径 R の球に全電荷 Q が一様に分布している系を考える．この時，電荷密度 ρ は $\rho = \frac{3}{4\pi R^3}Q$ である．今，球内の任意の点を $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ とする時，微小体積 dV' は $dV' = dx'dy'dz'$ である．従ってこの微小体積中の電荷は

$$\delta Q = \rho dx'dy'dz'$$

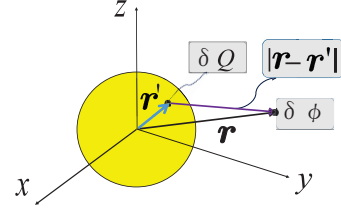


図 2.4: 一様電荷分布の電位

である．よってこの微小電荷が点 $\mathbf{r}$ に作る微小電位 $\delta\phi$ は

$$\delta\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

となる．これを全球で積分すると正しい電位が求められる

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dx'dy'dz'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.12)$$

と表す事が出来る．これを具体的に計算する時，極座標を用いる．ここで

$$\begin{cases} dx'dy'dz' = r'^2 dr' \sin\theta d\theta d\varphi \\ t = \cos\theta \\ dt = -\sin\theta d\theta \end{cases}$$

により t を導入すると，電位 ϕ は ρ が定数である事から

$$\phi(r) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} 2\pi \int_0^R r'^2 dr' \int_{-1}^1 dt \frac{1}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2r'r t}}$$

と書く事ができる．この積分は付録の積分公式を用いると簡単に出来て

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & r > R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right) & r < R \end{cases} \quad (2.13)$$

と求められる．

● **球状電荷分布とその物理**： 電荷が球状に分布していると言う事は電子か陽子が球状に分布している事を意味している。この場合、電子が球の中に一様に分布しているという事が現実に関わり得るのかどうかを考える必要がある。全電荷 Q が半径 R の球にどの様に分布しているかによって、その全体のエネルギーは異なる。後で計算するように全エネルギーは

$$E_{tot} = \begin{cases} \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} & : \text{球状一様分布} \\ \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} & : \text{球の表面分布} \end{cases} \quad (2.14)$$

と求められている。これから明らかなように球の表面に分布した方が全エネルギーは低くなっている。従って現実の物質では球の表面に分布した方がエネルギー的には得をするので外部の力を受けないで全電荷 Q が分布している場合、それは必ず球の表面に分布する事になる。従って特別な理由がない限り、電荷量が球内全体に一様に分布する事はない事である。

但し、原子核内における陽子の電荷分布はほとんど一様である事が実験的に分かっている。これには勿論、理由があり、原子核内の陽子は核力という強い相互作用によって束縛されているからである。陽子間には電氣的な力が勿論、働いているのであるが、核力はクーロン力と比べると約100倍近く強いものとなっている。さらにこの核力は非常に短距離力であり、一方クーロン力は長距離力のため陽子の分布自体はほとんど核力によって決定されている。そしてこの核力による原子核中の陽子の分布はほとんど一様である事が実験・理論両面からわかっている。但し $^{208}_{82}\text{Pb}$ のような重い原子核では、実は電氣的な Coulomb ポテンシャルは原子核の束縛エネルギーにかなり重要な影響を与えている事が知られている。それは Coulomb 力が $\frac{1}{r}$ の形になっていて長距離力である事が主な原因である。一方、核力は非常に短距離力であるため、原子核の構造を決定するのは核力であるが、全エネルギーに対しては、Coulomb ポテンシャルによる束縛エネルギーは決して小さいとは言えないのである。

2.3 第2章の演習問題

問1 n 個の電荷のエネルギー U は

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i,j=1}^n \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

である。何故2で割るのか n を $n = 2, 3, \dots$ と変化させて確かめよ。

問2 電気双極子 $\mathbf{p}$ が原点にありそこから十分離れた点 $\mathbf{r}$ に作る電位 ϕ は

$$\phi(\mathbf{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

である事を確かめよ。この時「十分離れた場所」とは何と比べて十分離れていれば良いと思うか？

問3 微小体積中の電荷 δQ は $\delta Q = \rho dx' dy' dz'$ であり、この微小電荷が点 $\mathbf{r}$ に作る微小電位 $\delta\phi$ は

$$\delta\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\delta Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

とした。この場合、何故、微小電荷を点電荷として扱って良いと思うか？

問4 4 個の点電荷 q が一辺の長さが a の正4面体の頂点に置かれている場合を考える。この時、各電荷に働く力 $\mathbf{F}$ を求めよ。

問5 電気双極子 $\mathbf{p}$ が点 $\mathbf{R}$ にある時、そこから十分離れた点 $\mathbf{r}$ に電気双極子が作る電位と電場を求めよ。

問6 式 (2.12) で ρ が定数の時、積分を実行して式 (2.13) を導け。

2.4 閑話休題 2

高校時代、電気の問題はおろか力学の問題もさっぱりわからなかった。自分にとって物理は最も苦手の教科であった。浪人時代の予備校の授業は更にわからなく、結局ほとんど授業には出なかった。それでどうしようかと言う事になり、たまたま書店に並んでいた「物理根底500題」という本を買ってきてそれをともかくやる事にした。ところがその本の問題500題を2回ほど解いたら、何となく物理の問題が解けるようになってきた。受験前にはほぼ完璧に解けるようになったが解き方を覚えてしまったから当然でもある。

しかし物理を本当に理解するにはこれとはほとんど直交する作業が必要となる。数学、特に微分方程式を解く方法を正確に理解してそれを何時でも使えるまでにしておく事である。例えばNewton方程式を見たときにその解法とその答えを何時でも何もみないで再現できるまでになっていれば、物理学の法則と自然界を結びつける事が可能になると思われる。

しかし物理がわかる事と物理の法則や現象を覚える事とは異なった作業が必要となっている。何時も学生に言っている事だが「自転車の乗り方を覚える事」と「自転車に乗れる事」とは別物であり、努力する作業形態もまた別である。しかし物理の理解のように非常に高度な作業が必要な場合、この2つの作業工程が必ずしも明瞭に分離していなくて、そのため物理で「自転車に乗れていない」物理屋が予想以上に多いのが現状である。実際の経験から言って、大学の物理の教授でも「物理の理解で自転車に乗れていない人」が半数以上いる事はまず間違いないと言える。それで何故、学者になれたのか？であるが、恐らく、試験に偶然できたりまた有能な共同研究者とたまたま良い論文が書けたりすると、周りも本人も物理で優秀であると錯覚してしまうのであろう。これがこの物理屋本人にとって幸か不幸かはその人自身によると思われるが、しかし講義を受ける学生にとってはこの上なく不幸な事ではある。

この事は物理に限らず他のどの分野にも等しく当てはまる現象であろう。どの分野でも「自転車に乗れている人」は少数派であるが、更に悪い事にその有能な人達が不遇である場合が予想以上に多いのである。それは何事も多数決で決められている限り、避けられない事でもあろう。若い研究者には残酷かもしれないが、あとは運が良ければ正当に評価されるという事であろうか。

第3章 Gauss の法則

Maxwell 方程式の最初に出てくる方程式が Gauss の法則である。これは電荷分布がある時に、電場がどのような形になるのかを決める式である。Gauss の法則 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$ の左辺は電場の発散であり、これは源から電場が出て行く様に見えるためこれを水の流れと対応させ、電荷を源とする見方もある。しかしこれは絵を描いたら泉から湧き出す水のようにであると言っているだけで、物理的な意味はない。なお、Gauss の法則に関して、数学の Gauss の定理と混同しないように言葉を正確に覚えておく事も大切である。

3.1 Gauss の法則 (微分形)

Gauss の法則は $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}$ である。ここで点電荷 ($\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r})$) の場合の電場 $\mathbf{E}$ は $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ であった。この式を Gauss の法則に入れて具体的に計算してみると

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{r^3} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{r^3} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{r^3} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right] = 0\end{aligned}\quad (3.1)$$

となってしまう。すなわち $\nabla \cdot \mathbf{E}$ がゼロとなっている。これはどういう事であろうか？ この点電荷に対する電場の式 $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ に何か不都合な点があるのだろうか？ 実はゼロになった理由があり、電場の式の右辺では原点が常に除かれている事と関係している。ここで、式 (3.1) の $\nabla \cdot \mathbf{E}$ を半径 a の球内で積分してみると

$$\begin{aligned}\int_{|\mathbf{r}|<a} \nabla \cdot \mathbf{E} d^3r &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{|\mathbf{r}|<a} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) d^3r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{|\mathbf{r}|=a} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{|\mathbf{r}|=a} \left(\frac{1}{a^2} \right) a^2 \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{q}{\varepsilon_0}\end{aligned}\quad (3.2)$$

となり、確かに電荷になっていてゼロではない．ここで式 (3.2) においては Gauss の定理を用いて変形している．これは何を意味しているのだろうか？
実はこれは

$$\int \rho(\mathbf{r}) d^3r = q \quad (3.3)$$

を意味していて、点電荷の電荷分布が $\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r})$ と表されている事を示している．ここでデルタ関数 $\delta(\mathbf{r})$ は付録で解説してある．この事は「点」を数学的に理解する事の難しさと関係している．数学では「点はメジャーゼロ」であるという言い方をされているが、点は積分の対象には一般的にはならないと言う事である．物理的には、点電荷の場合の電場 $\mathbf{E}$ においては原点が特異点になっている事に対応している．これは数学的には $\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$ を意味している事に対応している．

● **Gauss の法則の微分形の解法：** Gauss の法則の微分方程式を $\mathbf{E}$ を変数としてそのまま解くと言う事はできない．後で議論するように $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ として、電位 ϕ に対する微分方程式 (Poisson 方程式) にして解く事になる．

3.2 Gauss の法則 (積分形)

前節でも用いたように数学における Gauss の定理はかなり有用な定理である．数学の証明は付録で書くことにしてここでは結果だけを用いる．Gauss の定理は任意のベクトル量 $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ に対して

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d^3r = \int_S A_n dS \quad (3.4)$$

が常に成り立つと言うものである．ここで左辺の積分は、例えば球ならその球の体積全体での積分を意味している．一方、右辺の積分は球ならばその球の全表面における積分を表し、その場合 $A_n(\mathbf{r})$ は $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ に対して球表面上における法線方向（球の表面で外向き）の成分を表している．

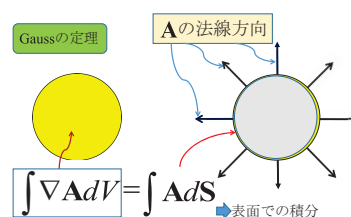


図 3.1: Gauss の定理

この Gauss の定理を用いると, Gauss の法則が積分形で表す事が出来る.

$$\boxed{\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d^3r = \int_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) d^3r} \quad (3.5)$$

この式は 1 個しかないので, 一般的にはこれで電場を決定する事は出来ない. しかし, ある種の対称性がある場合, 例えば球状に電荷が分布している場合, 式 (3.5) からわかるように, 未知変数である電場は E_r のみとなっている. この場合は確かに, 1 個の方程式から電場を決定できる事が良くわかる.

3.2.1 点電荷密度分布

今, 原点に点電荷 q がある場合を考えよう. この時, そこから r 離れた点における電場を求めたい.

その際, 自分で半径 r の球を考えてその球において Gauss の法則の積分形を考えると

$$\begin{aligned} \int_{|\mathbf{r}'| < r} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') d^3r' &= \int_{|\mathbf{r}'|=r} E_r(r') r'^2 d\Omega' \\ &= E_r(r) r^2 4\pi = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') d^3r' = \frac{q}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる. ここで $\boxed{d\Omega \equiv \sin \theta d\theta d\varphi}$ である. この第 2 式の表面積分は角度積分のみなので

$$\int_{|\mathbf{r}'|=r} E_r(r') r'^2 d\Omega' = E_r(r) r^2 4\pi \quad (3.7)$$

となっている. これは $E_r(r)$ が角度に依らない事 (球対称性とは角度に依らない事を意味する) から積分の外に出せるのである. よって

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (3.8)$$

と求まり, 確かに正しい電場が得られている.

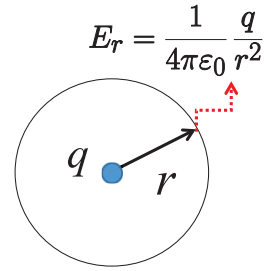


図 3.2: 点電荷分布の電場

3.2.2 球内に一様電荷分布

今、半径 a の球内に電荷 Q が一様に分布している場合を考えよう。この時、電荷密度は $\rho = \frac{3Q}{4\pi a^3}$ となっている。上の問題と同じで、自分で半径 r の球を考えて、その球の体積での Gauss の法則の積分形を解いて行く。この場合、 r と球の半径 a の大きさの比較をしながら解く必要がある。

- (1) $r > a$ の場合： Gauss の法則の積分形を用いて、半径 r の球を考えると点電荷の問題と全く同じである。

$$\begin{aligned} \int_{|\mathbf{r}'| < r} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') d^3r' &= \int_{|\mathbf{r}'| = r} E_r(r) r'^2 d\Omega' \\ &= E_r(r) r^2 4\pi = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') d^3r' = \frac{Q}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

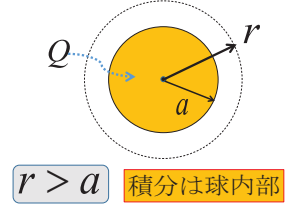


図 3.3: 一様電荷分布 $r > a$

よって、電場は

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \mathbf{e}_r \quad \text{と求められる.}$$

- (2) $r < a$ の場合： この場合は、半径 r の球内の電荷を勘定する必要がある。これは

$$\int_{r' < r} \rho(\mathbf{r}') d^3r' = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\varepsilon_0} \quad (3.9)$$

であるから、電場は

$$E_r(r) = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\varepsilon_0} \frac{1}{4\pi r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{a^3} \quad (3.10)$$

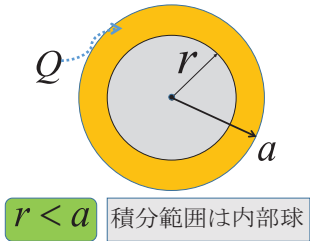


図 3.4: 一様電荷分布 $r < a$

と求められる。これは勿論、式 (2.13) の電位を微分すると

$$E_r(r) = -\frac{\partial \phi(r)}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r}{a^3} \quad (3.11)$$

となり式 (3.10) で求めたものと一致している。

3.2.3 平面に一樣電荷分布

平面一樣電荷分布の問題はコンデンサーの問題を解く時にどうしても必要になる。しかし、大幅に近似している事をしっかり理解する事が大切である。今、面電荷密度 σ で電荷が一樣に分布しているとしよう。現実には有限の平面板を考えるのだが、端の影響を考慮するとほとんど誰も解けない問題になってしまうので、端は無視することにする。

この平面板の面積を S とすれば、全電荷 Q は $Q = \sigma S$ となる。この時、この平面を囲む小さな直方体 (上面は1辺 a の正方形) を考えよう。この時、平面と平衡な方向を x, y -軸とする。この時、 $x-y$ 方向の電場はゼロであると仮定して十分である。従って、電場は平面に垂直な方向 z -軸の方向の電場のみが影響している。

この時この立方体に積分形の Gauss の法則を適用しよう。

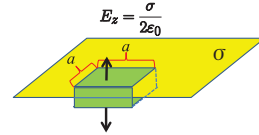


図 3.5: 平面電荷分布の電場

$$\int_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) d^3r \quad (3.12)$$

左辺は明らかに $2E_z a^2$ となり、右辺は $\frac{\sigma a^2}{\epsilon_0}$ であるから

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{と求められる。} \quad (3.13)$$

● **コンデンサー** : 2枚の平面板を平行において、上の平面板に電荷 Q 、下の平面板に電荷 $-Q$ をチャージしたとしよう。この時、この平面板の面積を S 、平面板間の距離を d とする。それぞれの平面板が作る電場は (3.13) で与えられる。従って、上の平面板と下の平面板が作る電場は符号が逆なので、平面板間の電場は $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ となる。

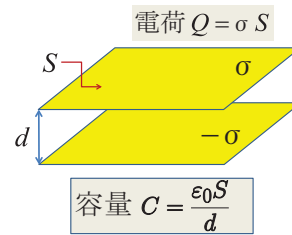


図 3.6: コンデンサー

ここで、平面板間の電位差 V は

$$V = \phi_2 - \phi_1 = \int_0^d E dz = Ed \quad (3.14)$$

となるので

$$V = Ed = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}d = \frac{d}{S\varepsilon_0}Q$$

と表す事が出来る.

● **静電容量** : 2枚の平行平板間の電位差が V の時, その平行平板にどれだけ電荷 Q を貯める事ができるかを考える時, その比例係数を一般に容量と呼んでいる. 従ってこの場合の定義は $Q = CV$ となっていて, この C の

事をコンデンサーの静電容量と呼ぶ. 今の場合 $C = \frac{S\varepsilon_0}{d}$ となる.

3.2.4 球殻に一様電荷分布

今, 半径 a の球殻に電荷 Q が一様に分布している場合を考えよう. これは非常に単純な問題ではあるが現実の物質で実現されており重要である.

● (1) $r > a$ の場合 : Gauss の法則の積分形を半径 r の球において考えると点電荷の問題と全く同じとなっている.

$$\int_{|\mathbf{r}'| < r} \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}') d^3r' = \int_{|\mathbf{r}'|=r} E_r(r') r'^2 d\Omega' = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}') d^3r' = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

よって, 電場は

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \Rightarrow \mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \mathbf{e}_r$$

と求められる.

● (2) $r < a$ の場合 : この場合は, 球内に電荷は存在していないので

$$E_r(r) = 0 \quad \text{ということになる.}$$

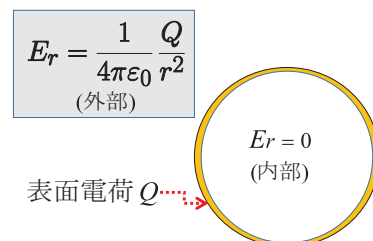


図 3.7: 球殻に一様電荷分布

3.2.5 球殻に一樣電荷分布の電位

上で求めた電場から電位を求めさせる問題が良く作られている。確かに、電場からこれを積分すれば電位が求められる。この時、式としては

$$\phi(r) = - \int E_r(r) dr$$

の不定積分で求める事が大切である。定積分で求める方法は注意しないと計算間違いを起しやすいのである。電位 ϕ は基準点を決めて初めて意味のある物理量として求められる事をきちんと理解する事が大切である。しかしながら、慣れればどちらで計算しても良い。

- (1) $r > a$ の場合： これは直ちに計算できて

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + C_0 \quad (3.15)$$

となる。 C_0 は定数であり、自分で条件をつけない限り決まらない量である。

- 無限遠方： 最もよく使われる条件は電位が無限遠方でゼロ、すなわち $\phi(\infty) = 0$ であり、この場合 $C_0 = 0$ となる。

- 接地： 表面を接地した場合、その電位がゼロとなる事が「接地」の定義である。従って、この場合 $\phi(a) = 0$ より $C_0 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a}$ と求まる。

- (2) $r < a$ の場合： 電場 $E_r(r) = 0$ なので電位は定数 $\phi(r) = C_1$ である。この定数 C_1 は $r < a$ における $\phi(r)$ の解が $r > a$ の $\phi(r)$ の解に $r = a$ で接続するという条件より決まる。すなわち式 (3.15) より

$$C_1 = \phi(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} + C_0$$

と求まる。繰り返しになるが電位それ自体は観測量にはならないので注意する必要がある。物理的な観測量は電位の差 (電位差) である。

3.2.6 2 個の球殻間の電位差

半径 a の球殻に電荷 Q , そして半径 b (但し $a < b$) の球殻に電荷 $(-Q)$ が一様に分布しているとする. ここで, 半径 b の球殻を接地した時, この球殻間の電位差を求めてみよう.

- (1) $r < a$ の場合: Gauss の積分形の法則より電場 $E_r(r) = 0$ であり, よって電位は $\phi(r) = C_1$ である.

- (2) $a < r < b$ の場合: 電場 $E_r(r)$ は

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

である. よって電位 ϕ は

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + C_2 \quad (3.16)$$

となる.

- (3) $b < r$ の場合: Gauss の積分形の法則より $E_r(r) = 0$ であり, 従って電位は定数で $\phi(r) = C_3$ となる. 半径 b の球殻は接地しているので $\phi(b) = C_3 = 0$ である.

- ϕ の連続性: 定数 C_1, C_2 は $\phi(r)$ の連続性より決定される. $\phi(r)$ は $r = b$ で連続なので 式 (3.16) より

$$\phi(b) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{b} + C_2 = C_3 = 0$$

よって $C_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{b}$ と求まる. 同様に $r = a$ での $\phi(r)$ の連続性より $C_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$ と求まる.

- 電位差 V : 球殻間の電位差 V は $V = \phi(a) - \phi(b)$ である. 従って

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad \text{となる.}$$

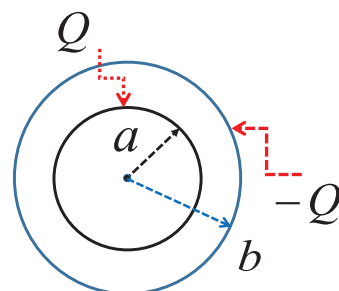


図 3.8: 2 球殻間の電位差

3.3 第3章の演習問題

問1 ガウスの法則は $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ であった. この式の未知変数は何か? またこの方程式は何個の式で成り立っているか?

問2 ∇^2 を極座標で表す式を用いて $\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$ を証明せよ. また $\int_{|r|<a} \nabla^2 \frac{1}{r} d^3r = -4\pi$ を示せ. ゼロのものを足したら有限になったのだが, この基本的な理由は何だと思うか?

問3 コンデンサーの容量の物理的な意味は, 2個の電極間の電位差を V とする時, その電極間の電荷 Q と $-Q$ にはどれだけの大きさの電荷を蓄えられるのかという容量の事である. 今, 半径 a と半径 b (但し $a < b$) の球面電極を考えよう. それぞれの電極に電荷 Q と $-Q$ が帯電している時この電極間の容量はいくらであるか積分形 Gauss の法則を用いて求めよ. 電場が求まった時の電位差は $V = \int_a^b E_r dr$ により求められる.

問4 半径 R の球の表面上に一様な面電荷密度 σ で電荷が分布している. この電荷が球内に作る電場がゼロである事を (a) 電位 ϕ を計算する (b) Gauss の法則で電場を計算するのそれぞれの方法により証明せよ.

問5 内半径 a , 外半径 b の球殻の外面に全電荷 $2Q$, 内面に全電荷 $-Q$ が一様に分布している. この電荷が作る電場を求めよ.

問6 半径 R の球内に一様な密度 ρ_0 で電荷が分布している. この電荷が球内に作る電場を (a) 電位 ϕ を計算 (b) Gauss の法則で計算 の2つの方法により求めよ.

3.4 閑話休題 3

人間が他の高等生物と比べて特に優れている事の一つに「言語の文法」が挙げられている。言葉を持つ生物は他にも数多くいるのだが、しかし人間の言語には「文法」があり、その事が最も重要であると考えられている。単語を羅列してもある程度の表現は可能ではあろうが、そこに文法力が備わった場合、表現空間は飛躍的に増大し、ほぼ無限に豊かな表現力となっている事は確かである。実際、外国語を話したいと思った時、まずは単語を覚える事から始めるがそれだけでは会話は出来ない。たとえ1500個の単語を覚えたとしてもその外国語の文法を知らないとなかなかうまく話せるものではない。ところが、その文法を理解し、それを自分のものにする事にはかなり大変な努力を必要としている。文法書を読んでやたらめったら覚えようとしてもそう簡単には文法力は身につかない。結局、一番良い方法はその外国語で普段良く使われている500個程度の「基本文章」を繰り返し繰り返し声に出してつぶやき、それをそのまま覚えてしまう事であろう。こうするといつの間にかその外国語の文法がある程度は身についてくるものである。その基礎がないまま外国に滞在したとしても、簡単な日常会話は別にして、物理の議論がしっかり出来るというレベルまで到達する事はかなり難しいものと思われる。

言語において文法力がその根幹であるとしたら、物理の理解で「文法力」に対応するものは何であろうか？ 物理現象を理解すると言う事は物理における様々な法則(方程式)を言語にして、その言葉で自然現象を表現する事である。その場合、沢山の法則を羅列的に並べてみても自然現象を理解する事は出来ない。それぞれの法則が持つ規則性とそれら法則間における物理的な関係を理解し、全体を互いにうまく関連つける事ができた時に人はわかったと思えるものであろう。量子力学の演習(12週間分)ではかなり多くの学生達が最初の数週間は全くわからないと泣きべそをかいている。しかし10週目くらいから突然わかり始めたと思える学生がよく見受けられる。これは量子力学の問題を解いているうちに、ある種の「文法力」が身につき始めて、問題間の関連性がある程度ついた時に、量子力学が少しわかったと思えるからであろう。

第4章 Poisson 方程式

Gauss の法則 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ と磁場がない場合の Faraday の法則 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ より $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ とおく事ができた．ここでマイナス符号は便利さのためである．この事より，Poisson 方程式

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad (4.1)$$

が得られている．この方程式は常に解けるようになっている．それは1個の方程式に対して未知関数は ϕ が1個である事より，変数の数と方程式の数が一致しているからである．あとは条件（境界条件）を必要に応じてつければ ϕ が一義的に決まってくる．

4.1 Laplace 方程式

ここで Poisson 方程式の右辺の電荷密度がゼロの時

$$\nabla^2\phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.2)$$

となり，この微分方程式を Laplace 方程式という．この方程式が電磁気学で重要になる場合がある．例えば一様電場中に導体を置いた時の電場の様子を知らいたい時はどうしても Laplace 方程式の解を持ってくる必要が出て来る．

4.1.1 Laplace 方程式とその極座標解

Laplace 方程式を極座標で書く事がよくある．この時，Laplace 方程式は極座標で書くと

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.3)$$

となる．一般的に φ 依存性は無いと仮定して十分なので，割合良く使われる一般解は $\cos \theta$ の1次項までを書くと

$$\phi(r, \theta) = \left(a_0 + \frac{b_0}{r} \right) + \left(a_1 r + \frac{b_1}{r^2} \right) \cos \theta \quad (4.4)$$

である．これは代入してみれば解になっている事がすぐに確かめられる．数学は言語であるから，この解を見つける事ができなくても物理では全く気にする事はない．これが解になっている事を知っていれば十分である．

4.2 Poisson 方程式

ここでは，Poisson 方程式の解を電荷分布が特別な場合に対して求めてゆこう．Poisson 方程式は式 (4.1) $\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$ であった．あとは電荷分布が与えられて境界条件さえわかれば，電位 ϕ を決める事が出来る．

4.2.1 点電荷の場合

点電荷の電荷密度は電荷 q が原点にある場合 $\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r})$ と書けている．一方において数学の公式として

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad (4.5)$$

である事がわかっているので，式 (4.1) の解は直ちにわかって

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (4.6)$$

が Poisson 方程式の解となっている．但し定数分の不定性は常にある．

4.2.2 平面上の電荷分布

今，平面上に面電荷密度 σ で電荷が一様に分布している場合を考える．平面は十分大きいとして端の影響は考えない事にする．この時，電位 ϕ は点 $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ に対して

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}} dx' dy' \quad (4.7)$$

となる．平面は十分大きいとしているので，電位を考える点 $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ は x, y に対する依存性はないとして十分である．これは

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta' \int_0^\Lambda r' dr' \frac{1}{\sqrt{r'^2 + z^2}} \quad (4.8)$$

と書く事が出来る．ここで r' の積分の上限を Λ とおいている．また $s = r'^2$ の置き換えをすると $ds = 2r' dr'$ より積分は直ちに出来て

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\Lambda - |z|) \quad \text{となる.} \quad (4.9)$$

ついでに電場を求めておくと，これは z -方向のみが有限なので

$$E_z(\mathbf{r}) = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\theta(z) \quad (4.10)$$

であり，ここで $\theta(z)$ はステップ関数で

$$\theta(z) = \begin{cases} -1 & z < 0 \\ +1 & z > 0 \end{cases} . \quad (4.11)$$

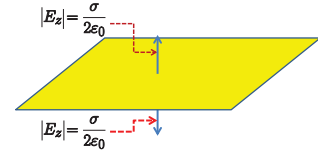


図 4.1: 平面電荷分布の電場

4.2.3 一般の電荷分布の場合

実は，式 (4.1) の一般解は全空間で考える限りすぐに求められる．この場合，

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.12)$$

を用いる．今，電位 ϕ の解を

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (4.13)$$

の形に仮定して，実際この式を Poisson 方程式に入れると ∇^2 は $\mathbf{r}$ にしかオペレートしないので

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad \text{となる.}$$

$$\text{よって} \quad \nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \{-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\} d^3r' = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$$

となって、確かに Poisson 方程式の解になっている。これは微分方程式を積分で書いただけではないかという質問が出るかも知れない。実際、その通りであるが、一般的に言って積分は簡単に実行できるという事が経験上あるために、式 (4.13) の形で書けた時にこれで解けたと考えるのである。

4.2.4 球殻に一樣電荷分布：Poisson 方程式による解

半径 R の球殻に電荷 Q が一樣に分布している場合、Poisson 方程式を解く事によって電位 $\phi(r)$ を求めて見よう。この場合、その面電荷密度を σ とすると電荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ は $\rho(\mathbf{r}) = \sigma\delta(r - R)$ と書くことが出来る。従って

$$Q = \int \rho(\mathbf{r}) d^3r = 4\pi\sigma \int_0^\infty \delta(r - R) r^2 dr = 4\pi\sigma R^2$$

の関係がある。Poisson 方程式は $r = R$ を除いて

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right) = 0$$

である。この解は $\phi(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$ と書ける。ここで $r < R$ の場合は $r = 0$ で $\phi(0) = \text{有限}$ が必要なので $\phi(r) = C_2 : (r < R)$ となる。一方、 $r > R$ の場

合は $r \rightarrow \infty$ で $\phi(\infty) = 0$ が境界条件なので $\phi(r) = \frac{C_1}{r} : (r > R)$ となる。

ここで $r = R$ での Poisson 方程式は

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \delta(r - R) \quad (4.14)$$

なので、この式を $r = R - \epsilon$ から $r = R + \epsilon$ まで積分すると (但し、 $\epsilon \rightarrow 0$)

$$\int_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right) r^2 dr = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_{R-\epsilon}^{R+\epsilon} \delta(r - R) r^2 dr = -\frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \quad \text{となる。}$$

$$\text{よって } R^2 \left(-\frac{C_1}{R^2} \right) = -\frac{\sigma R^2}{\epsilon_0} \text{ より } C_1 \text{ が決まり } \phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \text{ と求まる。}$$

4.3 鏡像法：境界条件付き Poisson 方程式

導体表面を $x-y$ 平面としてこの導体を接地したとする．接地するという意味はこの導体表面の電位をゼロとした事を意味しているし，これを接地の定義と考えてよい．この導体表面から z -軸に距離 d 上に電荷 q を置いたとする．

4.3.1 境界条件付き Poisson 方程式の解法

この電荷 q が作る電位 ϕ を Poisson 方程式を解く事により，任意の点 $\mathbf{r}$ において求めて行きたい．ここで考えている領域は $x-y$ 平面の上半面だから $z \geq 0$ である事に注意する必要がある．この時，Poisson 方程式は

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{d})}{\varepsilon_0} \quad (4.15)$$

である．但し， $\mathbf{d} = (0, 0, d)$ である．ここで，接地の条件がなければ

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} \quad (4.16)$$

が Poisson 方程式の解となっている．しかしこれは $x-y$ 平面で電位がゼロという条件を満たしていない．それではどうしたら良いのであろうか？この解法は鏡像法として知られてる手法により与えられているが，ここでは Poisson 方程式を境界値問題として解く立場から解説しよう．基本は簡単で，Poisson 方程式の解には Laplace 方程式の解を足しても当然 Poisson 方程式の解になっていると言う事実を使うのである．例えば

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{(-q)}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}|} \quad (4.17)$$

という解を考えたとしよう．この時

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = \frac{(-q)}{4\pi\varepsilon_0} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}|} = -\frac{(-q)}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r} + \mathbf{d}) \quad (4.18)$$

となる．ところが右辺のデルタ関数の中がゼロになることはあり得ない．それは $-\mathbf{d}$ の位置は導体内部であり，電位を考えている場所 $\mathbf{r}$ がそこに来る事は勿論ないからである．すなわち右辺は常にゼロである．従って電位 ϕ として

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|} + \frac{-q}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}|} \right] \quad (4.19)$$

を取るとこれは確かに Poisson 方程式の解となっている．

しかもこれは導体表面で電位がゼロという境界条件を満たしている事がわかる.

● **鏡像法**： これは通常の電位の解に $-q$ の電荷を $-d$ の位置に置いた様な解を足せば良い事を示している. そしてこれがまさに鏡像法 (Mirror charge method) として知られているものである. 大変便利だからこの結果は覚えておいた方がよい.

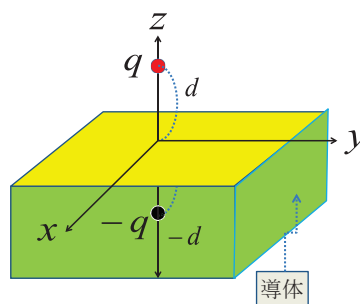


図 4.2: 鏡像法

4.3.2 $x-y$ 平面での電場

電位がわかると, 導体表面での電場が計算できる. 電位は

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right\} \quad (4.20)$$

であるから $E_x(\mathbf{r}) = \frac{qx}{4\pi\epsilon_0} \left\{ (x^2 + y^2 + (z-d)^2)^{-\frac{3}{2}} - (x^2 + y^2 + (z+d)^2)^{-\frac{3}{2}} \right\}$ であり, この E_x は $z=0$ でゼロになっている. 同様に E_y もゼロである.

一方, E_z は有限になる. 実際

$$E_z(x, y, 0) = -\frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial z} = -\frac{qd}{2\pi\epsilon_0} (x^2 + y^2 + d^2)^{-\frac{3}{2}}$$

となっている. これは導体表面に面電荷密度 σ が現れる事を意味している. Gauss の定理を導体表面を囲む小さな直方体で考えると導体内部の電場はゼロなので $\sigma = \epsilon_0 E_z$ となり, これより導体表面の面電荷密度は

$$\sigma(\mathbf{r}) = -\frac{qd}{2\pi} (x^2 + y^2 + d^2)^{-\frac{3}{2}} \quad (4.21)$$

となる.

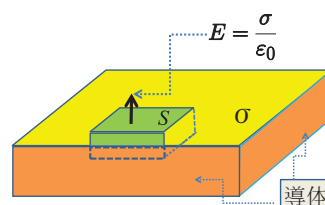


図 4.3: 導体表面の電場

ついでに、この面電荷密度を導体表面全体で積分してみると

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma dx dy = -\frac{qd}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dxdy}{(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{qd}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\theta}{(r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} = -q \end{aligned}$$

となり z -軸上に置いた電荷 q の逆符号の電荷 $-q$ が誘起された事がわかる.

4.3.3 電気双極子の鏡像法

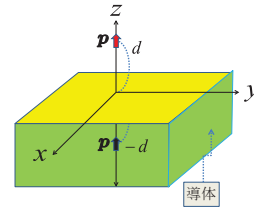
電気双極子 $\mathbf{p}$ を導体表面から z -軸上で距離 d に置いたとしよう. ここで導体を接地した時この電気双極子 $\mathbf{p}$ が作る電位を求める手法を解説しよう.

● **z -軸に平行の電気双極子：** 電気双極子 $\mathbf{p}$ を z -軸に平行に置いた時は、鏡像電気双極子 $\mathbf{p}$ を $z = -d$ の場所に同じ方向に置けば良い.

これは図を書いてみれば直ぐにわかる事である. 電気双極子は $-q$ から q へのベクトルであるので、鏡像法ではそれらの電荷をすべて逆にすればよいので結局 $z = -d$ の場所に同じ方向に $\mathbf{p}$ を置く事になる. 従って、電位 ϕ は

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{d})}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|^3} + \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{d})}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}|^3} \right\}$$

図 4.4: 双極子の鏡像法 (平行)



となる.

● **z -軸に垂直の電気双極子：** 電気双極子 $\mathbf{p}$ を z -軸に垂直に置いた時は、鏡像電気双極子 $-\mathbf{p}$ を $z = -d$ の場所に置けば良い.

従って、電位 ϕ は

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{d})}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|^3} - \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{d})}{|\mathbf{r} + \mathbf{d}|^3} \right\}$$

となる. ここで $\mathbf{p} \cdot \mathbf{d} = 0$ に注意する必要がある.

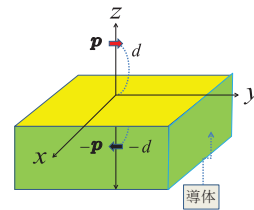


図 4.5: 双極子の鏡像法 (垂直)

4.4 Green 関数

Poisson 方程式を解く時に Green 関数の方法を使う場合がある．これは非斉次方程式を解く時によく使われる数学の手法である．

4.4.1 Green 関数の導入

ここでは簡単な例題として Poisson 方程式を取り上げ，その解法として Green 関数の方法を解説しよう．今，Poisson 方程式

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \quad (4.22)$$

を積分の形で解く事を考えて，Green 関数 $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ を次の方程式

$$\nabla^2 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.23)$$

を満たすものとして導入しよう．こうすると Poisson 方程式の解は

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^3 r' \quad (4.24)$$

と与えられる．これが式 (4.22) を満たしている事は式 (4.24) の右辺で ∇^2 が掛かるのは $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ だけである事に注意すれば明らかである．

4.4.2 Green 関数の解法

この Green 関数 $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ の解の形は式 (4.12) と比較すれば直ちにわかるように

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (4.25)$$

である．これを式 (4.24) に入れると

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'$$

となり，これは式 (4.13) と一致している．このように Poisson 方程式の解は Green 関数によって積分の形で与えられ，従ってこれは解けたと人々は考える

のである．Green 関数の方法で一つ重要な事がある．それは境界条件がある場合の Poisson 方程式を解く時に，Green 関数に対しても同じ境界条件をつけて解けば良いと言う事である．Green 関数に対する境界条件付き微分方程式を解く方が境界条件付き Poisson 方程式を解くよりもより簡単であるため Green 関数の方法は利用価値がかなり高いと言える．

4.4.3 Green 関数の物理応用への注意点

Green 関数の方法は利用価値が高く，数学的には全く問題のない手法であるが，しかしその物理への応用に関しては時に注意深さが必要な場合がある．それはこの Green 関数 $G(\mathbf{r})$ を Fourier 変換したもの

$$\tilde{G}(\mathbf{p}) = \int G(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} d^3r = -\frac{1}{p^2 + i\epsilon} \quad (4.26)$$

を伝播関数として物理で使う事があり，この時に問題となる事例が生じている．Poisson 方程式への応用には問題が起こらないが，電磁波を記述する際のベクトルポテンシャルに対する微分方程式を解く時には注意が必要である．詳細は少し複雑なので，ここでは簡単にコメントするにとどめるが，Green 関数に対する方程式 (4.23) は自由場に対する方程式ではないと言う事と関係している．この方程式は右辺にある δ 関数が点電荷に対応しているため，これは点電荷がある場合の Poisson 方程式に対応している．

● **自由場の伝播関数：** ところが，電磁波を扱うときは完全な自由場であり，その方程式の右辺に δ 関数は現われてはこない．この事が実は重大な問題を惹き起こしており，電磁波の伝播関数や弱い相互作用におけるベクトルボソンの伝播関数がこれまで正しく求められなかった最大の理由である．従って，自由場の伝播関数は Green 関数による伝播関数とは直接は結びつかない事をきちんと理解しておく事が重要である．この事はベクトル場の偏極ベクトルに対して，その形をどのように決めて行くかと言う問題に関係している．偏極ベクトルに対する方程式自体が自由場の場合と Green 関数に対する場合で異なっていると言う事をしっかり認識する必要がある．このため，正しい偏極ベクトルを得るためにはどうしても自由場に対する方程式をきちんと解かなければならないのである．但し，スカラー場の伝播関数に関しては Green 関数による伝播関数が特に問題を惹き起こすと言う事はない．それはスカラー場の場合，自由度が一つであるため，どちらで求めても同じ解が求まるからである．

4.5 何故 ϕ はいつも $\frac{1}{r}$ の形なのか？

ここで電磁気学だけではなく、場の理論に共通な問題を議論しよう。それは点電荷が作る電位 ϕ は必ず $\frac{1}{r}$ の形であるという事である。実際、2つの点電荷同士の Coulomb ポテンシャルはやはり $\frac{1}{r}$ の形である。さらに重力ポテンシャルの形も同じように $\frac{1}{r}$ の形になっている。

● **場の運動エネルギー**： 何故、いつもこの $\frac{1}{r}$ の形になるのであろうか？実はこれは場に対する運動エネルギーの形と空間が3次元であると言う2つの条件により、この形になる事がわかっている。後で議論する様に場のエネルギー U は例えば電位 ϕ だと

$$U \simeq \frac{1}{2} \int (\nabla \phi)^2 d^3r \quad (4.27)$$

の形である事が示される。ところが U がエネルギーの次元を持っていると言う事は ϕ が必ず $\phi \sim \frac{1}{r}$ の形である事を意味している。この時、 U が $\frac{1}{r}$ と同じ振る舞いになり従ってエネルギーの次元を持つ事がわかるのである。

● **次元解析 ($\hbar = 1, c = 1$ の自然単位系)**： 次元解析を行う時は、 $\hbar = 1, c = 1$ の自然単位系を取る。エネルギー E の次元を質量 M で表すと $E \sim M$ と書く。運動量 p の次元は $E = \sqrt{p^2 + m^2}$ より $|p| \sim M$ である。座標に関しては $p \cdot r$ が無次元であるので $|r| \sim \frac{1}{M}$ となる。従って $\frac{1}{r}$ がエネルギーの次元を持っている。

● **ϕ の次元**： それでは一般的な場の理論において ϕ の次元はどのように決まるのであろうか？質量 m がある場合の ϕ の場のエネルギー H は

$$H \simeq \frac{1}{2} m^2 \int \phi^2 d^3r \quad \text{で与えられる.}$$

この時 $M \simeq M^2 \phi^2 \left(\frac{1}{M}\right)^3$ であるから $\phi \sim M$ と決められて、確かに上で求めたように ϕ がエネルギーの次元を持っている事と一致している。

4.6 第4章の演習問題

問1 Laplace 方程式の極座標表示は

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \phi(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{である.}$$

$\phi(r, \theta) = \left(a_1 r + \frac{b_1}{r^2} \right) \cos \theta$ がこの方程式の解である事を確かめよ.

問2 数学の公式として $\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta(\mathbf{r})$ である. この式より

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \text{がどのように求められると思うか?}$$

問3 半径 R の球内に一様な密度 ρ_0 で電荷が分布している. この電荷が球内に作る電位 ϕ を Poisson 方程式を解いて求めよ. 但し境界条件は

(1) $r \rightarrow \infty$ で $\phi = 0$ (2) $r = 0$ で ϕ は有限 の2個である.

問4 接地された無限に広い平らな導体があり, そこから距離 d に点電荷 q がある. (a) 導体面に誘起される電荷の面電荷密度を求めよ. (b) 点電荷に働く力の大きさを求めよ. これは引力か斥力か?

問5 半径 R の球内に電荷密度 $\rho = \alpha r^n$ ($n > -1$) で電荷が分布している. この電荷が球内外に作る電場を求めよ.

問6 電荷分布 ρ が1次元分布の時 Poisson 方程式は $\frac{d^2 \phi}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0}$ と書ける. 電位 ϕ に対する境界条件として $\phi(0) = 0, \phi(1) = 0$ (接地された導体) とする. この時 Poisson 方程式を $0 \leq x \leq 1$ の範囲で解きたい. まず, $\frac{d^2 G(x, x')}{dx^2} = \delta(x - x')$ を満たし, 電位 ϕ と同じ境界条件を満たす Green 関数 $G(x, x')$ を求めよ. 次に一様な電荷密度 ρ_0 を持ち $\rho(x)$ は

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < \frac{1-d}{2} \\ \rho_0 & \frac{1-d}{2} \leq x \leq \frac{1+d}{2} \\ 0 & \frac{1+d}{2} < x < 1 \end{cases} \quad \text{の時, 電位 } \phi(x) \text{ を求めよ. } d \text{ は定数.}$$

4.7 閑話休題 4

昭和が終わる前年 Max-Planck 研究所に客員教授として招待され Heidelberg に1年間滞在して研究に没頭する事ができた。この時、共同研究者である Heidelberg 大学教授の Hüfner が2年生に力学を講義していたため、自分に力学演習のクラスを一つ見てもらえないかと頼んできた。ドイツの学生がどのような勉強振りをするのか興味があったので二つ返事で引き受けた。演習のクラスは15名になるとそのクラスの定員を締め切り、130名ほどの学生を必要な数のクラスに振り分けていた。自分のクラスに対しては英語が喋れる事を条件にしたのだが15名の学生が集まり演習の授業を始めた。結局、授業はドイツ語で行ったが、自分のドイツ語の発音が悪くて通じない事が何度かあった。学生の勉強振りはどの国のどの大学でも全く同じで、よく勉強し良くできる学生達とスケートボードなどにしか興味ないような勉強嫌いな学生達が等分に入り混じっていた。そのうちの一人に Baden-Württemberg 州ではかなりテニスが強かったという学生がいて、数回一緒に室内でテニスをしたものである。

冬学期も終盤になったある日、Hüfner が「力学の講義に出ている学生を引率して遠足に行くから一緒に来ないか？」と誘ってくれた。バス旅行はバス酔いするため逡巡したのだが、意を決して同行した。驚いた事に8割近くの学生が参加していた。目的地は Stuttgart にある物性関係の Max-Planck 研究所とその近郊にある Kepler Museum であった。研究所についたら、その研究者達が総出で出迎えてくれた。そして学生達に非常に丁寧に自分達の研究を解説していた。まだ2年生なのに学生達も研究者達によく質問をしていて、これには吃驚したものである。その後 Weil der Stadt という小さな町にある Kepler Museum を訪れたが、これはなかなか面白いものであった。Kepler の業績はよく知られているが、しかし彼の母親が魔女裁判にあって、随分苦勞した話が克明に記されていた。またこの町は Kepler に2度救われたと言われている。最初の戦争は19世紀以前の出来事であるが、2回目の話は第2次世界大戦中の事である。フランス軍がドイツを攻めた時、フランス軍将校が「この町は Kepler が生まれた町だから空爆してはいけない」として空爆を避けたと言う話が事実として伝わっている。当時のフランス軍将校はそれだけ教養があったと言う事であろうか？

第5章 電場のエネルギー

電場のエネルギーとは荷電粒子間のすべての相互作用エネルギーの事である。ここでは電場のエネルギーを導出するが、一度その導出を理解したら、後はその結果をしっかりと覚えておく事が大切である。

5.1 荷電粒子間のエネルギー

電荷 q_1 を $\mathbf{r}_1$ に電荷 q_2 を $\mathbf{r}_2$ に置いた時、この2つの電荷間に働く Coulomb エネルギー U は
$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$
 であった。従って、3個の電荷 q_1, q_2, q_3 を $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ に置いた時は

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} + \frac{q_2 q_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|} + \frac{q_3 q_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|} \right)$$

となる。これより N 個の電荷の場合のエネルギーは直ぐに予想がついて

$$U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (5.1)$$

と書ける事がわかる。ここで2で割っているのはそのまま和を取ると同じものを2回数えてしまうからである。

5.1.1 N 体系の電位と電場のエネルギー

電荷 q_i に注目する時、この電荷が他の全ての電荷から受ける電位は

$$\phi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (5.2)$$

である。従って N 体系の荷電粒子間のエネルギーは

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \phi_i \quad \text{となる。} \quad (5.3)$$

5.2 電場のエネルギー

ここで荷電粒子が連続的に分布していると仮定しよう．この時は次の置き換えを行う事になる．

$$\sum_i \Rightarrow \int d^3r, \quad q_i \Rightarrow \rho(\mathbf{r}), \quad \phi_i \Rightarrow \phi(\mathbf{r}) \quad (5.4)$$

よって式 (5.3) は

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) d^3r \quad (5.5)$$

と書ける．ここで Poisson 方程式 $\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}$ を使うと $\rho(\mathbf{r})$ を $\phi(\mathbf{r})$ で書き換える事が出来る．

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla^2 \phi(\mathbf{r})) \phi(\mathbf{r}) d^3r$$

さらに恒等式 $\nabla \cdot (\nabla \phi(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r})) = (\nabla^2 \phi(\mathbf{r})) \phi(\mathbf{r}) + \nabla \phi(\mathbf{r}) \cdot \nabla \phi(\mathbf{r})$ より

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int \nabla \phi(\mathbf{r}) \cdot \nabla \phi(\mathbf{r}) d^3r - \frac{\epsilon_0}{2} \int \nabla \cdot (\nabla \phi(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r})) d^3r \quad \text{となる.}$$

ここで第2項の積分は面積積分になり，これは球の半径 R を十分大きくすると

$$\int \nabla \cdot (\nabla \phi(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r})) d^3r = \int_{r=R} (\nabla \phi(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}))_n dS \sim \frac{1}{R} \rightarrow 0$$

となりゼロになっている．これは積分量がエネルギーの次元を持つため R^{-1} の振る舞いは予想通りである．よって電場のエネルギー U は $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r})$ を用いると

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 d^3r \quad (5.6)$$

となる．これは大変重要な式なので結果を必ず覚えておこう．この電場のエネルギーは荷電粒子間のクーロンエネルギーを足しただけである．式 (5.6) は電場で書いているがその電場は荷電粒子が作っている事に注意しよう．

5.3 電場のエネルギーの具体例

荷電粒子が作る電場のエネルギーを具体的に計算して行こう．ここでは球対称性がある場合のみを例題としてあげておこう．

5.3.1 点電荷の自己エネルギー

点電荷 q の作る電場は $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ なのでこの電場のエネルギー U は

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 d^3r = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 4\pi \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^4} r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r_0} \rightarrow \infty \quad (5.7)$$

となって無限大になる．ここで r_0 は電子の半径 (古典電子半径ではない!) であり，現在までの観測値はゼロとして矛盾はないと考えられている．これは電子の自己エネルギーが発散する事を意味しているが自己エネルギーは観測量ではないので物理的な意味はない．

実際，物理学では自然現象を如何に記述できるかと言う事のみが重要であると言う事を常に頭に入れておく必要がある．但し，電子の半径 r_0 が本当にゼロかと言う問題は再考する必要がある．これまででは主として電子の $(g-2)$ 測定と理論計算との比較から決められていた．しかし $(g-2)$ の理論計算自体が再考を余儀なくされているのが現状であり，このため電子が本当に「点粒子」かどうかは良くわからない．

$$U = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r_0} \rightarrow \infty$$

図 5.1: 点電荷の自己エネルギー

5.3.2 導体球のエネルギー

半径 R の導体に電荷 Q が与えられたとしよう．この時，電荷は球の表面にのみ分布する．何故そうなるかは後ほど議論しよう．この時，電場は内部ではゼロ，外部では $E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ であるから，電場のエネルギーは

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 d^3r = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 4\pi \int_R^{\infty} \frac{1}{r^4} r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \quad (5.8)$$

となっている。この電場のエネルギーは電位を使っても計算できる。この場合、電荷分布は表面にしかないので

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) d^3r = \frac{Q}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right)$$

となり、確かに式 (5.8) と一致している。

5.3.3 球状一様電荷分布のエネルギー

半径 R の球に電荷 Q が一様に分布している場合を考える。この様な分布が実際の物質では簡単に起こり得ない事はすでに議論した。しかし原子核の場合、電荷分布はほぼ一様と考えて良い事は確かである。この場合、電場は

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} & : r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} & : r > R \end{cases}$$

で与えられるので、電場のエネルギーは

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\left(\frac{Q}{R^3 4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int_0^R r^2 (4\pi r^2) dr + \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \int_R^\infty \frac{1}{r^4} (4\pi r^2) dr \right]$$

となり、よってこのエネルギーは

$$U = \frac{3}{5} \left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right) \quad (5.9)$$

となる事がわかる。これは導体球のエネルギーと比べると少しだけ大きくなっている。自然界ではエネルギーが低い状態が実現されている。従って、導体球の場合、表面に電荷が分布した方が明らかにエネルギーが低く、必然的に導体球では表面に電荷が分布する事になっている。

更に、導体球では電荷が表面にしか存在できないと言う事実は、導体内の電場が常にゼロである事を意味している。この導体内部では電場がゼロである事実は様々な形で証明されているが、この結果もそのうちの一つではある。

5.4 第5章の演習問題

問1 5個の電荷 q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 を $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, \mathbf{r}_5$ に置いた時のエネルギーは $U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i,j=1, i \neq j}^5 \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$ で与えられる. この式を具体的に計算して確かめよ. このエネルギー U を電位 ϕ で書け.

問2 点電荷 q の作る電場は $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$ であり, この電場のエネルギー U は無限大である事を示せ. この物理的意味は何か?

問3 半径 R の球に電荷 Q が分布している時の電場のエネルギーは

$$U = \begin{cases} \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} & : \text{一様電荷分布} \\ \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} & : \text{表面電荷分布} \end{cases}$$

である事を示せ. 現実の物質ではどちらが実現されると思うか?

問4 空間に電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ で分布した電荷が作る電位を $\phi(\mathbf{r})$ とする時, 電場のエネルギーが $U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) d^3r$ と書ける事を示せ.

問5 2枚の広い導体板が水平に置かれ, その中央に1個の電子を置いたとする. この時, 電子に働く重力と電気力が釣り合うためには上下の板に何ボルトの電位差を与えればよいか? 但し, 板の間隔 $a = 0.1 \text{ m}$, 電子の質量 $m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, 電子の電荷 $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ とする.

問6 質量数 A の原子核の半径は $R \simeq 1.2 \times A^{\frac{1}{3}} \text{ fm}$ であるとし, 電荷は球内に一様分布しているとする. この時, ウラン原子核 ($A=238, Z=92$) の静電エネルギーはいくらか? またこのウランが電荷も質量数も半分の原子核に崩壊する時, どれだけの静電エネルギーが解放されるか?

第6章 電気容量

面積 S の平板を2枚平行においたものをコンデンサーという。2枚の平板の距離を d とする。この場合、基本的には電荷がどれだけこの平板に貯められるかと言う事が問題であり、電位を V とした時、どれだけ貯められるかの係数 C を $\boxed{Q = CV}$ として、 C をコンデンサーの電気容量と言う。これが容量 C の定義である。この容量を計算する場合、重要な仮定が一つある。平板に電荷 Q を与えた時にその平板が作る電場を計算するわけだが、この時、端の影響は無視する事である。それはその影響が小さいからではなく簡単には計算出来ないからである。しかし、平板が非常に大きい場合、真ん中あたりだったら、端の影響は比較的小さいとしても十分良い近似である。

6.1 平板の電場

平板に電荷 Q がある場合その面積を S とすれば面電荷密度 σ は $\boxed{\sigma = \frac{Q}{S}}$ となる。この時、 Q の電荷を持つ平板を $x-y$ 平面におき、それと垂直の方向を z -軸とすれば、平板の作る電場 E_z は

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \quad (6.1)$$

と書ける。この場合、端の効果は無視している。

6.2 コンデンサー

電荷 Q の平板に加えて、 $-Q$ の電荷を持つ平板を $x-y$ 平面から d だけ下にこれと平行に置いた時、この2枚の平行板の事をコンデンサーと呼ぶ。一見単純に見えるが電場のエネルギーを蓄えられると言う点で非常に重要である。この2つの平板内部の電場は式 (6.1) から $\boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$ となる事が計算される。この時2個の平板の外側の電場はゼロになっている。

この理由は簡単で、外側では2個の平面板の作る電場が打ち消し合うからである。電場が一様になっているので、2枚の平面板間の電位差 $V \equiv \phi_+ - \phi_-$ は $V = -\int_{-d}^0 E dz = Ed$ となっている。よって

$$V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Q}{\epsilon_0 S} d \quad (6.2)$$

である。

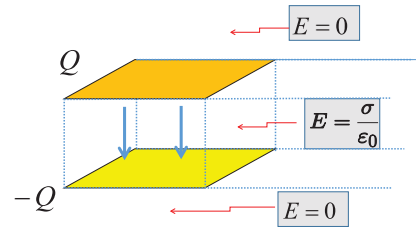


図 6.1: コンデンサー

6.2.1 コンデンサーの容量

電気容量の定義は、コンデンサーに電位差 V を与えた時、どれだけの量の電荷 Q を保つ事ができるか、すなわち、 $Q = CV$ として定義されている。これはある電位差 V の時に C が大きければそれだけ沢山の電荷を蓄える事が出来る事に対応している。従って電気容量 C は式 (6.2) より

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (6.3)$$

である事がわかる。

6.2.2 コンデンサーのエネルギー

コンデンサーに蓄えられたエネルギーは直ちに計算できて U は

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\mathbf{E}|^2 d^3r = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} \right)^2 S d = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{d} V^2 \quad (6.4)$$

と求められる。これは

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \quad (6.5)$$

となっていて、良く知られているコンデンサーに蓄えられたエネルギーの式になっている。

6.2.3 コンデンサーに導体を挿入

コンデンサーの平面版間にそれと同じ面積で幅 t の直方体の導体を挿入した場合を考えてみよう。この場合、電荷 Q を持つ平面板側の導体表面には面電荷密度が $-\sigma$ の電荷が誘起されることになる。従って、導体の反対側の表面には面電荷密度が σ の電荷が誘起されている。

そうすると、導体内部の電場は、導体表面が作る電場ともともとあるコンデンサーが作っている電場が完全に打ち消し合い、ゼロになっている。従って、コンデンサーの中に導体を挿入した効果は簡単に計算できてコンデンサーの電場のエネルギーは

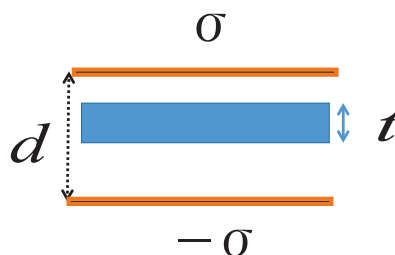


図 6.2: コンデンサーに導体挿入

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \right)^2 S(d-t) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{d} V^2 \left(\frac{d-t}{d} \right)$$

と求められる。

6.3 第6章の演習問題

- 問1** コンデンサーの電気容量の物理的意味は何だと思うか？
- 問2** Q の電荷を持つ平板の作る電場の大きさは $|E| = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ であった． Q と $-Q$ の電荷を持つ2個の平板によるコンデンサー内の電場が何故これらの電場の足し算になると思うか？
- 問3** コンデンサーのエネルギー U は $U = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{d} V^2$ である事を示せ．これは電場のエネルギー密度にコンデンサーの内側の体積 Sd を掛けただけである．コンデンサーの外側のエネルギーはどうなっているか？
- 問4** 面積 S の平面版2枚に電荷 Q と $-Q$ を与えて、距離 d 隔てて並べたコンデンサーの電気容量 C を求めよ．この平面版間に働く力はいくらか？
- 問5** 2つの同軸円筒の導体 A に電荷 Q , B に電荷 $-Q$ を与えた時、このコンデンサーの電気容量 C を求めよ．ただし、この円筒の半径は A が R_A , B が R_B で $R_A < R_B$ である．またその長さを ℓ とする．
- 問6** 電気容量 C_1, C_2 を持つ離れた2つの導体にそれぞれ Q_1, Q_2 の電荷を与えた．そしてその後この2つの導体を細い導線でつないだ．この時、導体系のエネルギーをつなぐ前と後で比較せよ．

第7章 誘電体

この章で誘電体を解説しよう。誘電体の物理は最も難しい問題と考えられているようである。学生にとっても、この誘電体の性質を余程うまく説明されない限り、ほとんどわからない場合が大半であると思われる。

7.1 分極

誘電体とは電場 E をかけると物質の中の電子がその原子の重心から電場の向きと反対方向に平均して少しずれると考えられる物質である。電子がずれると原子全体としてはプラスの電荷が電場と同じ方向に少しずれたように見える事になっている。この正・負の電荷は遠くから見ると電気双極子に対応している事がわかる。この事を分極 (Polarization) という。

● **分極ベクトル P** : 実際、分極ベクトルという物理量 P を

$$P = np_d \quad (7.1)$$

と定義する。ここで p_d は誘電体の内部で誘起された電気双極子である。また、 n はその電気双極子が誘電体内部で分布している分布関数であり、 $n = n(\mathbf{r})$ となっている。

この時、電気双極子の方向は基本的には電場 E と同じ方向であると考えて矛盾はない。従って、分極ベクトル P が電場 E に比例していると仮定してもそれ程悪い近似にはなっていないと考えられる。すなわち

$$P = \chi_e \varepsilon_0 E \quad (7.2)$$

として、この時の係数 χ_e は実験から決めるべき定数と考えて良い。

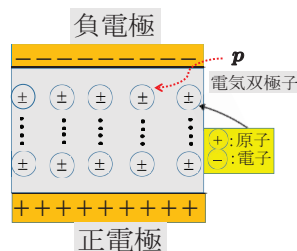


図 7.1: 分極ベクトル

7.2 分極電荷分布と誘電率

今, 分極電荷分布を ρ_p とする. 但し, $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ と定義されている. この時, Poisson 方程式は物質中に存在する真電荷分布を ρ_r として

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_r + \rho_p \quad (7.3)$$

となる. 電束密度 $\mathbf{D}$ を $\mathbf{D} \equiv \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ と定義すると Poisson 方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_r \quad (7.4)$$

となる. この電束密度 $\mathbf{D}$ は

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \varepsilon_0 \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (7.5)$$

と書ける. 但し, ε は物質の誘電率と呼ばれていて $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi_e)$ である. ほとんどの誘電体ではこの誘電率 ε は定数と仮定して十分良い近似である.

7.3 誘電体のミクロな解釈

ここで誘電体の物理を比較的簡単に理解できる描象を解説したい. 前述したように, 誘電体では電場が掛かると電気双極子 $\mathbf{p}_d$ が誘起される. この時, この電気双極子 $\mathbf{p}_d$ が原点にあり, その電気双極子が点 $\mathbf{r}$ に作る電位 $\phi_d(\mathbf{r})$ は

$$\phi_d(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p}_d \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (7.6)$$

である事はすでに議論している. 誘電体を考える場合, 電気双極子 $\mathbf{p}_d$ が点 $\mathbf{R}$ にあるとすると, その電気双極子が点 $\mathbf{r}$ に作る電位 $\phi_d(\mathbf{r})$ は

$$\phi_d(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p}_d \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3}$$

である. ここで, 電気双極子が分布関数 $n(\mathbf{R})$ で分布している時を考えると全ての電気双極子によって作られる電位 $\phi_d(\mathbf{r})$ は

$$\phi_d(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int n(\mathbf{R}) \frac{\mathbf{p}_d \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} d^3R \quad (7.7)$$

となる. 一方数学の恒等式として

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} = \nabla_{\mathbf{R}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}$$

であるので電位 $\phi_d(\mathbf{r})$ は

$$\phi_d(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathbf{P} \cdot \nabla_R \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} d^3R \quad (7.8)$$

と書く事が出来る。但し、ここで分極ベクトル $\boxed{\mathbf{P}(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r})\mathbf{p}_d}$ を用いて書いてある。一方、再び数学の恒等式として

$$\nabla_R \cdot \left(\mathbf{P}(\mathbf{R}) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \right) = \mathbf{P}(\mathbf{R}) \cdot \nabla_R \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} + (\nabla_R \cdot \mathbf{P}(\mathbf{R})) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}$$

を用いて式 (7.8) を書き直すと

$$\phi_d(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\int \nabla_R \cdot \left(\mathbf{P} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \right) d^3R - \int (\nabla_R \cdot \mathbf{P}) \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} d^3R \right]$$

となる。この第1項は Gauss の定理を用いて書き直すと

$$\int_V \nabla_R \cdot \left(\mathbf{P} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \right) d^3R = \int_S \left(\mathbf{P} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \right)_n dS \rightarrow 0$$

となる。但し、境界では $P = 0$ とした。ここで分極電荷密度

$$\boxed{\rho_p(\mathbf{R}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{R})}$$

を用いると電位 $\phi_d(\mathbf{r})$ は

$$\phi_d(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho_p(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} d^3R \quad (7.9)$$

と書く事が出来る。この式 (7.9) は物理的にかなり重要な意味がある。誘電体中の電気双極子の作る電位を集めたらそれは分極電荷密度 ρ_p が作る電位に対応していると言う事である。これは Gauss の法則が誘電体では修正されて

$$\boxed{\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_r + \rho_p}$$

となっている事を意味している。これは式 (7.3) そのものである。

7.4 誘電体と電束密度

電束密度を $\boxed{D = \varepsilon E}$ で定義したので、誘電体内の Gauss の法則は

$$\nabla \cdot D = \rho_r$$

と書き直された。ここで真電荷 ρ_r とは何であるのかが問題である。現実の問題としてはどのようにしたら真電荷を誘電体の中に埋め込めるかであるが、かなり難しいものであろう。従って、通常の電磁気学の問題では、ほとんど全ての場合にこの真電荷 ρ_r はゼロとしている。後でこの問題を導体と関連して議論するのであるが、誘電体と導体の中間と考えられる物質においては、この真電荷の事を考慮する必要がでて来る。

7.4.1 誘電体の境界

2つの異なった誘電率をもつ物質が接しているとする。この境界は簡単のために平面で接しているとして十分である。この時、境界をはさむ小さな直方体を考えてそこで Gauss の定理を適用すると真電荷 ρ_r はゼロだから

$$\int_V \nabla \cdot D = \int_S D_n dS = D_n^{(1)} S - D_n^{(2)} S = 0$$

より

$$\boxed{D_n^{(1)} = D_n^{(2)}} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_1 E_n^{(1)} = \varepsilon_2 E_n^{(2)}} \quad (7.10)$$

となる。 n は法線方向を示している。一方、電場に対しては Faraday の法則を使う。磁場が無い場合を考えているので $\boxed{\nabla \times E = 0}$ である。

図 7.2: 誘電体の境界

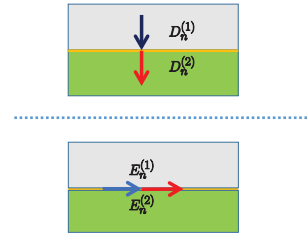
ここで、境界をはさむ一辺が a の小さな長方形を考えて、そこで Stokes の定理を適用すると

$$\int_S \nabla \times E \cdot dS = \int_s E \cdot ds = (E_t^{(1)} - E_t^{(2)})a = 0$$

となる。ここで E_t は $x - y$ 平面の任意の方向を示している。これより

$$\boxed{E_t^{(1)} = E_t^{(2)}} \Rightarrow \boxed{E_x^{(1)} = E_x^{(2)}, \quad E_y^{(1)} = E_y^{(2)}} \quad (7.11)$$

となる。この3つの条件式 (7.10), (7.11) より電場の接続が決まる。



7.5 誘電体の電場のエネルギー

ここで誘電体の電場のエネルギーを求めておこう。電場のエネルギーの求め方は同じである。電場のエネルギーは

$$U = \frac{1}{2} \int \rho_r(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) d^3r \quad (7.12)$$

と書ける。ここで誘電体の Gauss の法則 $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_r(\mathbf{r})$ を使うと

$$U = \frac{1}{2} \int (\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r})) \phi(\mathbf{r}) d^3r$$

書き換える事が出来る。これを前回と同じように書き直すと

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) d^3r$$

となる。ここで電束密度は $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ なので

$$U = \frac{\varepsilon}{2} \int |\mathbf{E}(\mathbf{r})|^2 d^3r \quad (7.13)$$

と書き換える事が出来る。但し、 ε は定数と仮定している。

7.6 誘電率 ε のコンデンサー

平板コンデンサーにおいて平板間 (その距離は d) には通常空気が存在している。しかしこの空気の誘電率は真空の誘電率とそれ程大きな差はないので、このコンデンサーの容量 C は $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$ となっている。

ここでこの平板間に誘電率 ε の物質を詰めたとしよう。この時、平板間の電束密度 D は $D = \sigma$ となっている。よって $D = \varepsilon E$ より、このコンデンサーの電場 E は $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ となる。従って、このコンデンサーの容量 C は $C = \frac{\varepsilon S}{d}$ である事がわかる。

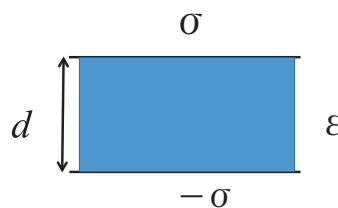


図 7.3: 誘電体のコンデンサー

7.7 第7章の演習問題

- 問1** 物質中での分極とは何であると思うか？またこの分極はどのような条件で起こると思うか？
- 問2** 電束密度 $\mathbf{D}$ と 電場 $\mathbf{E}$ とを比べるとどちらがより基本的な物理量であると思うか？
- 問3** 誘電体の電場のエネルギーは $U = \frac{1}{2} \int \rho_r(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) d^3r$ と書けるとしていい。何故、分極電荷はエネルギーには効いてこないのか？
- 問4** 誘電率が ε_1 の物質と誘電率が ε_2 の2つの物質が $x-y$ 平面で接している場合を考える。この場合、電束密度 $\mathbf{D}_1$ と $\mathbf{D}_2$ および電場 $\mathbf{E}_1$ と $\mathbf{E}_2$ 間の関係式を書け。
- 問5** 距離 d 隔てて並べた2つの平行板を誘電率が ε の誘電体ではさみ、各板に面電荷密度 σ , $-\sigma$ を与えた。誘電体表面に誘起される分極電荷密度を σ_p とする時、誘電体内の電場 $\mathbf{E}$ を σ と σ_p で表せ。
- 問6** 問5において、分極電荷密度 σ_p を分極ベクトル $\mathbf{P}$ で表し、 $\mathbf{P}$ と $\mathbf{E}$ の関係から σ_p と $\mathbf{E}$ を求めよ。これよりこの系の静電容量と静電エネルギーを求めよ。

第8章 物体に働く力

電磁気学ではよく物体に働く力を求めさせる問題がでてくる．しかし，これは必ずしも的確に計算できる問題と言えるかどうかは疑問である．それは物体（電流が流れている導線）を考えるとこれは質点ではないので，一般的には簡単に扱う事は出来ないのである．力が働くのは常に質点であるのに対して，取り扱っている導線は剛体である事に注意する必要がある．この事を踏まえた上で，ここでも電磁場と物体の力の問題を簡潔に解説しよう．

8.1 電荷に働く力

電荷 q を持つ粒子（質量は m とする）に対して電場 $\boldsymbol{E}$ が存在する時，その電荷を持つ粒子に力 $\boldsymbol{F}$ が働く．力は

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} = -q\nabla\phi = -\nabla U \quad (8.1)$$

となっている．ここで $U = q\phi$ がポテンシャルである．力学においては常に力 $\boldsymbol{F}$ が現れてこれが重要な働きをしている．直感的にもわかり易いし，実際，質量 m の質点に対する Newton 方程式は $m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F}$ である．ところが量子力学では「力」と言う概念が存在しないので力を調べたかったら期待値を求めるしか他にしようが無い．また電磁気学も場の理論であるため元々は力と言う概念は無い．しかしながら電磁場中の電子の運動を古典力学で考える場合はどうしても力の概念を使う必要があり，それはそれで重要でもある．

8.2 電気双極子に働く力

原点から $\boldsymbol{r}$ 離れた場所に，電気双極子 $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$ をおいて，電場 $\boldsymbol{E}$ を掛けたとしよう．これは原点に電位 ϕ を生み出す電荷があると考えて良い．この

時, 電気双極子と電場の相互作用エネルギー U は $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{d}|$ として

$$U(\mathbf{r}) = -q\phi\left(\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{d}\right) + q\phi\left(\mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{d}\right) \simeq q\mathbf{d} \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (8.2)$$

となる. ここで

$$\phi\left(\mathbf{r} \pm \frac{1}{2}\mathbf{d}\right) \simeq \phi(\mathbf{r}) \pm \frac{1}{2}\mathbf{d} \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}) + \dots$$

を用いた. この時, 電気双極子に働く力は

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})) \quad (8.3)$$

となっている. ここで注意する必要があるのは, この電場が電気双極子 $\mathbf{p}$ の重心に働いているという事である. この場合, 現実問題として電気双極子を作っている正負の電荷同士が何らかの形で束縛していないと電気双極子に働く力という事自体が意味をなさなくなる事に注意しよう.

8.3 コンデンサー平面板間に働く力

Q と $-Q$ の電荷を持つ 2 枚の平面板を距離 d 離れて $x-y$ 平面においた時そのコンデンサーのエネルギー U は式 (6.4) より

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int |\mathbf{E}|^2 d^3r = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 Sd$$

であった. ここで電荷 Q をもつ平面板から距離 z までに溜まったエネルギーは

$$U(z) = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 Sz = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} z \quad (8.4)$$

となる. よって, この場合の力 $\mathbf{F}$ は

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} \quad (8.5)$$

となり引力である. この場合も, 平面板に働く力という事がそれ程自明な事ではないのは, 平面板が質点ではない事によって. しかし偶然, 力の方向が z -軸に平行でしかも $x-y$ には依らなかったのが簡単であった. 力学は質点に対する方程式なので有限の大きさを持つ物体に対しては, その重心に力が働くと考えている. 従って剛体のような大きさを持つ物体に対しては, その回転エネルギーを考える必要が出て来るので問題が一気に難しくなっている.

8.4 電磁場と荷電粒子の相互作用

ここで電磁場と荷電粒子の間の相互作用を決める方法について簡単に解説しよう。これは実はかなり難しい問題を含んでいる。詳細は付録で解説してあるのでここでは結果のみを書いておく。電荷 q を持ちその質量が m の粒子に対する Lagrangian は

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + q(\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r})) \quad (8.6)$$

で与えられる。この式 (8.6) で $\mathbf{A}$ はベクトルポテンシャルである。これは磁荷が無いという方程式 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を自動的に満たすために $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ として導入されたものである。また ϕ は電位であり、スカラーポテンシャルと呼ばれる事もある。

● **電磁場中の運動方程式：** これを Lagrange 方程式に代入すると

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} + q\mathbf{E} \quad (8.7)$$

と求められる。この式の第1項は Lorentz 力と呼ばれていて、高校の物理でも良く出てくるものである。第2項は電場 $\mathbf{E}$ が電荷 q に働いた力 $\mathbf{F}$ を表している。この Lagrangian の形がどうしてこの様なものに決定されたのかについては「ゲージ不変性」と関係している。ついでにこの時の Hamiltonian H も書いておこう。 H は

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi \quad (8.8)$$

となっていて、ここには $\mathbf{E}$ や $\mathbf{B}$ はあらわれなく $\mathbf{A}$ と ϕ で書かれている。一方において、量子力学では力という概念がなく、常にポテンシャルが物理的に重要な概念になっている。実際、電荷 q を持つ質点が電磁場中にある場合の Schrödinger 方程式は

$$\left[\frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 + q\phi(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \quad (8.9)$$

となっている。ここで $\psi(\mathbf{r})$ は質点の状態を表す波動関数であり、また E はその状態のエネルギー固有値である。この量子力学の方程式には $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ ではなく $\mathbf{A}$ と ϕ が直接あらわれている事に注意しよう。

8.5 第8章の演習問題

- 問1** 電気双極子には大きさがある．この場合，電気双極子に働く力はどこに働くと考えて良いと思うか？
- 問2** コンデンサー板に働く力と言う場合，どこにどのように働くと考えて良いと思うか？
- 問3** 電荷 q ，質量が m の Lagrangian は $L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + q\{\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \phi(\mathbf{r}, t)\}$ であった．この Lagrangian は次のゲージ変換

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla\chi(\mathbf{r}, t), \quad \phi'(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$
 に対して不変である事を証明せよ．但し $\mathbf{r}$ は時間の関数であるとして，次の公式 $\frac{d\chi(\mathbf{r}, t)}{dt} = \nabla\chi(\mathbf{r}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial\chi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$ を使ってよい．
- 問4** 原点に電荷 $-q$ があり点 $\mathbf{d}$ に電荷 q がある時，点 $\mathbf{r}$ における電位 ϕ を求め，それから電場 $\mathbf{E}$ を求めよ．但し， $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{d}|$ とする．
- 問5** 電気双極子 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ がそれぞれ点 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ に置かれている．この電気双極子間の静電エネルギーを求めよ．
- 問6** 電気双極子 $\mathbf{p}$ が一定の数密度 n ($\sim 10^{23}$ 個/cm³) で3次元空間中 $-a \leq z \leq a$ に分布している．この時この系の作る電場を求めよ．

第9章 定常電流

電流とは基本的には電子の流れである。その際、陰極線のように電子が真空中を流れるのであれば単純であり全く問題はない。しかしながら、現実の問題はそう単純ではなく、電子は導体中を流れている。さらに半導体中でも一定の電流が流れる事がわかっている。その場合、導体とは何かまた半導体とは何か、さらには電流が流れないのは何故かと言う問題をきちんと理解しておく事が大切である。

9.1 電流(カレント)

電流とは電荷を持つ粒子（ここでは電子）が一方向に流れる事に対応している。ここで電子が真空中を流れる場合は単純であり、電流としての理解はそのイメージを作る事により可能である。しかし電磁気学ではこの陰極線の事を議論する事はめったにない。ここで議論する電流とは物質中(導体中)を流れる場合である。電子が導体中を流れる現象を扱うと電流自身の理解が一挙に難しくなる。この本で議論する電流のミクロなレベルでの描像は導体中に電位差があると その物質中にある準自由電子が格子間を一斉に飛び移る事 であるとしている。しかし電磁気学で扱うマクロな電流はもっと遥かに具体的であり、電荷の時間変化として定められている。

● **電流の定義：** 電流の定義は電荷の時間変化として与えられる。今、電荷密度を ρ とする時、ある体積 V の中に存在する電荷は $Q = \int_V \rho(\mathbf{r}) d^3r$ で与えられるので電流は電荷 Q の時間微分で与えられる。一方、電流密度を $\mathbf{j}$ とする時、その体積 V の表面から流れ込む「カレント」を電流 J として

$$\left\{ \begin{array}{ll} J = \frac{dQ}{dt} & : \text{電荷の時間変化} \\ J = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} & : \text{電流密度 } \mathbf{j} \text{ の面積積分} \end{array} \right. \quad (9.1)$$

とそれぞれ定義されている。

ここである体積 V を考えて、その体積内で電流を考えると、流れ出る方向を正（法線方向）に取っているので上の 2 つの J が等しい事は

$$\frac{dQ}{dt} = - \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{を意味している.}$$

ここで $Q = \int_V \rho(\mathbf{r}) d^3r$ を代入し、右辺に Gauss の定理を使うと

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^3r = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} d^3r \quad \text{となる.}$$

この式が任意の体積 V で成り立つ事から

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0} \quad (9.2)$$

となる。これは電荷保存を表していて最も重要な式である。

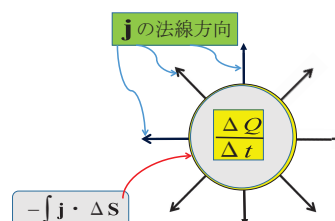


図 9.1: 電荷保存

9.2 オームの法則

オームの法則は電流密度 $\mathbf{j}$ が $\mathbf{E}$ に比例する式

$$\mathbf{j} = \kappa \mathbf{E} \quad (9.3)$$

を表している。ここで κ は電気伝導率と呼ばれるものである。これは電流はその物質に掛けられた電場に比例しているという一見わかり易い式となっている。しかしながらこの式を基本方程式とみなす事は出来ない。それは簡単で、この方程式は時間反転に対する対称性を持っていないのである。すなわち t を $-t$ にすると、電場は変わらないが電流はマイナスの符号が出る事で理解できる。場の理論では、時間反転不変性を破る方程式があると、それはフラックスがどこかでなくなる事を意味している。オームの法則では電気抵抗のためエネルギーが失われる事を意味している。

9.2.1 電流 J

電流 J は電流密度 $\mathbf{j}$ を面積に垂直な方向で面積積分した $J = \int \mathbf{j}_n dS$ で定義したので、オームの法則を使うと

$$J = \int \mathbf{j}_n dS = \kappa \int E_n dS \quad (9.4)$$

となる。今、電場 E_n は面積 S で積分する時、その座標には依らないと仮定すると $J = \kappa E_n S$ である。また距離 d の間の電位差を V とすると $V = E_n d = \frac{d}{S\kappa} J$ となっている。実験的には電位差が電流に比例して $V = RJ$ と書けているので、この抵抗 R は $\kappa\sigma = 1$ を用いて

$$R = \frac{d}{S}\sigma \quad (9.5)$$

となる。

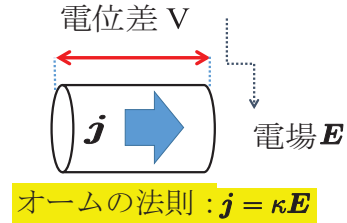


図 9.2: オームの法則

9.2.2 電気容量 C と電気抵抗 R

誘電体での Gauss の法則は $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ である。従って電荷 Q は

$$Q = \int \rho d^3r = \int D_n dS = \varepsilon \int E_n dS \quad (9.6)$$

と書ける。ここで電気容量 C は

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon}{V} \int E_n dS \quad (9.7)$$

となっている。一方、電流は $J = \kappa \int E_n dS$ であったので、抵抗 R は

$$\frac{1}{R} = \frac{J}{V} = \frac{\kappa}{V} \int E_n dS \quad (9.8)$$

となる事がわかる。この2つの式を比較すると $RC = \frac{\varepsilon}{\kappa}$ の関係式が成り立っている事が理解される。

9.2.3 $RC = \frac{\varepsilon}{\kappa}$ の物理的意味

この式 $RC = \frac{\varepsilon}{\kappa}$ は単純な式ではあるが物理的な説明が必要である．この検証実験を考えよう．今，電気容量 C のコンデンサーを考えてそれに電位差 V を与えたとしよう．ここで，コンデンサー板の面積を S ，板間の距離を d とする．さらに，この板間に誘電率 ε の誘電体を挿入しよう．この時，このコンデンサー内の電場を E とする．電位差 V は板にたまった電荷を Q として

$$V = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon S}, \quad C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

となる．次に同じ設定のコンデンサー板の間に電気伝導率 κ の導体を誘電体の代わりに挿入しよう．この時，電位差 V はオームの法則 $\boxed{j = \kappa E}$ より

$$V = Ed = \frac{Jd}{S\kappa}, \quad R = \frac{d}{S\kappa}$$

となる．これより $RC = \frac{\varepsilon}{\kappa}$ が求められる．しかしこの関係式には物理的な面白さはない．単に誘電率 ε の誘電体物質と電気伝導率 κ の導体物質を別々に測定した時に，関係式 $RC = \frac{\varepsilon}{\kappa}$ が成立しているという事である．

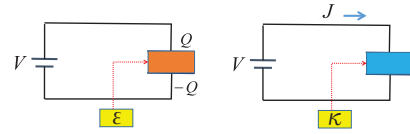


図 9.3: $RC = \frac{\varepsilon}{\kappa}$ の物理

9.3 Kirchhoff の法則

Kirchhoff の第 1 法則は回路における電流の保存である．すなわち，任意の閉回路に対して

$$\sum_i J_i = 0 \quad (9.9)$$

が成り立つ．Kirchhoff の第 2 法則は回路における電位差の保存である．すなわち，任意の閉回路に対して

$$\sum_i R_i J_i = \sum_i V_i \quad (9.10)$$

が成り立つ．これらの式は電流が電子の流れである事を考えれば当然の式である．物理的にはそれ以上の意味はない．

9.4 第9章の演習問題

- 問1** オームの法則が実際の物質でどの程度成り立っているのかを調べよ.
- 問2** オームの法則 $\mathbf{j} = \kappa \mathbf{E}$ は時間反転不変性を破っている事を証明せよ.
- 問3** コンデンサー内は通常真空であり, その静電容量は C である. このコンデンサー内に導体を入れると抵抗 R が求まり, その結果 $RC = \frac{\varepsilon}{\kappa}$ が求まっている. この現象の物理的な意味は何だと思うか?
- 問4** 回路に抵抗 R があるとエネルギーを失う. コンデンサーに電荷を貯めた時, その系のエネルギーはどうなっていると思うか? 系がエネルギーを失うとは物理的にどのような現象であると思うか?
- 問5** 導体中ではオームの法則 $\mathbf{j} = \kappa \mathbf{E}$ が成り立っているとする. この時, Gauss の法則 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ が成立しているとする. 導体内の電荷密度は $\rho = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\kappa}$ と減少する事を示せ.
- 問6** オームの法則 $\mathbf{j} = \kappa \mathbf{E}$ が成り立っている導体において κ が定数の場合, 電位 ϕ は Laplace 方程式 $\nabla^2 \phi = 0$ を満たす事を示せ.

9.5 閑話休題 5

オームの法則は時間反転に対して不変ではない。従ってその法則は経験則であり、それを基本法則として受け入れる事はできない。しかしマクロスケールで見たらそれはそれ程不思議な事ではないと言える。例えば Newton 方程式は確かに時間反転に対して不変であるが、かといって地球が太陽の周りを周回している現象そのものに対して時間を逆に回すことはできない。しかしもし時間を反転したとしたら、その観測量 (周期など) は今と全く同じであると言う事が時間反転不変性の物理が示しているすべてである。

対称性の問題を最初にきちんと物理的に考えたのは恐らく Pierre Curie であろう。彼は圧電効果や放射能を発見した事 (ノーベル賞は放射能で受賞) で良く知られているが、対称性に関しても重要な仕事をしている。特に、自然現象において「非対称性の物理現象はその原因がない限り結果として非対称性が現われる事はない」という Curie の原理を提唱している。この事は量子場の理論でも正しい事が今はわかっている。自発的対称性の破れがある時期に流行したが、もし「Curie の原理」をしっかり理解していたらあのような愚かな理論が提唱される事はなかった事であろう。現実には、カイラル対称性が自発的に破れる事などあり得ない事が厳密解によって証明されている。そしてこの事は Curie の原理の言っているとおり、対称性を破る相互作用 (原因) がない限り、系の対称性が自然に破れる事はないと言う極めて自然な結果であった。

ここで対称性が破れている弱い相互作用について考えてみよう。これは最初の Lagrangian にパリティを破る相互作用を入れる事により現象を説明していて、確かに Curie の原理と矛盾してはいない事がわかる。その他に対称性を破る力としては CP 対称性を破る相互作用が知られている。これはしかしオペレータでその対称性を破っているわけではなく、その相互作用の結合定数を複素数にする事により CP 対称性を破っている。この現象も Curie の原理とは矛盾しないが、しかし物理的には今ひとつ理解し難い問題でもある。すなわち、対称性をオペレータでなくて、その強さをあらわす係数で破る事が直感的には良くわからない。観測量 (実験値) は実数なので何処かにジャンプがあるものと思われるが … しかし人々はわかっているのであろうと思う。

第10章 電流の作る磁場

電流が流れるとその回りに磁場ができる．これが Ampère の法則である．定常電流の場合，そこに作られる磁場を求める事はそれ程難しくはない．

10.1 Biot-Savart の法則

電流が流れるとその周りには磁場ができる．この磁場の生成は Ampère の法則 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ に従っている．しかし，Ampère の法則は微分方程式であり，取り扱いが難しい．そこでこの方程式を積分形で書き直した式があり，Biot-Savart の法則と呼ばれている．この Biot-Savart の法則は電流 J がある線 C に沿って流れているとした時

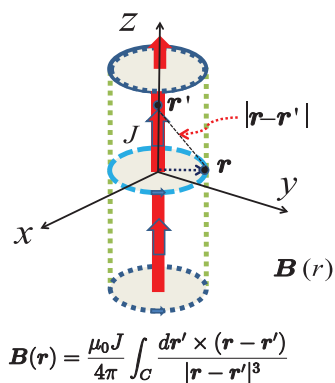


図 10.1: Biot-Savart の法則

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (10.1)$$

という線積分で書けている．但し， $J d\mathbf{r}' \equiv \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r'$ を用いた．

10.1.1 Biot-Savart の法則と Ampère の法則

この式が Ampère の法則を満たしている事を証明する事は簡単で次の式に注意すればすぐに出来る．

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \times \left(\int \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r' \times \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r' \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

ここでベクトルの公式 $\boxed{\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}}$ を用いた。また,

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

を使うと

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3r' (-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) = \mu_0 \mathbf{j} \quad (10.2)$$

となり, 確かに Ampère の法則を満たしている事が示された. Ampère の法則は電流が流れるとその回りに磁場が出来ることを示している. どのように磁場が出来るのかは Biot-Savart の法則で知ることが出来る. 以下においては具体的に計算を行う事によって, 電流が作る磁場について理解を深めて行こう.

10.1.2 直線電流の作る磁場

z -軸の正の方向に電流 J が流れている場合を考え, この電流が作る磁場を計算しよう. この時, 観測者の座標を $\mathbf{r} = (x, y, z)$, 電流の座標を $\mathbf{r}' = (0, 0, z')$ とすると $d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = (-ydz', xdz', 0)$ となっている. よって,

$$B_x(x, y) = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-ydz'}{(x^2 + y^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\mu_0 J}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (10.3)$$

$$B_y(x, y) = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dz'}{(x^2 + y^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 J}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (10.4)$$

となる. 但し, 積分公式 $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz'}{(z'^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{a^2}}$ を用いた. この磁場を円筒座標表示で見ると $\boxed{x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta}$ であるから,

$$\mathbf{B}(r) = (B_x \cos \theta + B_y \sin \theta) \mathbf{e}_r + (-B_x \sin \theta + B_y \cos \theta) \mathbf{e}_\theta = \frac{\mu_0 J}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta \quad (10.5)$$

と求められる.

10.1.3 円電流の作る磁場

半径 a の円上を電流 J が流れているとしよう．この円は $x-y$ 平面にあるとして観測者の座標を $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とする．

この時、流れている電流上の座標を

$\mathbf{r}' = (a \cos \theta, a \sin \theta, 0)$ と書く事にしよう．

従って $d\mathbf{r}' = (-a \sin \theta d\theta, a \cos \theta d\theta, 0)$ である．

ここで $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - a \cos \theta, y - a \sin \theta, z)$ に注意すると

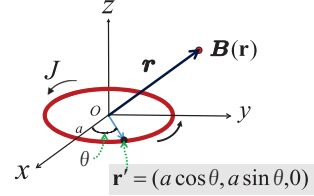


図 10.2: 円電流が作る磁場

$$d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = za \cos \theta d\theta \mathbf{e}_x + za \sin \theta d\theta \mathbf{e}_y - (ya \sin \theta + xa \cos \theta - a^2) d\theta \mathbf{e}_z$$

となり、これより磁場は

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{za \cos \theta \mathbf{e}_x + za \sin \theta \mathbf{e}_y - (ya \sin \theta + xa \cos \theta - a^2) \mathbf{e}_z}{(r^2 - 2ax \cos \theta - 2ay \sin \theta + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (10.6)$$

と求まる．この積分は厳密には出来ないが、簡単にできる例題を示そう．

● **円電流の作る磁場 (z -軸上) :** この時は簡単に積分ができる．

$x = 0, y = 0, r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |z|$ であるから

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{e}_z \quad \text{と求められる.}$$

● **円電流の作る磁場 (遠方) :** 遠方では $r \gg a$ である事を用いると

$$(r^2 - 2ax \cos \theta - 2ay \sin \theta + a^2)^{-\frac{3}{2}} \simeq \frac{1}{r^3} \left[1 + \frac{3ax \cos \theta}{r^2} + \frac{3ay \sin \theta}{r^2} - \frac{3a^2}{2r^2} + \dots \right]$$

となる．この時、式 (10.6) の積分は直ちに出来て

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left[\frac{3zx}{r^5} \mathbf{e}_x + \frac{3zy}{r^5} \mathbf{e}_y + \frac{3z^2 - r^2}{r^5} \mathbf{e}_z \right], \quad m = J\pi a^2 \quad (10.7)$$

と求められる．ここで定義した $m = J\pi a^2$ は磁気双極子 (モーメント) と呼ばれるものである．今、 $\mathbf{m} = (0, 0, m)$ を導入すると式 (10.7) は

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (10.8)$$

と書く事ができる。電気双極子の事を思い起こすと

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (10.9)$$

であったから、式の形がよく似ている。このため、 ϕ_m を「磁位」として

$$\phi_m(\mathbf{r}) \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (10.10)$$

と定義する事がある。この時、磁気双極子の作る磁場は $\mathbf{B} = -\nabla\phi_m$ と覚え易くかつ計算しやすい形になっている。勿論、磁位に物理的な意味はない。

● **磁気双極子は最小単位：** 磁荷が存在しないため、磁場関係では磁気双極子が磁場を作り出す最小単位となっている。このため、様々な場合において磁気双極子は非常に重要な役割を果たしている。その意味ではこの ϕ_m を磁位として覚えておくのも悪くはないし結構便利でもある。磁石も磁気双極子が集まったものである。但し、その磁気双極子は電子のスピンで生成されている。

10.2 Ampère の法則 – 積分形

定常状態における Ampère の法則は $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ であった。この式に対して Stokes の定理 $\int_S \nabla \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}$ を応用すると

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 J \quad (10.11)$$

となる。ここで J は自分が考えているループの中を通過する電流である。この式を Ampère の法則の積分形という。これはかなり便利な式である。ただし、この式が使えるのは特殊な対称性がある場合である。これは積分形の Gauss の定理の応用と同じである。Ampère の法則には方程式が2個あるが、積分形の式は1個しかない。従って対称性がある場合にのみ有効であり、ほとんどは電流が直線で流れる場合だけに利用されている。

10.2.1 直線電流の作る磁場

z -軸の正の方向に電流 J が流れている場合を考える。この場合、 z -軸を中心とした半径 r の円を考えて、この円のなかで Ampère の法則の積分形を応用する。ここで $d\mathbf{S}$ の解説を簡単にしよう。これは面積の積分であるが、あ

るベクトル量 $\mathbf{A}$ を考えてこの積分をある面 $d\mathbf{S}$ に垂直な量で実行したい場合を考えている。この時、 $\mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ としてやれば良いと言う事である。一方、線積分である $d\mathbf{r}$ は線 C に沿って積分すると言う事である。簡単に計算できる問題は限られていて、直線か円かどちらかの場合のみである。例えば、ある曲線に沿ってと言う場合、ほとんどはそれを直線に直すか、または円に書き換えるかどちらかで積分する以外、実行する事は簡単ではない。

直線電流の作る磁場の問題の場合、半径 r の円の線積分は $d\mathbf{r} = r\mathbf{e}_\theta d\theta$ である事から、

$$\mu_0 J = \int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = r \int_0^{2\pi} \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_\theta d\theta = r 2\pi B_\theta$$

となり、これより

$$\mathbf{B}(r) = \frac{\mu_0 J}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta \quad (10.12)$$

と求められる。これは Biot-Savart の法則で求めた式 (10.5) と一致している。

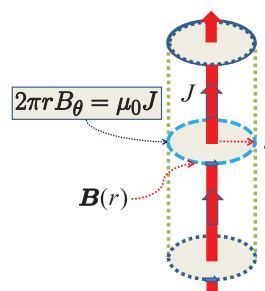


図 10.3: 直線電流

10.2.2 平面電流の作る磁場

電流が $x-y$ 平面を y -軸の正の方向に面電流密度 K で流れているとする。この時、どのような磁場が作られるかが設問である。これは Ampère の法則の積分形を利用する。今、 x -軸に平行で y -軸に直交するような長さ ℓ の小さな長方形を考えよう。この長方形に対して Stokes の定理を適用すると

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = 2B\ell = \mu_0 \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 K\ell$$

よって、磁場は $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 K}{2} \frac{z}{|z|} \mathbf{e}_x$ と求める事が出来る。

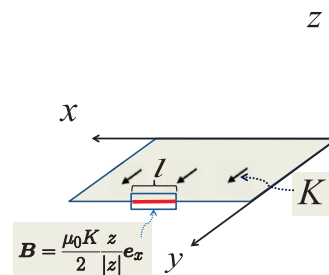


図 10.4: 平面電流

10.3 電流に働く力

磁場中を荷電粒子が速度 $\mathbf{v}$ で運動するとその荷電粒子に Lorentz 力が働く. Lorentz 力は $\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ と書けている. 電流 J は流れであり, それは速度に比例している. 従って, 電流と速度は大雑把に言って $\int J d\mathbf{r} \simeq e\mathbf{v}$ の関係があると考えて良い. 従って, 流れている荷電粒子の密度を n とする時

$$e \langle \mathbf{v} \rangle = \int n e \mathbf{v} d^3r = \int \mathbf{j} d^3r = \int J d\mathbf{r}$$

となっている. 従って, 電流 J に働く微小な力 $d\mathbf{F}$ は

$$d\mathbf{F} = J d\mathbf{r} \times \mathbf{B} \quad (10.13)$$

である. 但しこの場合, 力が働くのは無限小の流れの部分に働く力と考えるのである. 力は常に質点に働くものとし我々は理解できないので, この点では電流に働く力はいくまでも近似的な描像である.

10.3.1 例題：円電流と直線電流に働く力

今, z -軸正の向きに電流 J_1 が流れているとしよう. さらに, x -軸上で d のところに中心を置く半径 a の円電流 J_2 が $x-z$ 平面上を流れているとしよう. この時, 電流 J_1 が作る $x-z$ 平面上での磁場 $\mathbf{B}_1$ は点 $\mathbf{r} = (x, 0, z)$ において

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 J_1}{2\pi|x|} \mathbf{e}_y \quad (10.14)$$

となる. 従ってこの円電流が受ける力は

$$\mathbf{F} = \int J_2 d\mathbf{r}' \times \mathbf{B}_1 \quad (10.15)$$

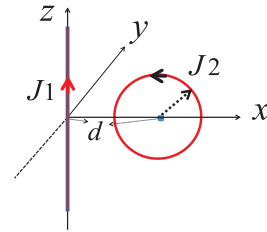


図 10.5: 円電流と直線電流

である. この円上の点とその微分は

$$\mathbf{r}' = (d + a \cos \theta) \mathbf{e}_x + a \sin \theta \mathbf{e}_z, \quad d\mathbf{r}' = -a \sin \theta d\theta \mathbf{e}_x + a \cos \theta d\theta \mathbf{e}_z \quad \text{より力は}$$

$$\mathbf{F} = J_2 \int (-a \sin \theta d\theta \mathbf{e}_x + a \cos \theta d\theta \mathbf{e}_z) \times \frac{\mu_0 J_1}{2\pi(d + a \cos \theta)} \mathbf{e}_y \quad (10.16)$$

となる. これは書き換えると

$$\mathbf{F} = -\frac{J_2 J_1 \mu_0 a}{2\pi} \int \left(\frac{\sin \theta}{d + a \cos \theta} \mathbf{e}_z + \frac{\cos \theta}{d + a \cos \theta} \mathbf{e}_x \right) d\theta \quad (10.17)$$

となる．この力は円電流上の点に働く力を全部足したものになっている．この物理的な意味は難しい．それは電流が流れているのは導体であり，その導体に働く力と考えて良いかどうかは，もう一つステップを踏まない限り良くわからない．はっきりしている事は，力は荷電粒子に働くものであると言う事であり，それが導体というマクロな剛体に働く力と言いなおして良いであろうかと言う問題である．ここで実際に積分を実行すると力は

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= -\frac{J_2 J_1 \mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d-a}\right) \mathbf{e}_z \quad (0 < \theta < \pi) \\ \mathbf{F} &= -J_2 J_1 \mu_0 \ln\left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 - a^2}}\right) \mathbf{e}_x + \frac{J_2 J_1 \mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d-a}\right) \mathbf{e}_z \quad (\pi < \theta < 2\pi)\end{aligned}$$

と書く事ができる．

10.4 ベクトルポテンシャルと Biot-Savart の法則

ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ は 磁荷が無いという方程式 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を自動的に満たすように $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ として導入されたものである．この時 $\mathbf{A}$ には自由度が1個余分にある事がわかり，ゲージ自由度と呼ばれている．

10.4.1 ゲージ不変性

$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を満たすようにベクトルポテンシャルを導入したのであるが変数の数は $\mathbf{B}$ が3個で $\mathbf{A}$ も3個と減っていない．このため，もう一つ条件をつける必要がある．最もよく使われるのが Coulomb ゲージ固定と言われている条件であり $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ である．今後，この教科書ではこのゲージを常に取りする．この自由度が余分にある事をゲージ変換に対する不変性と呼んでいる．それは $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi$ においてもこの新しいベクトルポテンシャル $\mathbf{A}'$ は $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}'$ を満たしていて， $\mathbf{A}$ と区別できない事によっている．ここで $\chi(t, \mathbf{r})$ は時間と空間の任意の関数である．しかし，この不変性は Maxwell 方程式を考えるだけならば何も重要な意味を持っていない，ただ単に数学的な問題である．しかしながら電子と電磁場の相互作用を記述しようとするとき，どうしてもベクトルポテンシャルを使わざるを得ない．実際，電子と電磁場の相互作用は $H_I = -\int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d^3r$ と $\mathbf{A}$ を使って書かざるを得ない事がわかっている．何故， $\mathbf{A}$ で書かれているのかと言う疑問に対して明確な答えはまだないが，しかしこれが物理の面白さでもあろう．

10.4.2 Biot-Savart の式の導出

Ampère の法則よりベクトルポテンシャルを用いて Biot-Savart の式を求めてみよう。Ampère の法則は

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{j} \quad (10.18)$$

と書けている。ここでベクトルの公式

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A}$$

とゲージ固定 (Coulomb ゲージ) の式 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を用いると Ampère の法則は

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \quad (10.19)$$

となる。これは

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

に注意すれば直ちに解けて

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \quad (10.20)$$

となる。 $\mathbf{B}$ は $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ で与えられるのでこの式に上式を代入すると

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (10.21)$$

となり Biot-Savart の式が求められた。ここで $J d\mathbf{r}' = \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r'$ を用いている。

10.5 第10章の演習問題

- 問1** 直線電流 J が作る磁場 $\mathbf{B}$ を Ampère の積分形により計算する時、まずは直線と直行する $x-y$ 平面を考えて行く。電流を z -軸にとるためそこが $x-y$ 平面の原点となる。ここで半径 r の円を考える。この時、2次元平面での極座標では $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$, $d\mathbf{r} = r\mathbf{e}_\theta d\theta$ となる。この時、Ampère の法則 $\oint_r \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 J$ から磁場 $\mathbf{B}$ を求めよ。但し $B_\theta = \mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_\theta$ である。
- 問2** 電子の磁気双極子モーメント $\boldsymbol{\mu}$ は角運動量 $\mathbf{L}$ とスピン $\mathbf{s}$ に関係していて $\boldsymbol{\mu} = \frac{e\hbar}{2mc}(2\mathbf{s} + \mathbf{L})$ と書かれている。円電流が磁気双極子モーメントと関係している物理的な理由は何だと思うか？
- 問3** 4元のベクトルポテンシャル $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ で電場 $\mathbf{E}$ と磁場 $\mathbf{B}$ を表すと $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ となる。この場合、Faraday の法則 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ と $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は自動的に満たされている事を示せ。
- 問4** 中心を原点におき $x-y$ 平面内にある半径 a の円形コイルに電流 J を流した時、(a) z -軸上の磁束密度 (b) 原点から十分はなれた点 $\mathbf{r}$ における磁束密度 を求めよ。
- 問5** 無限に広い導体平面 ($x-y$ 平面) 上を y -方向に面電流密度 K の表面電流が一様に流れている。この時作られる磁束密度 $\mathbf{B}$ を求めよ。
- 問6** ベクトルポテンシャルを $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ で導入する時、Ampère の法則 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ は $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$ となる事を示せ。但し Coulomb ゲージ固定 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を使ってよい。

第11章 磁場と磁性体

磁場中に導体を入れると導体中のひよろひよろ電子は磁場の向きと直交する平面で円運動をする．この円運動は磁気双極子に対応して，この物質中に生成された磁気双極子は掛けた磁場を打ち消すように作られる．この理由は明らかで，磁場を掛けた導体の中の磁場のエネルギーがより小さくなるように磁気双極子が生成されるからである．

11.1 磁場のエネルギー

今，運動している荷電粒子の多粒子系を考えよう．ある粒子の電流密度を $\mathbf{j}$ とするとこれは他の粒子の作る磁場（ここではベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ ）と相互作用している．この時，系全体の相互作用エネルギーすなわち磁場のエネルギーは

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d^3r \quad (11.1)$$

で与えられる．ここで2で割るのは電場のエネルギーを求めた時と同じで数えすぎを防ぐためである．この形は電子と電磁場の相互作用 H' が古典的に $H' = e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}$ で与えられてる事から来ている．すなわち $e\dot{\mathbf{r}} \Rightarrow \int \mathbf{j} d^3r$ に注意すれば $H' = e\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} \Rightarrow \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d^3r$ に対応している事がわかる．ここで Ampère の法則 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ を用いて書き直すと磁場のエネルギーは

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} d^3r \quad (11.2)$$

となる．ベクトルの公式 $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ を用い

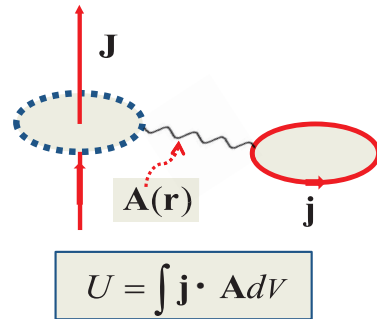


図 11.1: 磁場のエネルギー

て式 (11.2) 書き直すと

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int [(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})] d^3r \quad \text{となる.}$$

右辺の第 2 項は表面積分となり無限遠方ではゼロなので $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ より

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int |\mathbf{B}|^2 d^3r \quad (11.3)$$

が直ちに求められる. この磁場のエネルギーの式 (11.3) は大切なので覚えておこう. 問題を解くときにしばしば出てくるし利用価値は高いものである.

11.2 磁性体

磁性体に磁場をかけると磁気双極子が沢山できる事になる. これは磁性体には比較的自由に動ける電子が存在していると仮定しているからである.

11.2.1 円電流の作るベクトルポテンシャル

電流密度 $\mathbf{j}$ がある時, ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ は式 (10.20) で

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (11.4)$$

と求められた. 今, 半径 a の円に円電流 J が流れているとしよう. この円電流は原点を中心とする $x-y$ 平面にあるとする. 十分遠方では ($|\mathbf{r}| \gg a$)

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \dots \quad \text{であり}$$

$$\mathbf{r}' = a \cos \theta \mathbf{e}_x + a \sin \theta \mathbf{e}_y, \quad d\mathbf{r}' = -a \sin \theta d\theta \mathbf{e}_x + a \cos \theta d\theta \mathbf{e}_y$$

より, 積分はすぐに出来て

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 J \pi a^2}{4\pi r^3} [-y \mathbf{e}_x + x \mathbf{e}_y] \quad (11.5)$$

となる. ここで磁気双極子を $\mathbf{m} = J\pi a^2 \mathbf{e}_z$ で定義すると

$$\mathbf{m} \times \mathbf{r} = J\pi a^2 (-y \mathbf{e}_x + x \mathbf{e}_y) \quad \text{を用いて} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

と書く事ができる。この式から $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ を求めると

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{m}}{r^3} - \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right] \quad (11.6)$$

となる。この式は

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right) \quad (11.7)$$

とも書けるが、前章で議論したように磁位として $\phi_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right)$ と定義すると $\mathbf{B} = -\nabla \phi_m$ と書いて電気双極子との対応関係がわかり易く覚え易い。

11.2.2 磁化

磁場をかけると電子は磁気双極子を作りベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (11.8)$$

であった。この磁気双極子の分布関数を $n(\mathbf{r})$ とする時、これらの磁気双極子を全て足したベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{n(\mathbf{r}') \mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r'$$

と書く事が出来る。ここで磁化として $\mathbf{M} = n\mathbf{m}$ を導入して書き直すと

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'$$

となる。ここで部分積分をして磁化が無限遠方でゼロである事を使うと

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \quad (11.9)$$

と書ける。磁化により惹起され、それに対応する電流を $\mathbf{j}_M(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r})$

と定義するとベクトルポテンシャルは $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_M(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r'$ と書く事が出来る。これは Ampère の法則が修正された事を意味している。すなわち

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{j} + \mathbf{j}_M) \quad (11.10)$$

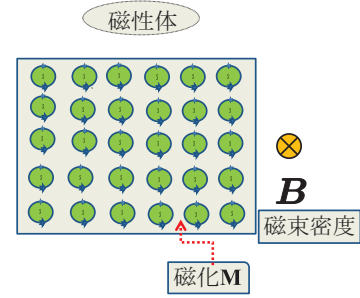


図 11.2: 磁化

となっている．ここで $\mathbf{j}_M = \nabla \times \mathbf{M}$ を式 (11.10) に代入すると

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{j} \quad (11.11)$$

となるので新しく磁場 $\mathbf{H}$ を $\mathbf{H} \equiv \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$ と導入すれば，Ampère の法則は

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (11.12)$$

と書かれる．ここで $\mathbf{M} = \mu_0 \chi_m \mathbf{H}$ とし，また $\mu \equiv \mu_0(1 + \chi_m)$ と定義すると

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H} \quad (11.13)$$

と書ける．この μ を透磁率，また χ_m を磁気感受率という．物質には様々な性質があるのだが，この磁気感受率 χ_m によりある程度の仕分けをしている．

1. $\chi_m > 0$: 常磁性体 (paramagnetic) $\Rightarrow \mathbf{B}$ を強くする．
電子スピンの少し揃う．遷移金属など．
2. $\chi_m < 0$: 反磁性体 (diamagnetic) $\Rightarrow \mathbf{B}$ を弱くする．
電子の円電流による．ビスマス，炭素など．
しかし電子スピンの影響はよくわからない．
3. 強磁性体 (ferromagnetism) : $\mathbf{B}$ と $\mathbf{H}$ が非線形の関係．
鉄，コバルトなど．

● **$\mathbf{B}$ と $\mathbf{H}$ の物理的意味** : この $\mathbf{B}$ と $\mathbf{H}$ の関係であるが電場 $\mathbf{E}$ と電束密度 $\mathbf{D}$ との関係から見ると，明らかに磁束密度 $\mathbf{B}$ の方がより基本的である．物質中で影響を受けた場の方は $\mathbf{H}$ であり，本当は $\mathbf{B}$ が変わるわけではない．しかし，式 (11.11) でも分かるように物質の影響は場を減らす方向に行くように見える．恐らくこのために定義が逆転したのであろう．このため磁束密度 $\mathbf{B}$ が強くなるという上記の表現は正しくはないが，慣習として使っている表記に従っている．これは電磁気学の大半の教科書で解説されているが，その物理的内容には十分注意する必要がある．

11.3 磁気双極子の物理

外部の磁場が導体に掛かると伝導電子は円運動をして磁気双極子を作る．電子がどの程度自由に動けるかによって外部磁場を打ち消す度合いが決まる事になる．超伝導状態とはこの伝導電子がほぼ自由に動けて、衝突ではエネルギーを失わない状態に対応している．磁場による円運動ではエネルギーを磁場から受け取る事は出来ないので円運動が伝導物質の状態を変える事はできない．

11.3.1 磁気双極子

磁気双極子 m を一般的に定義すると

$$m = \frac{1}{2} J \int \mathbf{r} \times d\mathbf{r} \quad (11.14)$$

となっている．ここで $\int J d\mathbf{r} = \int \mathbf{j} d^3r = e\mathbf{v}$ である事に注意すると

$$m = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times e\mathbf{v} = \frac{e}{2m_e} \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \frac{e}{2m_e} \mathbf{L} \quad (11.15)$$

となっていて、これは角運動量に直接関係している事がわかる．但し、 m_e は電子の質量である．量子力学においては磁気双極子を μ で表し、それは

$\mu = \frac{e}{2m_e} (\mathbf{L} + 2\mathbf{s})$ と書かれていてスピンに依存する部分が現れている．

11.3.2 磁気双極子と磁場の相互作用エネルギー

磁気双極子 m が磁場 $\mathbf{B}$ 中に存在している時、これらの間の相互作用エネルギーは $U_I = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ と書ける．しかし、その導出法はそれ程簡単ではない．その主な理由は電子が作る電流と他の粒子によって作られている磁場間の相互作用はベクトルポテンシャルで表現されていて磁場では書かれていない事によっている．実際、磁場 (外部磁場) $\mathbf{B}_{ext}$ 中に電流密度 $\mathbf{j}$ がある時、 $\mathbf{B}_{ext} = \nabla \times \mathbf{A}_{ext}$ として、その相互作用エネルギー U_I はゲージ理論より

$$U_I = - \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}_{ext} d^3r \quad (11.16)$$

と書かれている．ここで Ampère の法則 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ を使って電流密度 $\mathbf{j}$ を書き直す．但し、この時の $\mathbf{B}$ は電子が作る磁束密度であり、上記のベクトルポテンシャル $\mathbf{A}_{ext}$ とは関係ない場である．これより U_I は

$$U_I = - \frac{1}{\mu_0} \int (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}_{ext} d^3r \quad (11.17)$$

となる．ベクトルの公式 $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{A}$ を用いて U_I を書き直すと

$$U_I = -\frac{1}{\mu_0} \int (\nabla \times \mathbf{A}_{ext}) \cdot \mathbf{B} d^3r + \frac{1}{\mu_0} \int \nabla \cdot (\mathbf{A}_{ext} \times \mathbf{B}) d^3r$$

となる．この時、右辺第 2 項は表面積分になりゼロとなるので、結局 U_I は

$$U_I = -\frac{1}{\mu_0} \int (\nabla \times \mathbf{A}_{ext}) \cdot \mathbf{B} d^3r \quad (11.18)$$

と書ける．ここでベクトルポテンシャル $\mathbf{A}_{ext}$ は磁気双極子 $\mathbf{m}$ が作る場と仮定しよう．この時 $\mathbf{A}_{ext} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$ なので $\nabla \times \mathbf{A}_{ext}$ は

$$\nabla \times \mathbf{A}_{ext} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{m}}{r^3} - \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - 4\pi\delta(\mathbf{r})\mathbf{m} \right] \quad (11.19)$$

となる．これより磁気双極子と磁場の相互作用エネルギー U_I を計算すると式 (11.19) のうちの δ -関数の項のみが効いてくることが分かる．よって

$$U_I = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad \text{と求まる.} \quad (11.20)$$

11.3.3 磁気双極子 $\mathbf{m}_1$ と $\mathbf{m}_2$ 間の相互作用エネルギー

2 個の磁気双極子 $\mathbf{m}_1$ と $\mathbf{m}_2$ が距離 r だけ離れているとして、その 2 個の磁気双極子間の相互作用エネルギーを計算しよう． $\mathbf{m}_2$ が作る磁場 $\mathbf{B}$ は

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{m}_2}{r^3} - \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right] \quad (11.21)$$

で与えられているので、相互作用エネルギー $U_I = -\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{B}$ は

$$U_I = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2)}{r^3} - \frac{3(\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{m}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right] \quad (11.22)$$

と書かれる．これは 2 個の電気双極子 $\mathbf{p}_1$ と $\mathbf{p}_2$ が距離 r だけ離れている時の相互作用エネルギー

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2)}{r^3} - \frac{3(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right] \quad (11.23)$$

と同じ形になっている事に注意しよう．

11.4 超伝導

超伝導物質についてまずはその物質の性質を知っておく必要がある。超伝導に対して通常の物質は常伝導と呼ばれているが、これらは電流を流そうとした時にその物質が持っている性質が通常の物質とは著しく異なっている事から物理的な興味を持たれたのである。超伝導物質においては、電流を流した時に電気抵抗値がゼロのためエネルギーを失う事はない。

11.4.1 Meissner 効果

ある種の超伝導体は磁場が物質の中に入ってこない現象が知られていて Meissner 効果と呼ばれている。ここでこの現象を簡単に解説しよう。

この場合、まず、超伝導物質の性質を知っている必要がある。超伝導体とは伝導電子が磁場の影響を受けて運動する時に、周りの物質を励起する事はないという事である。従って、この伝導電子は磁場により Larmor 運動してもエネルギーを失うことは無いと仮定されている。その超伝導体の体積中での磁場の全エネルギーは

$$U_S = \frac{1}{2\mu_0} \int (\mathbf{B}_{ext} - \mu_0 \mathbf{M}_m)^2 d^3r$$

となる。ここで $\mathbf{B}_{ext}$ は外部磁場であり $\mathbf{M}_m$ は伝導電子がつくる磁場（磁化）である。

この時、物理学における最も基本的な仮定として「この系のエネルギーは常に最も低い状態が自然界では実現される」という原理に従うと U_S は $\mathbf{B}_{ext}$ と $\mu_0 \mathbf{M}_m$ が釣り合ってゼロとなる。すなわち、この系では磁場がゼロになるという Meissner 効果が実現される事になっている。

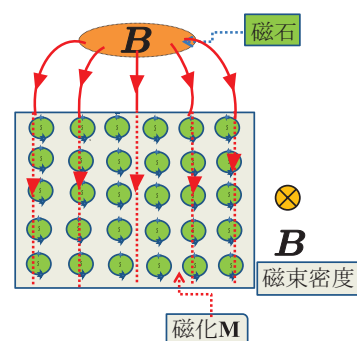


図 11.3: Meissner 効果

11.4.2 超伝導体の電気抵抗

超伝導体では電気抵抗がゼロである事が観測されている。逆に言えばこれが超伝導体の定義でもある。電子が電位差を感じて隣の結晶格子に飛び移る時に、その結晶格子を励起すればエネルギーを失うし、励起できなければ電

気抵抗はゼロになる。超伝導に対する BCS 理論ではこの場合、物質のエネルギー状態において基底状態と励起状態にギャップが出来ると仮定している。このギャップは Bogoliubov 変換により出てくるものである。そして伝導電子のエネルギーがこのギャップ以下であれば状態を励起する事ができなく、従って電気抵抗はゼロであると言うものである。これが超伝導現象を記述する標準理論としてよく知られている BCS 理論である。

● **超伝導の理論：** しかし物理的に言って、この BCS 理論が本当に正しいかどうか良くわからない。伝導電子が結晶格子と弾性散乱しかない事は事実であろう。しかし、それがエネルギーギャップで決まるという仮定は極低温の超伝導物質には悪い近似ではないかもしれないが、しかし高温超伝導物質に対しては強すぎる気がしている。恐らくは Cooper ペアに対応する電子状態が出来ている事は確かであろうと思われるし、伝導電子がこの電子状態と散乱するものと考えられる。しかしこの時、この散乱が弾性散乱しか起こらなければ、伝導電子がエネルギーを失う事はなく、この場合、超伝導状態が実現されると考えられるものである。

11.5 強磁性体

外から磁場を掛けると内部磁場がより強くなる物質があり、これを常磁性体という。さらに、外部磁場を消去してもこの内部磁場がそのまま強く残っている物質があり、これは強磁性体と呼ばれている。磁石はその内の一つである。この場合、外部磁場を掛けた時に生じる電子の円電流による磁場(磁化 M) よりもはるかに強力な磁場が物質内部で生成される事に対応している。それは電子のスピンの一方向に揃う場合である。

● **電子スピンの整列：** 電子のスピンは磁気双極子能率 $\mu = \frac{e\hbar}{m_e c} \mathbf{s}$ に直接関係しており、これ自体は電子固有の性質でありダイナミックスにはよらない。しかし電子スピンの揃うのは物質の構造に依っており、その整列機構はまだ解明されたとは言えないのが現状である。電子スピン整列の物理は多体問題の結果であり、何故、整列した方がエネルギー的に得をしているのかと言う問題を計算する事は容易な事ではない。さらに、電子スピンの重要な役割をしているのは、電子状態のエネルギー変化の方が磁場のエネルギーよりもはるかに大きいため磁化による影響は無視できるからでもある。この事は電子のスピンの軌道角運動量よりも大きな物理的な役割を果たしている場合がある事と関係している。

11.6 第 11 章の演習問題

- 問 1** 導体に磁場を掛けると磁化 M が生じる．その主な原因は何だと思うか？
- 問 2** 磁気双極子モーメント m と磁場 B との相互作用エネルギー U は $U = -m \cdot B$ である．このエネルギーと Zeeman 効果の相互作用との関係を論ぜよ．
- 問 3** Meissner 効果についてその現象が起こる物理的なメカニズムを定性的に解説せよ．
- 問 4** 水素原子の模型として $+e$ の電荷の陽子の周りに $-e$ の電荷を持つ電子が半径 $r = 0.53 \times 10^{-8} \text{cm}$ の円運動をしているとする．Newton 力学を用いて電子の速度 v を r で表せ．次に電子の電流 J を求めよ．
- 問 5** 問 4 の問題で水素原子の磁気双極子モーメント $\mu = \mu_0 S J$ を計算せよ．また電子の運動により陽子にどれだけの磁場ができているか？
- 問 6** 物質に束縛されている質量 m_e の電子が平衡位置からのズレに比例する力を受けるとする．すなわち $F = -m_e \omega^2 r$ の力である．この時この電子に z -軸に一樣な磁場 B を掛けた時，この電子の運動を論ぜよ．

第12章 電磁誘導と磁束

磁束が時間変化するとそこには電場が生成される．これが Faraday の法則である．この現象は発電の原理にもなっていて割合馴染みの深い法則であるが，この法則には電荷や電流が現れていない．すなわち，物質の存在が直接的にはかかわっていない法則となっている．また，この磁束は閉回路に電流が流れる事によって生じているが，その磁束の大きさが流れた電流にどのように依存してるか (インダクタンス L) という問題も議論しよう．

12.1 Faraday の法則 (電磁誘導)

磁場が時間変動すると起電力が生じるという Faraday の法則は電磁気学のうちでも最も良く知られている現象を記述する法則である．これは

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Faraday の法則})$$

と書かれているが，この微分の形だとわかりにくいので積分形にしたものが良く使われる．すなわち，上式の両辺を面積 S で積分するのである．この時，左辺は Stokes の定理で

$$\int_S \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = V \quad (12.1)$$

と書き直す事が出来る．ここで V は起電力として定義されている．また， C はこの面積を囲む線の積分路を表している．

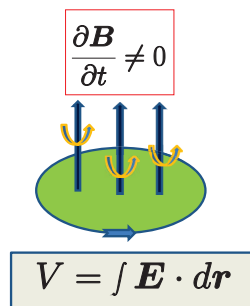


図 12.1: Faraday の法則

この時, 右辺は

$$-\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

より Faraday の法則の積分形は $V = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ となる.

12.1.1 磁束

ここで磁束 Φ を

$$\Phi \equiv \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (12.2)$$

で定義する. これは閉じた回路を貫くこの面に垂直な磁場の成分を足したものである. この磁束 Φ を使うと Faraday の法則は

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (12.3)$$

と書く事が出て, 比較的に覚えやすい形になっている.

12.1.2 ベクトルポテンシャルでの表現

Faraday の法則をベクトルポテンシャル $\{\phi, \mathbf{A}\}$ を使って書き直す. この時, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ より $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A})$ となり, これを書き直すと

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (12.4)$$

となる. これは括弧で括った部分が $\nabla\phi$ と書けることを意味しているので

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi \quad (12.5)$$

と書ける. これはベクトルポテンシャルがない時には静電場と同じになっている. この式でわかるように電場はベクトルポテンシャルの時間変化にもよって, これが逆に言えば Faraday の法則そのものである.

12.2 Maxwell 方程式：{ ϕ , $\mathbf{A}$ }による表記

ここで Maxwell 方程式をベクトルポテンシャル { ϕ , $\mathbf{A}$ } で書いてみよう.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (12.6)$$

としているので $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ と Faraday の法則 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ は常に満たされている事がわかる. 従って Gauss の法則と Ampère の法則をベクトルポテンシャル { ϕ , $\mathbf{A}$ } で書けば良い. これより Maxwell 方程式は

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (12.7)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) = \mu_0 \mathbf{j} \quad (12.8)$$

と書かれる. これに Coulomb ゲージ固定条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ をつければベクトルポテンシャル { ϕ , $\mathbf{A}$ } が求まる. この式から荷電粒子 (ρ , $\mathbf{j}$) と電磁場の相互作用はベクトルポテンシャル { ϕ , $\mathbf{A}$ } で書かれる事が予測される.

12.3 起電力の例題

ベクトルポテンシャルが時間変化すると起電力が生じるのであるが, ここでその簡単な例題を挙げて理解を深めて行こう. 今, 磁気双極子 $\mathbf{m}$ が一定の速度 $\mathbf{v}$ で動いている場合を考えよう. 磁気双極子 $\mathbf{m}$ の座標は $\mathbf{r}_0$ として, これが速度 $\mathbf{v}$ で動いているので $\mathbf{r}_0 = \mathbf{v}t$ と書ける. この磁気双極子が任意の点 $\mathbf{r}$ に作るベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{v}t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{v}t|^3} \quad (12.9)$$

で与えられている. ここで $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ であるから微分を実行すると

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{m} \times \mathbf{v}}{r^3} - \frac{3\mathbf{m} \times \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}{r^5} \right] \quad (12.10)$$

と求められる. ここで $\mathbf{r} - \mathbf{v}t \Rightarrow \mathbf{r}$ と置き換えてある. この式から, 確かに起電力が生じている事が良くわかるものである.

12.4 インダクタンス

閉回路に電流 J が流れるとそこには磁場が出来る。この時、この閉回路中の磁束 Φ は電流に比例する。すなわち $\Phi = LJ$ と書く事が出来る。この L をインダクタンスと呼んでいる。磁場が Biot-Savart の法則で $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$ と書かれているから Φ が電流 J に比例している事は $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ であるから納得できると思う。しかし、インダクタンス L を計算する事は一般的には簡単ではない。ここで閉回路 C における磁場のエネルギーを求めておこう。これは $\mathbf{j}(\mathbf{r}) d^3r = J d\mathbf{r}$ を用いて書き直すと

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d^3r = \frac{1}{2} J \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2} J \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} J \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

となり、これより $\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ に注意すれば

$$U = \frac{1}{2} J \Phi = \frac{1}{2} L J^2 \quad \text{と書く事が出来る。}$$

12.4.1 インダクタンスの例題 (1)

インダクタンスについてしっかりした描像を作るには具体的な問題を考えてそれを解いて見る事が一番の早道であろう。今、半径 a の円電流 J を考えて、この原点を中心とする円が $x-y$ 平面にあるとしよう。この時、この円電流が作る磁場を任意の点で計算するのはかなり難しいし、また物理的にも得るところがあまりない。それで、原点での磁場を計算してこれが円全体であると近似しよう。この時、原点なので $\mathbf{r} = 0$ とすると、磁場は

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int \frac{\mathbf{r}' \times d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|^3} \quad (12.11)$$

である。ここで $\mathbf{r}' = a\mathbf{e}_r, \quad d\mathbf{r}' = a d\theta \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{r}' \times d\mathbf{r}' = a^2 d\theta \mathbf{e}_z$ を用いると直ちに計算できて

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \frac{2\pi a^2}{a^3} \mathbf{e}_z = \frac{\mu_0 J}{2a} \mathbf{e}_z \quad (12.12)$$

となる。これより磁束 Φ は

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \simeq \frac{\mu_0 J}{2a} \pi a^2 = \frac{\mu_0 \pi a}{2} J \quad (12.13)$$

と計算できる．従ってインダクタンス L は $\Phi = LJ$ より

$$L \simeq \frac{\mu_0 \pi a}{2} \quad (12.14)$$

と求められた．但し，この円電流の L は 勿論，近似的に求められたものである事に注意する必要がある．

12.4.2 インダクタンスの例題 (2)

次に，半径 a の円筒がその中心を z -軸上にあり，電流 J が z -軸正の向きに流れているとする．また，半径 b (但し， $a < b$) の円筒がその中心を z -軸上にあり，電流 J が z -軸負の向きに流れているとする．この円筒の長さは ℓ とするが，端の影響は無視する．但しこれは端の影響が小さいからではなくて簡単には計算できないからである事に注意する必要がある．この時，磁場は直ちに計算できて $a < r < b$ の間だけ有限で後は全てゼロである．これは Stokes の定理を用いた積分形の Ampère の法則より簡単に求まる．すなわち

$$B_\theta = \frac{\mu_0 J}{2\pi r} \quad a < r < b$$

である．従って，磁場のエネルギーは

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int |\mathbf{B}|^2 d^3r = \frac{1}{2\mu_0} \int_a^b |B_\theta|^2 r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\ell dz = \frac{\mu_0 J^2 \ell}{4\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

と計算される．ここで $\boxed{U = \frac{1}{2} L J^2}$ である事からインダクタンス L は

$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right) \quad (12.15)$$

と求められた．

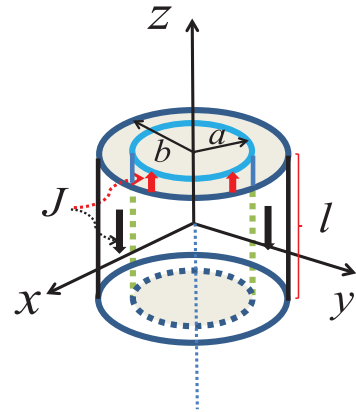


図 12.2: インダクタンス

12.5 LCR 回路

抵抗 R 、コンデンサー C そしてコイル L からなる回路は電磁気学の基本問題でもあり、ここでこの問題を解いて行こう。この回路に電位差 $V(t)$ を与えた時、電流 J が流れたとしよう。この時、この回路の方程式は

$$L \frac{dJ(t)}{dt} + RJ(t) + \frac{Q(t)}{C} = V(t) \quad (12.16)$$

である。この式 (12.16) を時間で微分すると

$$L \frac{d^2 J(t)}{dt^2} + R \frac{dJ(t)}{dt} + \frac{J(t)}{C} = \frac{dV(t)}{dt}$$

となる。例として $V(t) = V_0 \sin \omega t$ の形に電位差を仮定して上式を書き直すと

$$\frac{d^2 J(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dJ(t)}{dt} + \frac{1}{LC} J(t) = \frac{\omega V_0}{L} \cos \omega t \quad (12.17)$$

となる。この微分方程式の解き方はよく知られていて、特解 $J_s(t)$ を

$$J_s(t) = \text{Re}\{Ae^{i\omega t}\} \quad (\text{但し, Re は実数部}) \quad (12.18)$$

の形に仮定する。これを式 (12.17) に代入して計算すると A は直ちに

$$A = \frac{\omega V_0}{L} \frac{1}{(-\omega^2 + i\omega \frac{R}{L} + \frac{1}{LC})} \quad (12.19)$$

と求まる。従って、電流の特解 $J_s(t)$ は

$$J_s(t) = \text{Re} \left\{ \frac{\omega V_0}{L} \frac{1}{(-\omega^2 + i\omega \frac{R}{L} + \frac{1}{LC})} e^{i\omega t} \right\} \quad (12.20)$$

と決まる。式 (12.17) の解はその右辺をゼロとした時の方程式

$$\frac{d^2 J(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dJ(t)}{dt} + \frac{1}{LC} J(t) = 0$$

の一般解 $J_0(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} [C_1 \sin \gamma t + C_2 \cos \gamma t]$ を特解に加えたものである。ここで C_1, C_2 は任意定数であり、また $\gamma^2 \equiv \frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2$ は正の値 (γ は実数) と仮定している。これより式 (12.17) の一般解 $J(t)$ は

$$J(t) = e^{-\frac{R}{2L}t} [C_1 \sin \gamma t + C_2 \cos \gamma t] + \text{Re} \left\{ \frac{\omega V_0}{L} \frac{1}{(-\omega^2 + i\omega \frac{R}{L} + \frac{1}{LC})} e^{i\omega t} \right\}$$

と書ける事がわかる。

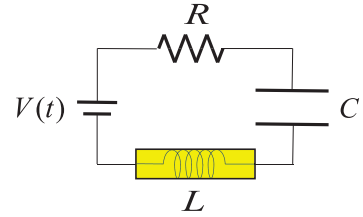


図 12.3: LCR 回路

12.6 第12章の演習問題

- 問1** Faraday の法則は発電機の原理となっている．その事を直感的な描像を描いて解説せよ．
- 問2** 半径 a の円電流 J が作る磁場を中心点 (原点) で計算せよ．
- 問3** インダクタンス L は物理的にどのような量として定義されているか？ 静電容量 C や電気抵抗 R と比べながら論じよ．
- 問4** 半径 a , 巻数 N の円形コイルを強さ B の磁場中で磁場に垂直な回転軸の回りに角速度 ω で回転させた．コイルの両端の電位差を求めよ．
- 問5** 無限に長い半径 a の円柱状導線に電流 J がその表面を流れている．この時自己インダクタンス L を求めよ．但し導線の透磁率を μ とする．
- 問6** 長さ ℓ の同軸ケーブルの中心導体 (半径 a , 透磁率 μ) に電流 J が流れ, 外部導体 (半径 $b (> a)$) には電流 $-J$ が流れている．この時, この同軸ケーブルの自己インダクタンス L を求めよ．

第13章 電磁波

電磁波を物理ではフォトン (光子) と言う。フォトンはスピンの1であり、その質量はゼロである粒子と考えてよい。このフォトンは Maxwell 方程式から自動的に理解されるというものではない。フォトンは場の量子化をした時に初めて理解できるものである。フォトンの取り扱いが一般に難しいのはこの場の量子化が一つの原因でもある。

13.1 Maxwell 方程式

Maxwell 方程式を再びここに書いておこう。

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{Gauss の法則})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{磁荷がない})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{Faraday の法則})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (\text{Ampère-Maxwell の法則})$$

Ampère の法則の修正をしたのが Maxwell であるが、この修正についてここで議論して行きたい。恐らくは理論物理の立場からすると、この修正はこれまでの理論物理の発展における最大の功績の一つであろう。ここでは何故その修正が必要であったかについて議論したい。Ampère の法則 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ において、この式全体に ∇ を掛けると $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ となる。しかしこれは連続方程式 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ と矛盾している。連続方程式は物質の流れの保存則を表しているのが壊れていたら電荷の保存が成り立たない。それは絶対に困るという事で書き換えたものが Ampère-Maxwell 方程式である。実際、Ampère-Maxwell の方程式に ∇ を掛けると

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{c^2 \varepsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

となり、 $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ を考慮すれば確かに上式は成り立っている事がわかる。

13.1.1 変位電流

ここで変位電流 j_d (displacement current) を定義しておこう。
これは Ampère-Maxwell の法則の最後の項の
事であり $j_d \equiv \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ と定義されている。電場
が時間変化するとそこに電流が流れた事に対
応している現象でありそこには磁場が生成さ
れる。しかしその場所で電子が電流のように
動いているわけではない。電場を形成してい
る荷電粒子が時間変化している事で電場の時
間変動が生まれている。

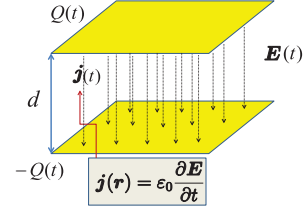


図 13.1: 変位電流

13.2 電磁場のエネルギー

ここで電磁場全体のエネルギーについて計算しておこう。但しここで言う電
磁場とは古典電磁場の意味であり、フォトンのエネルギーはまだ含まれていな
い。この場合、仕事率で計算して行く。

13.2.1 電磁場の仕事率

Newton 力学において $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 \right) = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}$ が得られるが、これは単位時間
あたりのエネルギーの増加率を表している。従って仕事率 W_0 を $W_0 = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}$
で定義して、電磁場における力を代入すると
 $W_0 = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} = e \dot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) = e \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}$ となる。ここで N 個の電荷が分布
関数 ρ で分布している時、仕事率 W_0 は

$$W_0 = \int \rho \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E} d^3r = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3r \quad (13.1)$$

となる。この式を Ampère-Maxwell 方程式を用いて書き直すと

$$W_0 = \frac{1}{\mu_0} \int \left(\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right) d^3r$$

となる。ここで Faraday の法則を用いて式変形をして、さらに Poynting ベク
トルを $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ と定義すると仕事率 W_0 は

$$W_0 = - \left\{ \frac{d}{dt} \left[\int \left(\frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 + \frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 \right) d^3r \right] + \int \nabla \cdot \mathbf{S} d^3r \right\} \quad (13.2)$$

と書ける．ここで第 1, 2 項は通常の間電と磁場の単位時間あたりのエネルギー変化率である．第 3 項が電磁場のエネルギーの流れに対応して

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{S} d^3r = \int_S S_n dS \quad (13.3)$$

と書いてみればわかるように表面 S からエネルギーがコンデンサーの中に流れ込み，このコンデンサー内に場のエネルギーが蓄積される事になる．但し，この場のエネルギーは電磁波（フォトン）とは無関係である事に注意しよう．

13.2.2 電磁場のエネルギー：例題 RC －回路

表面から流れ込む電磁場のエネルギーの現象を理解するために， RC －回路を考えよう．容量 C のコンデンサーと抵抗 R を直列につないでそれに電位差 V を与えたとしよう．コンデンサーは半径 a の円板が距離 d で平行に並べてあるものと仮定しよう．この時コンデンサーの間電 E とその容量 C は $E = \frac{V}{d}$, $C = \frac{\epsilon_0 \pi a^2}{d}$ となる．ここで回路にながれる電流を J とすると

回路の方程式は

$$V = RJ + \frac{Q}{C} = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}, \quad \left(\text{但し } J = \frac{dQ}{dt} \right)$$

となる．ここで初期条件として $t = 0$ で $Q = 0$ とすればこの微分方程式の解は直ちに書いて

$$Q = CV \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \quad \text{と求められる.}$$

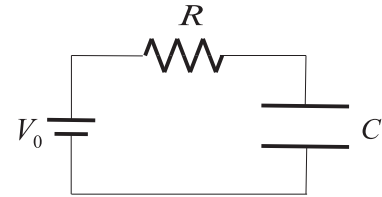


図 13.2: RC 回路

これより電流 J は $J = \frac{dQ}{dt} = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$ となる．ここでコンデンサーの間電の方向を z －方向として

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{e}_z = \frac{Q}{\epsilon_0 \pi a^2} \mathbf{e}_z = \frac{VC}{\epsilon_0 \pi a^2} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \mathbf{e}_z \quad (13.4)$$

である．この間電は時間によっているので変位電流が生じる．それは

$\mathbf{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{V}{R \pi a^2} e^{-\frac{t}{RC}} \mathbf{e}_z$ となっている．変位電流がながれるとそれに伴って磁場ができる．Ampère-Maxwell の法則より，円筒座標を考えてその半径 r の面積で積分すると $\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 j_d \pi r^2$ より

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 j_d r}{2} \mathbf{e}_\theta = \frac{\mu_0 r V}{2 \pi a^2 R} e^{-\frac{t}{RC}} \mathbf{e}_\theta$$

となっている．これより円筒表面 ($r = a$) での Poynting ベクトル S は

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{VC}{\varepsilon_0 \pi a^2} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \mathbf{e}_z \times \frac{\mu_0 r V}{2\pi a^2 R} e^{-\frac{t}{RC}} \mathbf{e}_\theta$$

となる．よって $\mathbf{S} = -\frac{V^2}{2\pi a R d} e^{-\frac{t}{RC}} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \mathbf{e}_r$ と求められ，動径方向の内向きにエネルギーが流れ，貯まって行く事になる．このエネルギーの流れを全時間で積分すると $\int_0^\infty S_n dt = \frac{CV^2}{4\pi ad}$ となる．Poynting ベクトルのエネルギーは表面積を掛ける必要があるのでこれより全エネルギーは

$$E_{tot} = \int S_n dS = \frac{CV^2}{4\pi ad} 2\pi ad = \frac{1}{2} CV^2 \quad (13.5)$$

となり，これはコンデンサーに貯まったエネルギーと一致している．

13.2.3 電磁場のエネルギー：例題 LC-回路

次に LC-回路を考えよう．容量 C のコンデンサーとコイル L を直列につないでそれに電位差 V を与えたとしよう．コンデンサーは半径 a の円板が距離 d で平行に並べてあるものと仮定しよう．ここで回路にながれる電流を J とすると回路の方程式は

$$V = L \frac{dJ}{dt} + \frac{Q}{C} = L \frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} \quad \text{となる．}$$

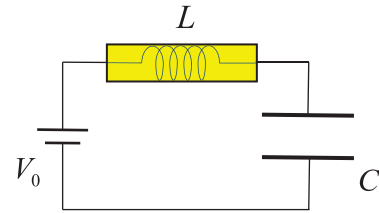


図 13.3: LC 回路

ここで初期条件として $t = 0$ で $Q = 0$, $J = 0$ とすればこの微分方程式の解は直ちに書いて $Q = CV(1 - \cos \omega t)$ ($\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$) と求められる．これより電流 J は $J = \frac{dQ}{dt} = VC\omega \sin \omega t$ となる．コンデンサーの電場は

$$\mathbf{E} = \frac{VC}{\varepsilon_0 \pi a^2} (1 - \cos \omega t) \mathbf{e}_z \quad \text{となるので変位電流は} \quad \mathbf{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\omega VC}{\pi a^2} \sin \omega t \mathbf{e}_z$$

となる．よって，この時に作られる磁場は $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 r \omega VC}{2\pi a^2} \sin \omega t \mathbf{e}_\theta$ となっている．これより円筒表面 $r = a$ での Poynting ベクトル S を求めると

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \frac{VC}{\varepsilon_0 \pi a^2} (1 - \cos \omega t) \mathbf{e}_z \times \frac{\mu_0 \omega VC}{2\pi a} \sin \omega t \mathbf{e}_\theta$$

より $\mathbf{S} = -\frac{\omega CV^2}{2\pi ad} (1 - \cos \omega t) \sin \omega t \mathbf{e}_r$ となる．これは一周期で積分すればゼロである．すなわちエネルギーの流れはなく，保存系である事を示している．

13.3 電磁波：直感的な記述

電磁波について、まずは導入として直感的な解説をしよう。その後に電磁場の量子化をする事により電磁波をきちんと解説し、理解を深めて行こう。Maxwell 方程式で物質が存在しない場合、すなわち $\rho = 0$ と $\mathbf{j} = 0$ の時、この電磁場には物理的に意味のある解が存在している。物質が存在しない場合の Ampère-Maxwell の法則は $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ である。この式をベクトルポテンシャルで書き直すと

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) \quad (13.6)$$

となる。ここで Gauss の法則から $\nabla^2 \phi = 0$ である事から、今の場合 $\phi = 0$ として十分である。これとゲージ固定条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ より、式 (13.6) は

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} = 0 \quad (13.7)$$

と求められる。これは電磁場が自由粒子の方程式を満たしている事を示している。この一般解が

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}V}} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, \lambda} \left(c_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger e^{-i\mathbf{k}x} + c_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i\mathbf{k}x} \right) \quad (13.8)$$

で与えられることがすぐに確かめられる。ここで $kx \equiv \omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ と定義されている。これを式 (13.7) に代入すると $\omega_{\mathbf{k}} = c|\mathbf{k}|$ の関係式が求まる。これは光の分散関係式を表している。ここで $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, \lambda}$ を偏極ベクトルと呼んでいる。これはゲージ固定条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ より $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, \lambda} = 0$ を満たしている。すなわちフォトンの偏極はその進行方向と常に垂直である。

13.3.1 電磁波とベクトルポテンシャル

ここで一つ注意しておく事がある。電磁波がベクトルポテンシャルで表される事は確かであるが、式 (13.8) そのものが電磁波に対応するわけではない。それは、この $\mathbf{A}$ は実数関数となっており、運動量オペレータ $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla$ の固有関数になっていないのである。それでは電磁波とはどのようなものであろうか？その答えは、場を量子化して初めて理解できる事である。後で議論するように、場の量子化は式 (13.8) において $c_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger, c_{\mathbf{k}, \lambda}$ をオペレータと考える事であ

る。この時、 $c_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger$ はフォトン1個を生成する演算子であるため、フォトンが作られる時は必ず式(13.8)の第1項のみが現われる事になっている。すなわち

$$\langle \mathbf{k}, \lambda | \mathbf{A}(x) | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}V}} \epsilon_{\mathbf{k},\lambda} e^{-i\mathbf{k}x} \quad (13.9)$$

である。これは運動量 $\mathbf{k}$ の固有関数になっているので、確かに正しい電磁波の状態を表している事が良くわかるものである。

13.4 電磁波の発振機構：古典描像

これまで見たように LC -回路自体は保存系であり、電磁波の放出としての外へのエネルギーの流れはない。それでは電磁波が生成される機構はどうなっているのでしょうか？ここでは電磁波の発振機構を解説しよう。

13.4.1 電磁場と電子との相互作用

電磁波の生成には場の理論の基本から出発せざるを得ない。まず、電磁場(ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$) と電子との相互作用は電荷 e をカレント密度 $\mathbf{j}$ の中に入れた標識を取ると

$$H_I = - \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d^3r \quad (13.10)$$

であり、ここから全てを考える事になる。この時この相互作用の時間変化を考える必要がある。すなわち、

$$W \equiv \frac{dH_I}{dt} = - \int \left[\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] d^3r \quad (13.11)$$

となる。ここでスカラーポテンシャル ϕ がない時を考えて十分なので電場は

$$\boxed{\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}} \quad \text{と書けている。よって } W \text{ は}$$

$$W = - \int \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \cdot \mathbf{A} d^3r + \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3r \quad (13.12)$$

となる。ここで式(13.1)から式(13.12)の右辺第2項は W_0 そのものであり、すでに計算されている。従って、式(13.12)の右辺第1項を W_1 として

$$\boxed{W_1 \equiv - \int \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \cdot \mathbf{A} d^3r} \quad \text{を評価する必要がある。}$$

13.4.2 電磁波の発振機構

まずは $\left[\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}\right]$ の計算である．簡単のために非相対論的な量子力学を用いるが，実際の記述としても十分良い近似である．相互作用は Zeeman 効果の Hamiltonian なので

$$H = -\frac{e}{2m_e} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}_0 \quad (13.13)$$

を仮定して十分である．ここで電子の質量を m_e としている．また外場 $\mathbf{B}_0$ は座標 $\mathbf{r}$ の関数であるとしている．ここで外場 $\mathbf{B}_0$ を z -軸方向にとっても一般性を失わないので $\mathbf{B}_0 = B_0(\mathbf{r})\mathbf{e}_z$ としよう．この時，非相対論の量子力学ではカレント $\mathbf{j}$ が

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = \frac{e}{m_e} \psi^\dagger(t, \mathbf{r}) \hat{\mathbf{p}} \psi(t, \mathbf{r}) \quad (13.14)$$

で与えられている．但し， $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$ である．これより

$$\frac{\partial \mathbf{j}(t, \mathbf{r})}{\partial t} = \frac{e}{m_e} \left[\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \hat{\mathbf{p}} \psi + \psi^\dagger \hat{\mathbf{p}} \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] = -\frac{e^2}{2m_e^2} \nabla B_0(\mathbf{r}) \quad (13.15)$$

と計算される．従って電磁波を含む単位時間のエネルギー変化率は

$$W_1 = \int \frac{e^2}{2m_e^2} (\nabla B_0(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{A} d^3r \quad (13.16)$$

と求められた．電磁波はこの式の最後にある $\mathbf{A}$ から発生する．

● **2個のベクトル場：** ここで注意する事として，ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ と外場 $\mathbf{B}_0$ の違いである．今の場合， $\mathbf{A}$ は電子から作られた電磁場を表している．一方，外場 $\mathbf{B}_0$ は電子とは直接は関係のない場であり，他の粒子によって作られた外場としての電磁場である．これを見ても明らかのように，発振回路などにおける電磁波の生成は電子だけの孤立系で起こる現象ではなく，それ以外の場が存在しない限り起こらない．すなわち外場 $\mathbf{B}_0$ は $\mathbf{B}_0 \neq \nabla \times \mathbf{A}$ であり，このベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ とは全く結びつかないものである．発振回路においては，この磁場 $\mathbf{B}_0$ はコンデンサーかまたはコイルが作る磁場によるものと考えて良い．また加速器において電子が電磁波を放出する機構においては， $\mathbf{B}_0$ は電子をその軌道に閉じ込めているために掛けられている磁場そのものである．

13.5 電磁場の量子化

電磁場の量子化について、これまでの場の理論の教科書に混乱した記述がよく見受けられるので、ここできちんとした解説をしておこう。場の量子化は学部生には少し難しすぎる問題ではあるが、これにより、フォトンの偏極ベクトルの理解が深まるものと期待している。

13.5.1 場の量子化

電磁場の量子化は実験から始まっている。最も単純なところでは、水素原子における $2p_{\frac{1}{2}}$ から $1s_{\frac{1}{2}}$ 状態への遷移の際に放出される光の問題がある。 $2p_{\frac{1}{2}}$ の状態では電磁場の状態は真空であったのに、 $1s_{\frac{1}{2}}$ 状態では1個フォトンが生成されている。これは通常の電磁場の理論では理解できない事である。そこで考案されたのが「場の量子化」である。何故、量子化と呼ばれるのであろうか？それは場をオペレータで書くからである。電磁場の量子化を式で書くと

$$\mathbf{A}(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k},\lambda} \left[c_{\mathbf{k},\lambda} e^{-ikx} + c_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger} e^{ikx} \right] \quad (13.17)$$

と自由場の解で展開して、その展開係数 $c_{\mathbf{k},\lambda}$ と $c_{\mathbf{k}',\lambda'}^{\dagger}$ を演算子と仮定する。量子化とはこの $c_{\mathbf{k},\lambda}$ と $c_{\mathbf{k}',\lambda'}^{\dagger}$ に対して

$$[c_{\mathbf{k},\lambda}, c_{\mathbf{k}',\lambda'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'}, \quad (13.18)$$

$$[c_{\mathbf{k},\lambda}, c_{\mathbf{k}',\lambda'}] = 0, \quad [c_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger}, c_{\mathbf{k}',\lambda'}^{\dagger}] = 0 \quad (13.19)$$

の交換関係式を仮定する事である。この時、展開係数 $c_{\mathbf{k},\lambda}$ (消滅演算子) と $c_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger}$ (生成演算子) はもはや単なる数ではなくて、演算子になっている。このため、このオペレータが作用する物理的な空間を定義する必要があり、それを **Fock 空間** と呼んでいる。式で書くと、

$$c_{\mathbf{k},\lambda}|0\rangle = 0 \quad (13.20)$$

$$c_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger}|0\rangle = |\mathbf{k},\lambda\rangle \quad (13.21)$$

となる。最初の式で $|0\rangle$ を真空と定義し、この真空 $|0\rangle$ に $c_{\mathbf{k},\lambda}^{\dagger}$ をオペレートして運動量 $\mathbf{k}$ 、偏極 λ をもつフォトンの状態 $|\mathbf{k},\lambda\rangle$ が生成されている。

13.5.2 量子化された電磁場のエネルギー

量子化された電磁場のエネルギー E_{em} は

$$E_{em} = \frac{1}{2} \int \left[(\nabla \times \mathbf{A})^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 \right] d^3r \quad (13.22)$$

で与えられる。この式に式 (13.17) を代入すると

$$E_{em} = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left(c_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger c_{\mathbf{k}, \lambda} + \frac{1}{2} \right) \quad (13.23)$$

となる。これがフォトンのエネルギーを表している。

13.6 偏極ベクトルの物理

これまでこの偏極ベクトル $\epsilon_{\mathbf{k}, \lambda}^\mu$ に対して重大な見誤りがあった。それは、運動方程式を解く事なしに議論を進めた事によっている。まずはゲージを固定する前に電磁場 $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ が運動方程式を満たしている事が絶対条件である。

13.6.1 偏極ベクトルの運動方程式

電流がない時の自由電磁場 A^μ に対する Lagrange 方程式は $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ (但し, $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$) であるから (付録 E 参照)

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (13.24)$$

と求められる。自由フォトンの解の形が

$$A^\mu(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \epsilon_{\mathbf{k}, \lambda}^\mu \left[c_{\mathbf{k}, \lambda} e^{-ikx} + c_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger e^{ikx} \right] \quad (13.25)$$

で与えられるので、この式を (13.24) 式に代入すると

$$k^2 \epsilon^\mu - (k_\nu \epsilon^\nu) k^\mu = 0 \quad (13.26)$$

が求められる。これを行列で書き直すと $\sum_{\nu=0}^3 \{k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu\} \epsilon_\nu = 0$ となる。この式でゼロでない偏極ベクトル $\epsilon_{\mathbf{k}, \lambda}^\mu$ の解が存在するための必要十分条件はその行列式がゼロである。すなわち、

$$\det\{k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu\} = 0 \quad (13.27)$$

である．この方程式の解を探してみると $k^2 = 0$ (すなわち $k_0 \equiv E_k = |\mathbf{k}|$) が解である事が簡単に証明できる．この $k^2 = 0$ の式を (13.26) 式に代入すると

$$k_\mu \epsilon^\mu = 0 \quad (13.28)$$

の式が得られる．これは QED でよく知られている Lorentz ゲージ固定に対応した式である．しかしこの式は運動方程式から得られておりゲージ固定とは無関係である．従って Lorentz ゲージ固定は物理的に許されなくそれ以外のゲージ固定が必要である．例えば，Coulomb ゲージ固定を選ぶと $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0$ となるので，これから $\epsilon_0 = 0$ となっている．さらには，フォトンの偏極ベクトル $\epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu$ の自由度は確かに 2 個である事が自然な形で理解されている．

• **Dirac 方程式の自由粒子解：** この偏極ベクトルに対する計算手法は自由粒子に対する Dirac 方程式を解く時に行ったものと全く同じである．Dirac 方程式 [E.10] の場合も同じように行列式がゼロ

$$\det\{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + m\beta - E\} = 0 \quad (13.29)$$

という条件によりエネルギーの分散関係

$$E = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2} \quad (13.30)$$

が求まり，それをもとの Dirac 方程式に代入する事により Dirac の波動関数 (15.4) 式が決定された．この詳細は式 (E.13) で与えられている．しかしどういうわけかこれまで，この電磁場 A^μ における偏極ベクトル $\epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu$ に対する方程式は解かれる事がなかったのである．これは恐らく，これまでゲージ不変性の理解が不十分であった事に依っているものと考えられる．

• **フォトンと電子スピンの自由度：** Dirac 方程式の場合，4 個の自由度のうち正負の状態の形状は決まるがスピンの自由度 (アップとダウン) は決まらない．このため $\boxed{\text{電子スピンの自由度は 2 個}}$ である．電磁場の場合，自由度は 4 個であるが，運動方程式を解いて分散関係式を代入する事により 1 個の条件 (Lorentz 条件) が決まり 3 個となる．さらに残り 3 個のうちゲージ固定により 1 個自由度が減った事になる．このためフォトン $\boxed{\text{フォトンの自由度は 2 個}}$ である．

13.6.2 偏極ベクトル $\epsilon_{\mathbf{k},\lambda}$ の描像

フォトンの偏極ベクトル $\epsilon_{\mathbf{k},\lambda}$ には

$$\epsilon_{\mathbf{k},\lambda} \cdot \epsilon_{\mathbf{k},\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'}, \quad \epsilon_{\mathbf{k},\lambda} \cdot \mathbf{k} = 0 \quad (13.31)$$

という直交関係式とフォトン進行方向との直交性の式が存在している．従って、フォトンの偏極ベクトルは進行方向に対して直交する平面でそれぞれが直交するような2個のベクトルで成り立っている事が分かる．但し、この描像には少し無理があることも理解する必要がある．それは、フォトンには静止系が存在していないので、上述した平面は仮想的であり、フォトンの静止系があったとした時の想像のピクチャーである．但しフォトンが電子と相互作用して電子に吸収される場合は、ある程度偏極ベクトルの描像を作る事が出来る．この時は電子の静止系が定義されているので、吸収された瞬間のフォトンの偏極ベクトルはフォトンの進行方向と直交する方向になっている．その事は必ず電子のスピンの磁気量子数に反映されている．

後で議論するように、フォトンの偏極を扱う時は大量のフォトン集団を考えている．逆に言えば1個のフォトンを考える事はほとんどなく、従ってこのフォトン集団の偏極はその方向が余程うまく決めない限り、様々な偏極の状態がランダムに混じったものになっている．さらにフォトン慣性系を指定できないので偏極の方向を決める事はかなり難しいと考えた方がよい．

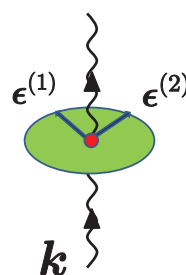


図 13.4: 偏極ベクトル

13.7 フォトン (電磁波) の性質

多くの電磁気学の教科書において、フォトンが電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ と磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ と関係している様な記述が見受けられる．しかしこれまでの議論で明らかなように、これは間違いである．ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ をゲージ固定した後、それを量子化したものがフォトンであり、これはもはや電場や磁場と関係をつける事が出来ない．それ以上に関係をつける必要はさらになく、相互作用 Hamiltonian は

$$H_I = - \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d^3r$$

であり、これがフォトンの生成・消滅を記述している．

13.7.1 フォトンの状態関数

電場と磁場は常に実数として理解されるが、フォトンの状態は複素数である。これは電磁波の状態が

$$\langle \mathbf{k}, \lambda | \mathbf{A}(x) | 0 \rangle = \frac{\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, \lambda}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}} V}} e^{-i\mathbf{k}x} \quad (13.32)$$

と表されている事から理解される。ここで偏極ベクトル $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, \lambda}$ は式 (13.31) の条件を満たしている。フォトンの進む方向を z -軸とした時、例えば

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, 1} = \mathbf{e}_x, \quad \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, 2} = \mathbf{e}_y \quad (13.33)$$

と取る事ができる。この場合、電子のスピン量子化軸として静磁場を x -軸方向に掛けた時、偏極ベクトルの x -軸への射影は 1 と 0 となっている。勿論、 x -軸を逆にとれば、その射影は -1 と 0 となる。これを偏極ベクトルの磁気量子数と呼んで良いかどうかは議論の余地があろう。それは上述したように、フォトンには静止系が定義できないからである。

13.7.2 フォトンの偏光

フォトンのスピンは 1 であるが、その成分は 2 個である事を見てきた。この 2 つの状態は偏極ベクトルとして記述されるが、生成されたフォトンは基本的にはこの 2 つの状態が混ざっている。しかし、注意すべき事は 1 個のフォトンをとれば、これは勿論そのどちらかの状態になっている。100 個のフォトンが生成されたら、50 個のフォトンが一つの偏極状態を持ち、あとの 50 個のフォトンがもう一つの偏極状態を持っている。

● **偏光板：** 偏光板にフォトンを通す事により、この偏極状態を分離する事ができる。この場合、生成されたフォトンがどのような偏極状態を持つかは、偏光板の結晶構造やその電子状態に依存している。式 (13.33) で与えられる場合もあれば $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y), \quad \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y)$ となる場合もある。しかしフォトンが偏光板でどのような散乱を起こすのかは、理論的にはかなり難しい問題でもある。散乱は Compton 散乱でありこの多重散乱をしっかりと計算すればよく、その意味では勿論、計算は可能ではある。

● **原子状態の遷移**： もう一つ、フォトンの偏光が決まる場合がある。それは例えば原子状態の遷移によってフォトンが生成される場合、その原子中の電子のスピンの状態が偏極している場合である。この場合は常に偏光したフォトンが観測される事になる。原子系のスピンを偏極させる事はそれ程難しくはなく、従って特殊に偏光したフォトンを作る事もそれ程難しい事ではない。

13.7.3 偏極ベクトルの群論的解説

角運動量もスピンも群論の言葉で理解する事が最も自然でわかりやすいものである。角運動量演算子はリー代数の関係式を満たし、これを Exp 化する事により回転群ができています。そして回転群の知識によりその表現論は完全に記述されている。それでは偏極ベクトルは一体、何なのであろうか？

● **ランク1のテンサー**： フォトンのスピンの1である事に関しては、群論的な言葉で言えば、偏極ベクトルがランク1のテンサーである事から明らかである。しかし、この偏極ベクトルは角運動量とは異なっている。特に、偏極ベクトルは座標には依っていない。この点では、偏極ベクトルがむしろ電子のスピンの方により近いと言う事もできる。

● **偏極ベクトルはスピンか？**： しかし、スピンとも異なっている。電子のスピンは角運動量と同じ代数関係を満たしているのに対して、フォトンの偏極ベクトルにはそのような代数関係は存在していない。さらに言えば、ベクトルポテンシャルを量子化した時にオペレータの中に現れてはいるが、しかし偏極ベクトルはオペレータの性質は持っていない、状態ベクトルと考えた方がよい。その振る舞いは球面調和関数 $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ のようなものであるが、しかし偏極ベクトルは座標には依っていない。これらの事より、フォトンのスピン（偏極ベクトル）はそのスピンの大きさが1である事は確かであるが、電子の角運動量ともスピン演算子とも微妙に異なっている。この事がフォトンのスピン（偏極ベクトル）を理解する事が簡単ではない事の一つの理由でもあろう。

13.8 フォトンの弾性散乱

フォトンのは場の量子化の結果であるため物質との相互作用では常に生成・吸収の過程がまず最初に起こっている。しかし次の次数の摂動計算では同じ電子と吸収・生成を一度に行う過程が起こっている。これはフォトンと電子の散乱過程としてみると弾性散乱に対応していて Compton 散乱と呼ばれている。

13.8.1 Compton 散乱

Compton 散乱は場の理論の教科書にはよく議論されているのでここでは結果だけを書こう。運動量 k のフォトンが散乱されて k' になる散乱を考える。

• Compton 散乱の断面積： 微分断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_C = \frac{r_0^2}{2} \frac{k'^2}{k^2} \left(\frac{k}{k'} + \frac{k'}{k} - \sin^2 \theta\right) \quad (13.34)$$

である。ここで $r_0 = \frac{e^2}{m_e}$ は古典電子半径で $r_0 = 2.82 \times 10^{-13}$ cm である。またフォトンの偏極については平均を取ったものである。

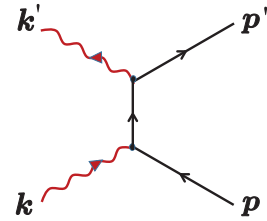


図 13.5: Compton 散乱

13.8.2 Thomson 散乱

散乱する粒子が電子ではなく非常に重い粒子だと仮定すると $k' \simeq k$ として十分である。この場合 Compton 散乱の微分断面積が

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Thom} \simeq \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (13.35)$$

となり、これは Thomson 散乱の断面積として知られているものと一致している。Thomson 散乱の断面積は古典電磁場を用いて計算されたものであるが、量子化されたフォトンによる計算結果と非相対論の範囲ではよく一致している。この散乱断面積やクーロン散乱である Rutherford 散乱断面積などが古典電磁場の計算によりかなり正確に求められている事実はなかなか面白い事である。しかしながら一致する理由は物理的にそう簡単に理解できていない。ただ古典電磁場の計算で基本的な物理量がある程度正確に求められて、

また実験的にも検証されて来た事実は物理学の発展に取っては重要であり、また幸運でもあったと考えられる。

13.8.3 Rayleigh 散乱

光が原子中の束縛電子と弾性散乱する場合、その断面積は Rayleigh 散乱断面積で与えられている。この計算は古典電磁場を用いており、その導出方法はかなり複雑である。

● **Rayleigh 散乱の断面積：** Rayleigh 散乱の微分断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ray}^{(cl)} \simeq \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^4 \quad (13.36)$$

と与えられている。しかし λ_0 は計算されてなく、任意のパラメータである。

● **場の量子論による Rayleigh 散乱の断面積：** 最近になって、Rayleigh 散乱の断面積が場の量子論的にも詳細な計算が実行されており、確かに散乱断面積の形は古典論と一致している事が示されている。さらに場の量子論の計算の場合、 λ_0 が具体的に計算されていて

$$\lambda_0^4 \equiv \frac{2(2\pi)^4}{m_e^2(\Delta E)^2} \quad (13.37)$$

と求められている。 ΔE は原子の平均励起エネルギーで $\Delta E \simeq 7 \text{ eV}$ である。ここで、可視光 (青色) だと $\lambda \simeq 4.5 \times 10^{-5} \text{ cm}$ なので

$$\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^4 \simeq 0.9 \times 10^{-11} \quad (13.38)$$

となり非常に小さい。これより Rayleigh 散乱の微分断面積は

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ray} \simeq 0.9 \times 10^{-11} \times \left(\frac{r_0^2}{2}\right) \quad (13.39)$$

となっている。この微分断面積は Compton 散乱よりも 10 桁以上、小さいため自然界には応用できない断面積である。

13.9 第13章の演習問題

- 問1** 変位電流 j_d の定義を書き, それが何故 Maxwell 方程式に必要であったかを論ぜよ.
- 問2** Poynting ベクトル $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ は散逸物理量ではない. この事を Poynting ベクトルが生じる例をあげて保存系の物理量である事を示せ.
- 問3** フォトンにはスピンが1である. それではフォトンの偏極ベクトルはスピン角運動量演算子の固有状態となっているか?
- 問4** 導体中の電場が $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \sin \omega t$ と変動する時, 伝導電流 (オームの法則による電流) と変位電流の大きさを比較せよ. 但し $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 60 \text{ Hz}$ とする.
- 問5** 電場と磁場のエネルギーを $U = \int \left(\frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \right) d^3r$ とする時, 仕事率 $W = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} d^3r$ は $W = -\frac{dU}{dt} - \int \nabla \cdot \mathbf{S} d^3r$ となる事を示せ.
- 問6** 電気容量 C のコンデンサーとインダクタンス L からなる回路は保存系であり, 電気容量 C のコンデンサーと電気抵抗 R からなる回路は非保存系である. 何故だと思うか?

13.10 閑話休題 6

太陽の光が地球上の生物に非常に重要である事は明らかであるが、その光を物理における量子状態として理解する事は予想以上に難しい。その最も大きな理由として、光には慣性系を指定できないと言う事がある。例えば電子と陽電子を衝突させると弾性散乱以外にも散乱過程があり、衝突後に2個の光子になるという散乱がよく知られている。これを $e^- + e^+ \rightarrow \gamma + \gamma$ と書く。ところが、この逆散乱の反応を考えて、光子と光子をぶつけて電子と陽電子を生成させる事ができるのであろうか？という疑問が生じてくる。しかしながらこの問題は理論的にも実験的にもまだ全く解決できていないのである。もし逆散乱過程が存在しないとしたら、これはこれで物理学の重大問題になってしまう。しかし、慣性系を指定できないのにどのように散乱断面積を求めたら良いのかがわからないし、まだその解決の糸口さえも見つかっていない。どうしたらよいのであろうか？

物理学は座標系を指定してその中で物理現象を記述しようとする学問である。時間と空間は現象を記述するべく舞台そのものであり、従ってその舞台(座標系)をきちんと自分達が納得する形で定義しておかないと、どんな舞(物理現象)をしても観客(観測者)はその舞を評価する事はできない。舞台装置を勝手に変えて奇妙な舞(Einstein 方程式)をされても、その現象が本当に自然界で起こる事なのかと言う検証さえできない。これは空想の世界であり思考実験(Gedanken Experiment)の範囲でしかない。この奇妙な理論(一般相対論)に100年近くも振り回されてきた事実は重い。しかし、一体、何故このような事が物理で起こりえたのか不思議でもある。近年、相対性理論関係では特殊相対論も含めてEinsteinの評価が急落している様に見えるが、その意味でもPierre Curieの凄さには驚くばかりである。彼の自然観察眼の鋭さが最も重要なのであろうが、やはり自然を理解したいと言う彼の視点(原点)が全く揺らがない事がEinsteinとの差であるような気がしている。歴史に「もし…」は意味がない事は重々承知をしているが、もしPierre Curieが1910年代以降まで生きていたら恐らくは現代物理の進展は大幅に変わっていた事であろう。相対論も量子論も今とは異なる形で発展した事はまず間違いない事であり、それを想像するだけでもわくわくしてしまうのは何故だろうか？

第14章 磁場の量子力学

物質に磁場が掛かった状態を議論する場合がしばしば生じてくる．例えば，地球上では地磁気が存在しており，その強さは別にして生物は常に地磁気の影響を受けている．従って，磁場が物質にどのような影響を与えるかという問題の考察は非常に重要である．さらに，電子がスピンを持っているためにこれは磁気双極子をもっている事に対応していて，このため磁場が電子のスピンに与える影響は決して小さいものではない．

14.1 電子と電磁場の相互作用

Maxwell 方程式は電磁場と電子との相互作用に関して直接は教えてくれるわけではない．さらに Maxwell 方程式は電場と磁場で書かれているが，電子との相互作用はどうしてもベクトルポテンシャルで書かざるを得ない事がわかっている．ここでは量子力学の場合，どのようにして電子と磁場の相互作用が求められるのかを解説しよう．

14.1.1 電磁場中の電子の Hamiltonian

非相対論的量子力学において荷電粒子と電磁場の Hamiltonian は

$$H = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{Ze^2}{r} \quad (14.1)$$

と書かれる．この Hamiltonian は Dirac 方程式を非相対論的に近似することにより得られるのであるが，もう少し正確に言うと Dirac 方程式からは

$$H = \frac{1}{2m} \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right]^2 - \frac{Ze^2}{r}$$
と導かれている．但し， $\boldsymbol{\sigma}$ は Pauli 行列と呼ばれている 2 行 2 列のエルミート行列であり，次のように書かれている．

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z), \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ここで $\hat{\mathbf{p}}$ が演算子 ($\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$) である事に注意して数学の公式

$$\left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right]^2 = \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{ie}{c} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \times \mathbf{A}$$

を用いて Hamiltonian を書き直すと

$$H = \frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} - \frac{Ze^2}{r} \quad (14.2)$$

となる．ここで磁場 $\mathbf{B}$ は $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ と書けている．この第2項がスピンの Zeeman 効果に対応する相互作用 Hamiltonian である．また，一様磁場の場合に第1項を変形すると最終的な Hamiltonian は e の高次の項を無視すると

$$H = \frac{1}{2m} \hat{\mathbf{p}}^2 - \frac{Ze^2}{r} - \frac{e}{2mc} (\mathbf{L} + \hbar\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{B} \quad \text{と書く事ができる.}$$

14.1.2 電子と磁場の相互作用

この第3項が電子と磁場の相互作用を表している．ここで $\mathbf{L}$ は軌道角運動量 ($\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}}$) である．ここで，電子と磁場との相互作用 Hamiltonian H' を

$$H' = -\frac{e}{2m_e c} (\mathbf{L} + \hbar\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{B} \quad (14.3)$$

と定義しておく．

14.2 古典力学：サイクロトロン運動

量子論的な運動を議論する前に，電磁場中 ($(\phi(\mathbf{r}), \mathbf{A}(\mathbf{r}))$) を運動する荷電粒子の古典力学系を考えよう．従って，Hamiltonian H は

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 + e\phi(\mathbf{r}) \quad (14.4)$$

と書けている．よって Hamilton 方程式

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} \quad (14.5)$$

より運動方程式が求まる．ここで磁場のみを考えると運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \quad (14.6)$$

となり, Lorentz 力による運動となっている. ここで z -軸方向に一様な磁場 $\mathbf{B}$ を掛けたとしよう. この時, 運動方程式は

$$m\ddot{x} = eB\dot{y}, \quad m\ddot{y} = -eB\dot{x}, \quad m\ddot{z} = 0 \quad (14.7)$$

となる. これは座標 x に対して $\ddot{x} + \left(\frac{eB}{m}\right)^2 x = C_0$ となっている. ここで C_0 は任意の定数である. この方程式は直ちに解けて

$$x - x_0 = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t \quad (14.8)$$

$$y - y_0 = A_1 \cos \omega t - A_2 \sin \omega t \quad (14.9)$$

となる. ただし, $\omega = \frac{eB}{m}$ であり Larmor 振動数と呼ばれている. ここで x_0, y_0, A_1, A_2 は初期条件で決められる定数である. これは円運動を示していて, その周期 T は $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB}$ となっている.

14.3 量子力学 : Zeeman 効果

量子力学においては例えば陽子 (その質量を M とする) が全く運動していても Zeeman 効果は影響してくる.

実際, 軌道角運動量がゼロの場合, その摂動 Hamiltonian は式 (14.3) より

$$H' = -\frac{e\hbar}{2Mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \quad (14.10)$$

となっている. ここで磁場の方向を z -軸にとると $H' = -\frac{e\hbar B}{2Mc} \sigma_z$ と書ける. ここで σ_z の固有値は 1 か -1 なので, この 2 個の状態間の分裂エネルギーは

$$\Delta E = \frac{e\hbar B}{Mc} \quad (14.11)$$

となり, これは Zeeman 効果によるエネルギー分裂と呼ばれている.

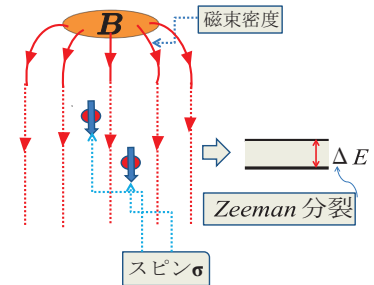


図 14.1: Zeeman 効果

14.3.1 傾斜磁場と MRI

Zeeman 効果により水素原子中の陽子は分裂エネルギーに対応する電磁波を放出する．この場合電磁波の波長はかなり長いものであり，その電磁波測定からその電磁波放射の場所を特定する事は不可能だと誰でも思う事である．ところが傾斜磁場の考えを使うと陽子の位置が計測できるという事が簡単に理解される．この考えを応用し発展させた処方が MRI (Magnetic Resonance Imaging) である．ここでその基本原理を簡単に紹介しよう．

● **Zeeman 効果のエネルギーと電磁波：** 陽子のスピンは $\frac{1}{2}$ であり，磁場を掛けると状態が 2 個に分裂する．この分裂のエネルギーは $\Delta E = \frac{e\hbar B}{Mc}$ であり，このエネルギーに対応して電磁波が放出される．しかしこのエネルギーは小さく，従って放出される電磁波の波長は長い．このため，この電磁波の波長そのものから電磁波を放出した陽子の場所を特定する事は不可能である．

● **傾斜磁場：** ここで Lauterbur は傾斜磁場という概念を導入した．それは Zeeman 効果で分裂した状態間のエネルギーに対応する電磁波を測定してどこから陽子が放出されたかを特定できる手法である．アイデアは極めてシンプルであるが重要な考え方なので解説しよう．陽子の Zeeman 分裂のエネルギーは $\Delta E = \frac{e\hbar B}{Mc}$ なので，対応するフォトンの振動数は $\omega = \frac{eB}{Mc}$ である．観測するのはこのフォトンの振動数である．

今，外部磁場 B に対してこれが特別な座標依存性を持つように設定しよう．簡単のために，1次元系を考える．この時，例えば B が $0 < x < a$ の範囲内で

$$B = B_0 x \quad (0 < x < a) \quad (14.12)$$

のような座標依存性がある場合を想定しよう．この場合，フォトンの振動数 ω と座標 x が一対一の対応をする事がわかる．それは $x = \frac{\omega Mc}{eB_0}$ の式から明らかである．

すなわち， ω を測定する事によりその陽子がフォトンが発生する場所 x が特定できる事を意味している．今は1次元での議論であるが，この問題を3次元にうまく拡張できれば，例えば人間の体内における水分子の分布状況がわかる事になり，これが MRI 手法の基本的な機構である．

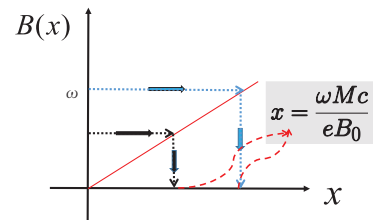


図 14.2: 傾斜磁場

14.4 磁気トラップ法

中性原子を磁場によりトラップできる方法 (磁気トラップ法) がある。今、原子系全体のスピンを S としよう。ただし、これも簡単のために原子核のスピンはゼロとしよう。この時、電子のスピンの自由度のみが効いて来る場合を考えて、外部磁場 $\mathbf{B}$ を原子系にかけた時の Hamiltonian H は

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2M_A} - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad (14.13)$$

と書く事ができる。ここで M_A は原子系全体の質量である。また、 $\boldsymbol{\mu}$ は原子の磁気双極子モーメントであり $\boldsymbol{\mu} = \frac{ge\mathbf{S}}{2m}$ と書かれていて、 g は g -因子 (自由電子の場合 $g \simeq 2$) である。この Hamiltonian にはクーロン力を入れてなく Zeeman 効果の相互作用のみを考慮している。

14.4.1 量子論のエネルギーとトラップ

この相互作用で、何故、中性粒子をトラップ出来るのであろうか？量子力学で示されている量はエネルギー分裂だけである。ここで、今、磁場を Z -方向に選び $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ としよう。この時、原子の最低エネルギー E は

$$E = \frac{\mathbf{P}^2}{2M_A} - \frac{geS}{2m} B_0 \quad (14.14)$$

となる。この段階では、原子のトラップはとても考えられない事である。しかしこの Zeeman 分裂エネルギーは原子系の内部エネルギーを与えているが原子の重心に対する運動に対してはまだ何も言及していない。

● **古典力学の運動：** ここでレーザー光を照射し続ける事により、この原子系の状態を Zeeman 分裂の一番上の量子状態に持って行く事が可能であったとしよう。すなわち、Zeeman 分裂における最も高いエネルギー状態に原子を持って行き、その状態をキープする事である。そうすると、この系の古典力学系の Hamiltonian H_c は

$$H_c = \frac{\mathbf{P}^2}{2M_A} + \frac{geS}{2m} B_0 \quad (14.15)$$

と書ける事になる。ここで、磁場をうまく取って

$$B_0 = aZ^2 \quad (a > 0) \quad (14.16)$$

のような原点から Z -方向の正負の増加に対して磁場が増加するような磁場勾配が作れたとしよう。但し、この座標 Z は原子の重心の座標を表している。

この時, Hamiltonian H_c は

$$H_c = \frac{\mathbf{P}^2}{2M_A} + \frac{ageS}{2m} Z^2 \quad (14.17)$$

と書いており, この古典力学系は常に原点に向かって閉じ込め力が働いている事になっている. すなわち, 原子はレーザー光を照射される事により, 徐々にこの系の原点に向かって動いて行く事になっている.

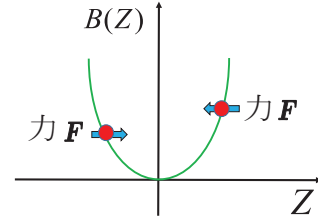


図 14.3: 磁気トラップ

14.4.2 レーザー冷却

ここで, レーザー光を照射する時 Zeeman 分裂のエネルギーギャップ ΔE よりも少し低いエネルギーのレーザー光 E_γ を照射する事にしよう. すなわち $E_\gamma < \Delta E$ である. その場合, レーザー光の方向に向かって来る原子は **ドップラー効果** によりエネルギーを獲得する. 原子の速度が V の時, ドップラー効果によるレーザー・エネルギーシフトは $\Delta E_{DS} \simeq \frac{V}{c} E_\gamma$ (但し $V \ll c$) である. よって $E_\gamma \simeq (1 - \frac{V}{c}) \Delta E$ を満たす時, 原子はこのレーザー光のエネルギーを吸収する事が出来る.

ところがレーザー光を吸収した原子はその励起状態にあり, 当然, 直ちに光を放出して原子はその基底状態に戻る事になる. しかしこの時に放出する光のエネルギーは ΔE である. 従って, この結果, この原子系が ΔE_{DS} に対応する運動エネルギーを失う事になっている. この事を繰り返し行う事により, 少しずつ原子系全体がその運動エネルギーを失い, 冷却して行く事になっている.

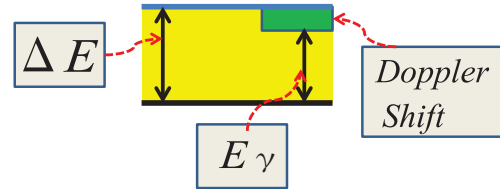


図 14.4: レーザー冷却

14.5 第 14 章の演習問題

- 問 1** サイクロトロン運動はどのような運動であるか？この場合，古典力学でも量子力学でも同じ Larmor 振動数となる．これは物理的には何故だと思えるか？
- 問 2** 傾斜磁場の基本機構を解説せよ．ただし 1 次元型で考えて良い．
- 問 3** Zeeman 効果の Hamiltonian を導出する時 $H = \frac{1}{2m} \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \right]^2$ から出発する．何故そうして良いと思うか論ぜよ．
- 問 4** 量子場の理論ではフォトンと電子の相互作用はすべて $H_I = -e \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} d^3r$ から生じている．この最低次数で物理的な過程があるとしたらどのような物理量があるか？
- 問 5** 中性粒子は電場の影響を受けないため，通常はそのトラップが難しい．磁氣的な力で，どのようにトラップできるか (磁気トラップ) 解説せよ．
- 問 6** イオンを空間にトラップする事ができる．これをイオントラップ法 (または Paul トラップ法) と言われる．この基本的な機構を解説せよ．

14.6 閑話休題 7

1930年代に発表された Heisenberg 達の数本の論文を読むと、当時 Dirac が提唱した空孔理論に対してその真空偏極の影響を何とか物理的に検証したいと言う彼らの姿勢が伺えて非常に興味深い。電磁場により負のエネルギーの電子を励起したらどのような影響があるかと言う問題である。この計算は場の量子化を現代のように行っていないが、全て行列要素で書いているため結果は同じとなっている。Heisenberg 達の論文でも 2 次発散が出ているが、無限大は観測量ではないから気にしないという姿勢が見受けられる。しかしその残りの有限項は物理的に意味があり得るかと言う問い掛けが論文を読む限りでは見えてこない。この電磁場による負のエネルギー電子の励起の問題は現在の言葉で言えばフォトンの自己エネルギーそのものである。Tomonaga はその直後に Heisenberg の所に留学していてこの一連の仕事を熟知していた事と推測される。従ってフォトンの自己エネルギーを波動関数に繰り込む事は不可能である事を知っていたと思われるし、実際、確かにその様なコメントを雑談の中でしている。しかし、この議論のなかで、物理的な観測量は何なのかという問い掛けが今ひとつ見えてこない。この問題は電子のバーテックス補正に対する考え方に顕著となって現われる。Tomonaga は電子の自己エネルギーの計算に現われた Log 発散の項をまず波動関数を再定義する事により波動関数に組み入れた (繰り込んだ)。この新しい波動関数により、バーテックス補正の Log 発散を完全に吸収する形で理論の定式化を行い、電子の異常磁気能率が計算できる手法を開発したのである。しかしこれは如何にも人工的で説得力があるとは到底思われないし、Tomonaga 本人も一時しのぎの手法と考えていたようである。しかしながらその後、場の理論における繰り込み理論に対する進展はなく最近になってようやくこの問題が真面目に議論され始めた段階である。「観測量に発散がでたらそれは場の理論の定式化の何処かに問題がある」と考えた物理屋が予想以上に少なかったのは何故であろうか？明らかに、観測量の発散はその理論形式の欠陥であると考えの方がより自然である。物理学が自然現象を理解しようとする学問である限り、電子のバーテックス補正の計算はまだ健全とはとても言えない。

第15章 量子電磁力学

電磁気学の教科書に量子電磁力学の解説を入れる事には多少の抵抗がある．当然，初年度生にはほとんどわからない内容であろう．しかし，古典電磁気学と言っても電磁場の量子化なしでは電磁波を理解できないため，すでにこの場の量子化は第13章で解説してある．従って，Dirac 場の量子化が電磁気学の範囲を超えている事になる．しかし最近の繰り込み理論に関する新しい知見についての解説は，必ず，学部生にもいつの日かプラスになるものと考えている．

15.1 量子電磁力学の Lagrangian 密度

電磁場と Dirac 場が相互作用する場合，その全 Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial_\mu\gamma^\mu - m - e\gamma_\mu A^\mu)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (15.1)$$

と書けている．これが電子 ψ と電磁場 $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ が相対論的に相互作用する場合の出発点である．ここで $F^{\mu\nu}$ は場の強さであり

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

と定義されている．この Lagrangian 密度がどのように求められたかと言う基本的な問題はここでは解説はしない．これは場の理論の教科書を参考にして欲しい．この式から相互作用 Hamiltonian を

$$H_I \equiv e \int j_\mu A^\mu d^3r \quad (15.2)$$

と定義する．但し $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ は電子のカレント密度であり $j^\mu = (\rho, \mathbf{j})$ である．ここで電子と光子は自由粒子の状態と仮定し， H_I を摂動項として非定常状態の摂動計算を行う．この場合，自由電子と自由光子の場を量子化するため，これらの系は無限多体系となっている．

15.2 Dirac 場の量子化

Dirac 場の量子化の必要性は電子 – 陽電子対生成が実験的に観測されている事実に依っている。しかし実はそれ以上に重要な要請としてパウリ原理がある。電子は一つの状態に 1 個しか入れないという実験事実を説明するには、Dirac 方程式だけでは不十分である。このため、Dirac 場を反交換関係式で量子化する事がどうしても必要になる。場の量子化の仕方は基本的には電磁場と同じで、まずフェルミオン場 ψ を自由場の解で展開する。

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{p}, s} \frac{1}{\sqrt{V}} \left(a_{\mathbf{p}}^{(s)} u_{\mathbf{p}}^{(s)} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - iE_{\mathbf{p}} t} + b_{\mathbf{p}}^{(s)} v_{\mathbf{p}}^{(s)} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} + iE_{\mathbf{p}} t} \right) \quad (15.3)$$

• **スピノル解**： $u_{\mathbf{p}}^{(s)}$ と $v_{\mathbf{p}}^{(s)}$ は自由 Dirac 方程式のスピノル解であり

$$u_{\mathbf{p}}^{(s)} = \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2E_{\mathbf{p}}}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \chi_s \end{pmatrix}, \quad v_{\mathbf{p}}^{(s)} = \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2E_{\mathbf{p}}}} \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix} \quad (15.4)$$

と与えられている。付録の式 (E.13) を参照。ここで $v_{\mathbf{p}}^{(s)}$ が負のエネルギー解に対応している。 χ_s はスピンの固有関数を表し、 $s = \pm \frac{1}{2}$ である。

• **Dirac 場の量子化**： Dirac 場の量子化は $\{A, B\} \equiv AB + BA$ として

$$\begin{aligned} \{a_{\mathbf{p}}^{(s)}, a_{\mathbf{p}'}^{\dagger(s')}\} &= \delta_{s,s'} \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'}, & \{b_{\mathbf{p}}^{(s)}, b_{\mathbf{p}'}^{\dagger(s')}\} &= \delta_{s,s'} \delta_{\mathbf{p},\mathbf{p}'} \\ \{a_{\mathbf{p}}^{(s)}, a_{\mathbf{p}'}^{(s')}\} &= 0, & \{b_{\mathbf{p}}^{(s)}, b_{\mathbf{p}'}^{(s')}\} &= 0, & \{a_{\mathbf{p}}^{(s)}, b_{\mathbf{p}'}^{\dagger(s')}\} &= 0 \end{aligned} \quad (15.5)$$

と反交換関係により行われている。この式 (15.5) により、 $a_{\mathbf{p}}^{\dagger(s)} a_{\mathbf{p}}^{\dagger(s)} = 0$ などに注意すればパウリ原理が満たされる事は容易に確かめられる。

• **反粒子**： ここでの場の量子化は負のエネルギー状態をそのまま使ったものになっている。摂動論で計算を実行する場合、反粒子描像をとる場合が多い。この時オペレータは $b_{\mathbf{p}}^{(s)} \equiv b_{-\mathbf{p}}^{\dagger(s)}$ になっている。これは Dirac の真空における空孔を反粒子 (陽電子) と定義した事に対応している。陽電子の電荷の符号は電子とは逆になるがその質量は全く同じである。勿論、どちらの表示で計算しても、観測量は同じように得られる事に変わりはないが、この反粒子描像で計算した方が便利である場合が多い。ここで $a_{\mathbf{p}}^{\dagger(s)}$, $b_{\mathbf{p}}^{\dagger(s)}$ が粒子、反粒子の生成演算子であり、また $a_{\mathbf{p}}^{(s)}$, $b_{\mathbf{p}}^{(s)}$ が粒子、反粒子の消滅演算子である。

15.3 S-行列による計算

量子電磁力学における全ての計算は摂動論によっているがこれは厳密に解く事ができないからである。この場合、摂動項は $H_I(t) = e \int j_\mu A^\mu d^3r$ となっている。非摂動状態として準備する Fock 空間は自由電子と自由フォトンの状態である。これらの状態をベースにして摂動展開を行うのであるが、この場合の計算はすべて S-行列の方法を使っている。この S-行列は

$$S = T \left\{ \exp \left(-ie \int j_\mu A^\mu d^4x \right) \right\} \quad \text{但し} \quad d^4x \equiv dt d^3r \quad (15.6)$$

と書かれている。しかし、この段階での S はまだオペレータであり、物理的な過程を計算したい場合、Fock 空間での状態ベクトルで期待値を取る必要がある。ここで $T\{\dots\}$ は T-積を表し

$$T\{H_I(t_1)H_I(t_2)\} \equiv \begin{cases} H_I(t_1)H_I(t_2) & (t_1 > t_2) \\ H_I(t_2)H_I(t_1) & (t_1 < t_2). \end{cases} \quad (15.7)$$

と定義されている。この S-行列による計算手法は量子力学における時間依存の摂動論の定式化と全く同じである。S-行列の場合、相互作用表示で計算するのは単にオペレータレベルでの計算に便利だからである。

15.4 量子電磁力学 (QED) の繰り込み理論

摂動計算をする限り、その計算はそれ程難しい事ではない。実際、Feynman が提案した Feynman 図による計算手法は S-行列の計算を規則化したものであり、誰にでも簡単に計算できる。例えば電子 - 電子散乱の S-行列の計算は場の理論の教科書の定番であり、これはループを含まないので細かい係数は別としてすぐに計算できる。S-行列の計算で問題になる Feynman 図はループを含むものである。ループとは例えば電子がフォトンを放出し、すぐに同じ電子がそのフォトン吸収する Feynman 図の事であり、線が閉じているのでこれをループ図と呼んでいる。この場合必ず運動量積分が計算に入ってくるが、この積分を実行すると無限大 (発散) になってしまう事がある。この発散を処理する手法が繰り込み理論 (Renormalization Scheme) である。

15.4.1 電子の自己エネルギーと繰り込み

電子の自己エネルギーは静電場における計算式 (5.7) で見たように、点電荷の場合には無限大であった。相対論的場の理論でも状況は似ている。電子の自己エネルギーとは電磁場と電子の相互作用 H_I を摂動項として、電子に対する 2 次の摂動エネルギーを計算する事に対応している。電子の自己エネルギー $\Sigma(p)$ は

$$\Sigma(p) = -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma^\mu \frac{1}{k^2} \simeq \frac{e^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) (-\not{p} + 4m) \quad (15.8)$$

となる。ここで $\not{p} \equiv p_\mu \gamma^\mu$ と定義している。また Λ はカットオフ運動量で $\Lambda \rightarrow \infty$ である。この無限大は波動関数を $\psi_r \equiv N\psi$ と再定義する事により吸収できる。Lagrangian で書くと

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= \bar{\psi} \not{p} \psi - \left[\frac{e^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) \right] \bar{\psi} \not{p} \psi \\ &\simeq \bar{\psi}_r \not{p} \psi_r, \quad \text{但し,} \end{aligned}$$

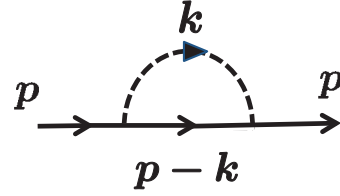


図 15.1: 電子の自己エネルギー

$$\psi_r = \sqrt{1 - \frac{e^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right)} \psi \quad \text{である.}$$

ここでは e^2 の摂動展開をしているので常に最低次数のみを取っている。また質量項の繰り込みに関しては省略している。

15.4.2 フェルミオンのバーテックス補正

次にバーテックス補正 $\Lambda^\mu(p', p)$ を計算しよう。これは発散項のみ書くと

$$\Lambda^\mu(p', p) = -ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p}' - \not{k} - m} \gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} \gamma_\nu \frac{1}{k^2} \simeq \frac{e^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) \gamma^\mu$$

となる。

この時、相互作用 Lagangian 密度は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}'_I &= -eA^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi + \frac{e^3}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda}{m}\right) A^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \\ &\simeq -eA^\mu \bar{\psi}_r \gamma_\mu \psi_r\end{aligned}$$

となり、発散項はフェルミオンの自己エネルギーの際に再定義した波動関数により完全に吸収されている。

この手法によりバーテックス補正項を計算すると Log 発散はでてくるがこれを繰り込む事により電子の異常磁気能率 $(g-2)$ が計算できている。そしてこの結果は実験値とよく合っているのである。しかしながら、 $(g-2)$ のような観測量に発散があると言う事は理論形式がまだ健全ではない事を示している。

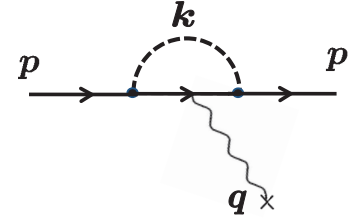


図 15.2: バーテックス補正

● **有限質量ベクトルボソンによる繰り込み**： 実際、有限質量のベクトルボソン (Z^0 -ボソン) による電子の $(g-2)$ 補正の計算 $[\delta g \simeq 4 \times 10^{-14}]$ には発散がない事がわかっている。この計算が発散しない理由は有限質量ベクトルボソンの伝播関数を

$$D^{\mu\nu}(k) = -\frac{g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2 - M^2 - i\varepsilon}$$

と正しい伝播関数を採用した事によっている。すなわちフォトンによるバーテックス補正のみに発散がある。これより、QED の繰り込み理論が大きな成功を収めた事は確かであるが、物理的な観測量に発散がある事は理論の不健全さを示している事がわかる。実際フォトンの伝播関数として Feynman の伝播関数 $D_F^{\mu\nu}(k) = -\frac{g^{\mu\nu}}{k^2 - i\varepsilon}$ を用いているが、しかしこの式が常に正しいとは言えない事は昔からよく知られていた [7, 8]。この伝播関数で電子-電子散乱過程は正しく計算されるがループを含む計算には応用できない。今後、正しいフォトン伝播関数により $(g-2)$ 補正を計算する事が重要である [4]。

15.4.3 フォトンの自己エネルギー

フォトンの自己エネルギーは電磁場と電子の摂動項 $H_I(t)$ に対して 2 次の摂動エネルギーを計算したものである。この計算は、フォトンが電子-陽電子の仮想ペアを生成し、それが直ちにもとのフォトンに戻ると言う散乱過程に対応している。フォトンの自己エネルギーの真空偏極テンソル $\Pi^{\mu\nu}(k)$ は

$$\Pi^{\mu\nu}(k) = ie^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{1}{\not{p} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m} \right] \quad \text{であり,}$$

この時フォトンの自己エネルギーは $\delta E = \frac{1}{2} \epsilon_\mu \epsilon_\nu \Pi^{\mu\nu}(k)$ である. この発散項は $\Pi^{\mu\nu}(k) \simeq \frac{\alpha}{2\pi} \Lambda^2 g^{\mu\nu} + \frac{\alpha}{3\pi} (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \ln \frac{\Lambda^2}{m_e^2}$ となっていて明らかに 2 次発散が主要項である.

しかし自己エネルギー自体は観測量ではないのでほって置いても全く問題ない事である. ここでフォトンの自己エネルギーの 2 次発散はゲージ不変性とは無関係である事に注意する必要がある. 実際, Z^0 ボソンの自己エネルギーも同様に 2 次発散している.

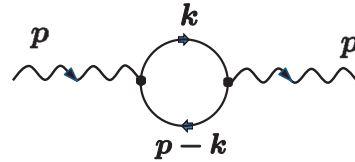


図 15.3: フォトンの自己エネルギー

後で見るようにフォトンの真空偏極に関する物理量的な観測量は全て有限であり, このためフォトンの自己エネルギーが繰り込みに使われる事はない.

15.4.4 真空偏極を含む物理過程

真空偏極はフォトンが電子 - 陽電子の仮想ペアを生成した事に関係している. その真空偏極で生成された仮想電子または仮想陽電子が他の粒子と相互作用する過程は物理的である. その物理的に意味のある過程は「三角形図」と呼ばれる Feynman 図に対応しており, $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ と $Z^0 \rightarrow 2\gamma$ が知られている.

● $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ **崩壊**: この計算は 1969 年に Nishijima [2] によって行われており, しかも Adler 達によるカイラル・アノマリー提案の前にすでに発表されている. 一見すると 1 次発散があるように見えるが, これは Trace の計算でゼロになる. さらに Log 発散もなく S-行列は有限である. 実際この Feynman 図による計算結果は $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ の崩壊過程の観測値を正確に再現している.

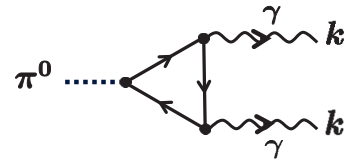


図 15.4: $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$

● $Z^0 \rightarrow 2\gamma$ **崩壊**: この崩壊過程は理論的にゼロである事が以前から知られていた. 実際の計算でも 1 次発散や Log 発散は消えて S-行列は有限である. 更に崩壊は角運動量の保存則に関連した群論的な制限から厳密にゼロである事がわかっている. また $Z^0 \rightarrow 2\gamma$ 崩壊の実験値もゼロと矛盾していない,

• **カイラル・アノマリー** : $\gamma^\mu \gamma^5$ の頂点関数を含む三角形図には 1 次発散も Log 発散もなく, 従ってこの S-行列は有限である. この事は Adler 達が提唱した「カイラル・アノマリー」は単純な間違いである事を示している. 1 次発散を正則化して求められたアノマリー方程式なのだが, その 1 次発散は存在しなく, よってアノマリー導出の根拠さえ失っている.

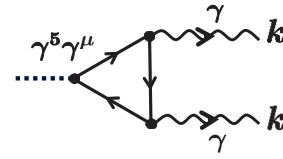


図 15.5: カイラル・アノマリー

実際, Noether の定理から導かれたカイラルカレントの保存則が正則化などの数学的手段で破られる事など物理的にはあってはならない. Nishijima による $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ 崩壊の計算は教科書 [2] でのみ発表されていたが, もしこの仕事が一般に理解されていたら「アノマリー現象」など起こらなかった事であろう.

15.4.5 物理的観測量は有限量

電子とフォトンの自己エネルギー自体は観測量ではないので, その発散は物理的にも理論形式の観点から言っても特に問題にはならない. しかし物理的な観測量に発散がある場合には, 繰り込み理論を考える前にどこか他に問題があるかどうかの検証が必要である. これまでの計算結果をまとめると

繰り込み理論計算のまとめ

	繰り込み関連の Feynman 図	発散度	参考文献
1.	γ^5 -バーテックスの三角形図 [$\pi^0 \rightarrow 2\gamma$]	有限	[2]
2.	スカラーバーテックスの三角形図	有限	[3]
3.	$\gamma^\mu \gamma^5$ -バーテックスの三角形図 [$Z^0 \rightarrow 2\gamma$]	有限	[4]
4.	バーテックス補正 [有限質量ベクトルボソン]	有限	[4]
5.	バーテックス補正 [フォトンの $(g-2)$ 計算]	Log 発散	[7]

となっている. これはフォトンの伝播関数としてこれまで誰もが使ってきた Feynman の伝播関数ではなくて, 理論的に正しい伝播関数を用いてフォトンの $(g-2)$ の計算を実行する事が非常に重要である事を示している. この計算が有限で求まれば繰り込み理論は不要となる.

15.5 量子場の理論

物理学における相互作用は4つの力で成り立っている。これまで議論してきた量子電磁力学が最も基本的である。これに加えて重力、強い相互作用そして弱い相互作用があり、それらがすべて同じ量子場の理論として Lagrangian 密度の言葉で記述され定式化されている。

15.5.1 重力

重力 (Gravity) に関しては付録 E で解説している。これは場の理論としては最も単純でありまた任意性の少ない理論形式である。実際、この理論により、重力が常に引力である事が証明されており、またすべての観測事実を矛盾なく再現できる事が示されている。さらに、この重力場 g は量子化する必要がなく、電位 ϕ と同様に古典場として扱う事で自然界を記述できる事がわかっている。従って重力子 (Graviton) は不要の概念である。

15.5.2 強い相互作用

陽子や π 中間子などを記述する場の理論が量子色力学 (Quantum Chromodynamics, QCD) である。これは3個のカラー自由度を持つクォークが8個のカラー自由度を持つグルオンを介して相互作用する模型である。この QCD は $SU(3)$ のゲージ理論であるため、非可換ゲージ理論とも呼ばれている。ところが、このクォークもグルオンもそのカラー電荷が保存量ではない事が数学的に証明されており、従ってクォークもグルオンも観測量ではなくなっている。すなわち、運動学的な閉じ込めが起こっている。実際、実験的にもクォーク・グルオン共に観測されていない。従って通常の摂動計算ができないため、どのようにしたら物理的な観測量が計算できるのかよくわからない。単純に考えれば、ある系の全 Hamiltonian を一気に対角化する事くらいであろうか。尤も現段階でその計算を実行する事は不可能である。その意味で、これまでの模型計算 (非相対論的クォーク模型や格子ゲージ理論計算など) は非現実的すぎて評価の対象にさえならないものである。

● **中間子交換力による記述：** 原子核の構造を理解するためには核力を理論的に再現する必要がある。これは核子間に中間子を交換する事により核力を記述する事ができており、これにより原子核の基本問題を解く事が出来る。

15.5.3 弱い相互作用

β -崩壊などを記述する力が弱い相互作用 (Weak interaction) であり, 最初 Fermi により 4 点相互作用模型として提唱された. その後この模型は Gell-Mann や Feynman などにより CVC 理論 (Conserved vector current theory) として発展させられ, 実験をうまく説明できる理論模型となった. しかし CVC 理論には 2 次の摂動エネルギーが発散するという理論上の困難があり, この修正が必要であった. この 4 点相互作用における 2 次発散の困難は重いベクトルボソンの交換により克服される事が知られていたが, 実際, 非常に重い粒子の存在を示唆する複数の実験データが 70 年代初めにはすでに報告されていた.

● **弱い相互作用の標準理論:** 一方, CVC 理論の困難を克服するため, Weinberg や Salam などは非可換ゲージ理論から出発した $SU(2) \otimes U(1)$ 模型を提唱した. しかしこの模型は様々な理論上の問題を内包している. 例えば W ボソンのカラー電荷はゲージによるため本来は観測量ではない事, また理論模型の途中で Higgs 機構という名の下に勝手にゲージ不変性を破っている事, さらに Higgs 機構が依拠している「自発的対称性の破れ」は正しい理論形式ではない事などこの模型内での理論の整合性がほとんどないものとなっている [5, 6].

● **自発的対称性の破れ:** 「自発的対称性の破れ」は南部達が主張した描像である. しかし場の理論においてその模型の対称性が自発的に破れると言う事はなく, 実際, 彼らの模型計算は正しいとは言えない. これは一見, 対称性が破れたように見えただけであり, この計算間違いは Bogoliubov 変換という近似法を用いた事が一因であった. さらに「対称性が自然に破れる事はない」と言う事実は厳密解によっても証明されている. また昔から「非対称性の物理現象はその原因がない限り非対称性が現われる事はない」と言う Curie の原理が知られているが「自発的対称性の破れ」はこの原理にも抵触している.

● **弱い相互作用の新しい理論:** しかしながら, 単純に, 3 つのウィークボソン ($W^\pm, Z^0$) を媒介とした弱い相互作用の理論模型を考えると, これは CVC 理論を導出できるし, また 2 次の摂動エネルギーの 2 次発散はなくなっている. さらにこの模型はバーテックス補正などの物理的な観測量に対しても発散がなく, 繰り込みの点でも極めて健全な理論体系である事が証明されている. この単純な模型は Weinberg-Salam 模型で Higgs 粒子を理論から除き, 更に, 非可換ゲージ理論ではないとするなど幾つかの修正を実行した後の標準模型に対応している. この修正版標準理論の最終的な Hamiltonian は弱い相互作用の理論として十分に自然界を記述できる正しい模型となっている.

15.5.4 伝播関数のまとめ

量子場の理論の計算はどのモデルもすべて摂動論によっている。これは場の量子化をするとその理論モデルは無限多体系になっていて、厳密に解く事が出来るのは自由場のみである事が主な理由である。従って相互作用のある場の理論モデルはすべて摂動論により計算され、この場合、摂動計算は自由場を非摂動項とし、相互作用項を摂動とした理論形式によっている。この計算はFeynman 図に従って実行すればよく、その計算自体には困難な点は何処にもない。従って、場の理論の摂動計算は面倒ではあるが誰にでも確実に計算できる理論体系となっている。しかしながら伝播関数に関してはこれまで正しい取り扱いが行われて来なかった。ここで修正された正しい伝播関数のまとめを書いておこう。

- フォトン伝播関数

$$\begin{cases} D^{Coul}(k) = \frac{1}{k^2} & : A^0 - \text{部分} \\ D^{ab}(k) = \frac{1}{k^2 - i\epsilon} \left(\delta^{ab} - \frac{k^a k^b}{k^2} \right) & : \mathbf{A} - \text{部分.} \end{cases}$$

- 有限質量ベクトルボソン伝播関数

$$D^{\mu\nu}(k) = -\frac{g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}}{k^2 - M^2 - i\epsilon}$$

この正しいフォトン伝播関数はFeynman のフォトン伝播関数 $D_F(k) = -\frac{g^{\mu\nu}}{k^2 - i\epsilon}$ よりも取り扱いがかなり難しいものになっている事に注意する必要がある。このFeynman の伝播関数に問題がある事は昔から知られていたが、興味深い事に、電子-電子散乱などの On shell 散乱の T-行列はFeynman の伝播関数による計算と正しいフォトン伝播関数による計算が一致している [7, 8].

15.6 第 15 章の演習問題

問 1 Dirac 場の量子化から Pauli 原理を導出せよ.

問 2 4 元のベクトルポテンシャル $A^\mu(x)$ を自由場で展開すると

$$A^\mu(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu \left[c_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + c_{\mathbf{k},\lambda} e^{i\omega_{\mathbf{k}}t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] \quad \text{となる.}$$

ここで $c_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger, c_{\mathbf{k},\lambda}$ に次のような条件を課す.

$$c_{\mathbf{k},\lambda}|0\rangle = 0, \quad \langle 0|c_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger = 0, \quad \langle 0|c_{\mathbf{k},\lambda}c_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger|0\rangle = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{\lambda,\lambda'}. \quad \text{この時,}$$

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\}|0\rangle = \\ \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}} \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\nu \left(e^{ikx}\theta(t) + e^{-ikx}\theta(-t) \right) \end{aligned} \quad (15.9)$$

を示せ. 但し, $x = x_1 - x_2$, $kx = k_0t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ である. また $\theta(t)$ はステップ関数で式 (4.11) で与えられている.

問 3 上式を書き直すと

$$\langle 0|T\{A^\mu(x_1)A^\nu(x_2)\}|0\rangle = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x_1-x_2)}}{k^2 - i\varepsilon} \times \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\nu \quad (15.10)$$

と書ける事を示せ. 式 (15.10) から式 (15.9) を導出しても良い.

問 4 上式で $\sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\nu = -g^{\mu\nu}$ とするとこの式は Lorentz 条件 ($k_\mu \epsilon_{\mathbf{k},\lambda}^\mu = 0$) と矛盾する事を示せ.

問 5 この事より Feynman の伝播関数 $D_F(k) = -\frac{g^{\mu\nu}}{k^2 - i\varepsilon}$ は理論上の整合性がない. どうしたら良いと思うか?

演習問題の解答 :

<http://sg2.phys.cst.nihon-u.ac.jp/fffujita/indexDTEXT.html>

15.7 閑話休題 8

高校時代、自分は文芸部で高校の文芸誌「一里塚」の編集に携わっていた。当時の広告料は1マスが500円であったが、それを取りに町を歩いてもほとんどは相手にはされなかった。その雑誌の巻頭言に「大宇宙空間は確かに存在しているのであろう。その中に大星雲も太陽もまた我等人間も存在しているのであろう・・・」から始まる400字程度の文章を書いたが、当時の自分には宇宙空間の理解と認識ができていなかった事がよくわかる。

現在、陽子と電子の寿命が無限である事が実験・理論の両面から確立されているが、この事が宇宙論にも重大な影響を与えている。宇宙論では、宇宙が無限の過去から存在していたと言う仮定から出発せざるを得ない。しかしながら、これは過去のどこかで宇宙が生成されたとする仮定よりも合理的である。実際「宇宙生成の原因」を示す実験・理論は何処にも存在していない。

しかし無限の過去からこの我々の宇宙(約1兆個の銀河系)が存在していたと言う仮定を受け入れると、宇宙論全体にも様々な影響がでてくる。この我々の宇宙が100億年程前に大爆発を起こした事は確実であり、そしてこの宇宙はその大爆発を繰り返してきた事であろう。この事は4つの相互作用が矛盾なく理解された現在、自然な結論となっている。

ところが、この「大爆発繰り返し」の事実を受け入れると我々の宇宙のみ存在しているとする仮定が矛盾を惹き起こしてしまう。それは大爆発後に必ず光とニュートリノによって、莫大なエネルギーが我々の宇宙空間から外の空間に放出されているため、無限回の大爆発の事実は我々の宇宙全体のエネルギーが有限である事と矛盾してしまう事になる。このため、どうしても全宇宙は無限であり、我々と同じ宇宙が無限個あり、そこからエネルギー(光とニュートリノによる)をお互いに出し入れしていると仮定せざるを得ないのである。そしてこのために「Mugen Universe」(無限宇宙)と言う考え方の導入が極めて自然な作業仮説となっている。この時、無限個の宇宙からの引力でも、何故、我々の宇宙は安定なのかと言う疑問には、無限である限り安定である事が割合簡単に確かめる事ができている。更に言えば、この無限宇宙には地球のような生命体をもつ星が限りなく多く存在している事であろう。そしてこの宇宙の成り立ちまで理解する生命体の存在も数え切れない程多数なのであろうか？

付 録 A 電荷と電流

A.1 電荷とは何か？

電荷とは何かと言う質問が出された時、正確に答えられる研究者が何人いるであろうか？恐らくは電荷 e として良くわかっていると思い込んでいる物理屋が大半であろう。しかしながら、この電荷 e とは「電子と電磁場との相互作用の強さ」を表している物理量なのである。しかし、同時に我々は電子の電荷という言い方もしている。これはどのような物理的意味があるのであろうか？これは実は古くて新しい問題なのである。

A.1.1 結合定数としての電荷

電子と電磁場の間の相互作用の強さを表すのが電荷 e である事は、元々の Lagrangian 密度を見ればすぐにわかる事ではある。相互作用の強さを表しているので e の事を結合定数と言う。それでは、何故、電荷 e というような言い方をしてまるで電荷が単独で存在しているような表現をするのであろうか？これには勿論それなりの理由がある。一番重要な事は力の線形性（重ね合わせの原理）にある。電子が沢山集まればそれだけ力は強く働くので、その力は基本的には足せばよい事になっている。

A.1.2 量子数としての電荷

それでは、電子の電荷とは何を物理的には意味しているのであろうか？現在の場の理論の理解からすると、これはどうしてもその粒子の状態が持つ「量子数」と考えざるを得ない。電子は従って、電荷に関しては -1 の量子数を持っていると考え、また陽子は $+1$ の量子数を持っていると考えるのである。そして、電磁気学での相互作用は同じ量子数を持つ粒子間には斥力、異なる量子数を持つ粒子間には引力が働き、この場合の相互作用の強さは結合定数 e で決

定されている。電磁気学に関する相互作用はこれで矛盾なく理解できている。我々の物質世界は原子・原子核で構成されているが、それらの構成要素は陽子、中性子それに電子である。中性子は電荷を持たないので、電荷を持つ粒子は陽子と電子だけである。

A.1.3 W-ボソンの電荷

この電荷に対する描像は電磁気学を超えた場合にも良く成り立っている。「電荷」を持つ不安定粒子として $W^{\pm}$ ボソンがある。これは弱い相互作用をつかさどる基本的な粒子である。この場合、この $W^{\pm}$ ボソンはそれぞれ $\pm$ の電荷に対応する量子数を持っている。しかしながら、電磁気的な相互作用はしない事がわかっている。それは結合定数が e ではなくて 弱い相互作用の結合定数 g により支配されているからである。「電荷」を持つ粒子は必ず電磁気的な相互作用をすると信じているのはこれまでの経験に基づいた「信仰」であり、科学的な根拠はない。最終的には $W^{\pm}$ ボソンは高次の項において電磁場と相互作用をする可能性がある事はわかっているが、これは弱い相互作用よりもさらに小さい相互作用 $\mathcal{O}(g^2 e^2)$ となっている。

A.2 真空中の電磁場

電磁気的な相互作用は常に電子か陽子 (イオン) が関係していてこれらの物質が電場と磁場を生成している。それでは、物質の存在しない場合 (真空中) でも電磁場は存在するのであろうか？この答えは勿論「Yes」でありそれが「電磁波 (フォトン)」すなわち光である。フォトン是一次作られると物質のない真空中でも存在している。但し、フォトンが生成されるためには物質の存在が不可欠である。すなわち、物質間の衝突や崩壊で作られるかまたはフォトンと物質の衝突で生成されている。しかしフォトン同士だけではフォトンの生成が起こらない事がわかっており、これは群論の言葉で証明されている。すなわち、 1^- のフォトン 2 個から 1^- のフォトンを作る事は対称性からできないのである。

またフォトンの寿命は無限大である。それはフォトンが崩壊しようとしても崩壊する相手がないからである。フォトンが消滅するのは、物質に吸収される場合にのみ起こっている。

A.3 電流とは何か：直流・交流

電流とは何かという質問に対しては、これは電子の流れであると答える。しかし、ここで考えている電流は陰極線のように真空中での電子の流れを意味しているわけではなく、物質中での電子の流れを意味している。

A.3.1 電子による情報の伝達

導体中に電流が流れる事に関しては2つの重要な物理現象がある。1つは電気抵抗による発熱などの現象である。もう一つは電子による情報の伝達である。ここではこの電子による情報の伝達について考えて見よう。

ある導体を考えてその導体のA点からB点へ電流が流れる場合を考えよう。この場合、電流とは比較的自由に動ける電子達が一斉に隣の結晶格子（分子）に飛び移る事を意味している。従って、A点からB点へ流れる電流はある特定の電子群が情報を伝達する事ではなく、A点から動き始めた電子群は隣の結晶格子に飛び移り、それと同じ時間にB点の隣の結晶格子にいた電子群はB点に殺到して情報を伝達するわけである。情報の伝達は電子群が来たか{この場合は1}、来ないか{この場合は0}、すなわち、0か1かの組み合わせですべての情報が伝わる事になっている。これが電流による情報伝達の基本原理である。従って伝達時間は格子間を電子が飛ぶ時間であり、これはまさに瞬間である。この場合、重要な点として電位差は空間のみの関数であり、時間に依らないと言うことを理解しておく必要がある。

従って、電流とは導体の両端の電極間に電位差があるとその間に電子によって情報が流れる（伝わる）事である。一方、これに対して、誘電体に電場をかけた場合、電子がその情報を隣の結晶格子に伝える事はなく、電気双極子が生成されるにとどまる事になっている。従って、誘電体では電位差があっても電流は流れる事はなく情報は伝わらない。

A.3.2 直流

導体の2点間に一定の電位差を保って常に一定方向の電流を流した場合、その電流を直流 (Direct current, DC) と呼んでいる。この場合、電流は導体内全体を流れると考えられている。電子が一方方向に流れる場合、恐らく流れている電子間の静電エネルギーを考慮する必要があると考えられ、従って電流は導体内全体を流れると言う事であろう。

A.3.3 交流

一方において、電位差を変化させて電流を流した場合、それを交流 (Alternating current., AC) と言う。一般家庭で使っているのは交流電源である。この場合電流は導体の表面を流れるものと考えられている。何故であろうか？この明確な答えはわからないが一つの描像を解説しよう。交流の場合、ある結晶格子に注目してその結晶格子付近で情報を交換している電子を考えよう。この時、この電子は時間平均するとほとんどその近辺に滞在しているように見えると考えられる。この時、静電場のエネルギーを評価する立場からすると、この電子はあたかもそこに局在しているものと見なしてもそれ程間違える事はないであろう。そうだとすると、これらの電子の静電エネルギーはその物質の表面にあったほうが当然低くなる。従って交流電流の場合、電子の流れは表面付近だけになるものと考えられる。しかし電流はどの程度の表面に流れているのかと言う問題はそれ程明らかな事ではない。それは電子が導体に束縛されている事は間違いない事であり、導体の表面の定義がそれ程単純には出来ない事と関係している。物理では「表面」または「境界」の問題が難しすぎるため、うまく取り扱う事が出来ていないのが現状である。

付 録 B 相対性理論

電磁気学は系の変換性に関して Newton 力学とは本質的に異なっている。古典力学では光の速度は現れないが、電磁気学では光速が重要な役割をしている。Maxwell 方程式は Lorentz 変換に対して不変であるが、この時の変換式に光速がでている。相対性理論 (Relativity) はキネマティクス (運動学) なので取り扱いが簡単であり、どの物理のモデルも必ず満たすべきものである。従ってそこから何か新しい物理がでてくると言う事はない。

B.1 相対性原理

物理学の基本は相対性原理にある。相対性原理とは何か？それは、地上で作られた理論がそれと等速直線運動をしている他の系 (慣性系) においても同様に成り立ち、同じ観測量が得られるべきであると言う要請である。例えば地上でバネの実験をした時、その振動数や振幅が求められる。ここで相対性原理とは等速直線運動をしている電車に乗って同じ条件で同じバネの実験をするとやはり地上と同じ振動数と振幅が観測されるべきであると言うものである。

この相対性原理で最も重要な事はそれぞれの系でそれぞれの座標系を定義できるため、その系に観測者も同時に定義されるという事である。従って、相対論的に不変な理論モデルの計算を行う場合どの系で計算しても答えは同じである事を意味している。従って系を選ぶ時はなるべく計算が簡単になる系を選ぶ事が大切である。さらに、一度、系を指定したらもはや相対論の変換は不要であり、運動方程式の解を観測量と比較する事になる。例えば GPS 衛星の運動では地球の中心を原点とした座標系を指定して運動方程式を解いており、この解から GPS の軌道がすべて決まっている。従ってこの時「GPS 衛星の時間が遅れるか？」などと言う質問は物理的に全く無意味である。

B.2 ガリレオの相対性理論

今、電車の系である「S-系」が静止系に対して一定速度 v で運動しているとして電車が走る方向を x -軸としよう。ここで大切な事は、それぞれの座標系には観測者も同時に定義する事ができる事である。ここで静止系の座標と時間を $R(t, x, y, z)$ と表記し、電車の系の座標を $S(t', x', y', z')$ と表記しよう。但し、電車は光速 c と比べてゆっくり動いているとしている。この時、2つの座標系には次の関係式がある。

$$x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t' \quad (\text{B.1})$$

これを Galilei 変換 (Galilei transformation) という。これは2つの座標系の原点同士の関係式と考えてよい。今、地上 (R-系) で質量 m の質点がバネに繋がれていてこのバネの振動の実験をしたとする。バネの伸びを x とすると $m\ddot{x} = -kx$ が運動方程式になる。ここで k はバネ定数である。電車の系 (S-系) でも同じバネの実験をすると、Galilei 変換から明らかなように運動方程式が $m\ddot{x}' = -kx'$ となる。ここで x' はバネの伸びを表す。これは地上で行ったバネの実験と同じであり、その微分方程式の解は $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ として

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad x' = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t' \quad (\text{B.2})$$

となる。ただし、初期条件 ($t = 0$ で $x = 0, \dot{x} = v_0$) をつけている。相対性理論はこれ以上の事は何も言っていない。この例を見てもわかるように、それぞれの系で観測者の存在を仮定しているが、これが相対性理論の本質である。

B.3 特殊相対性理論

S-系の速度 v が光速に近い場合の変換則は Lorentz により与えられている。今度の場合、R-系の座標を $R(t, x, y, z)$ とした時、S-系の座標は $S(t', x', y', z')$ となり、時間は別のものになる。それは、どの系でも観測者が定義されているので、ある意味では当然である。この場合 Lorentz 変換は

$$x = \gamma(x' + vt'), \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right), \quad y = y', \quad z = z' \quad (\text{B.3})$$

であり、 $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ と定義されている。この式は Maxwell 方程式が S-系でも R-系でも同じ形の微分方程式になるべきであると言う要請を充たす事に

より導出されている。Lorentz 変換は速度 v が光速と比べて十分小さいと

$$x \simeq x' + vt', \quad t \simeq t', \quad y = y', \quad z = z' \quad (\text{B.4})$$

となり, Galilei 変換を含んでいる事がわかる。

B.3.1 相対論における速度の和

ここで相対論における速度 V_1 と速度 V_2 の和を求めよう。まず Lorentz 変換から $x = \gamma(x' + vt')$, $t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$ であるから, 変換された系での速度は $V' = V_1$, $v = V_2$ として

$$V \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{V' + v}{1 + \frac{vV'}{c^2}} = \frac{V_1 + V_2}{1 + \frac{V_1V_2}{c^2}} \quad (\text{B.5})$$

となり, これは単なる和ではない。勿論, 速度 V_1, V_2 が光速と比べて十分小さい場合, これはよく知られている式 $V = V_1 + V_2$ になっている。

B.3.2 運動量の Lorentz 変換

それでは質点の運動量は Lorentz 変換に対してどの様に影響されるのであろうか? この場合, 運動量とともにエネルギーも一緒に考える必要がある。今, R-系での質点のエネルギーと運動量を $(E, \mathbf{p})$ としよう。この時, R-系に対して x -軸に沿って速度 v で動いている S'-系においては, この質点のエネルギーと運動量 $(E', \mathbf{p}')$ はどうなるのであろうか? これは Lorentz 変換により与えられる。すなわち

$$p_x' = \gamma\left(p_x - \frac{vE}{c^2}\right), \quad E' = \gamma(E - vp_x), \quad p_y' = p_y, \quad p_z' = p_z \quad (\text{B.6})$$

である。この時, $E^2 - \mathbf{p}^2c^2$ を計算すると $E'^2 - \mathbf{p}'^2c^2 = E^2 - \mathbf{p}^2c^2$ となり, 一定値となる。この一定値は何であろうか? これは系の変換によらない量であり, 質点を考える場合, その質量しかあり得ない事がわかる。従って

$$E'^2 - \mathbf{p}'^2c^2 = E^2 - \mathbf{p}^2c^2 = (mc^2)^2 \quad (\text{B.7})$$

と書く事ができる。ここで, 運動量 $\mathbf{p}$ がその質量と比べて十分小さい場合,

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + \mathbf{p}^2c^2} = mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \dots \quad (\text{B.8})$$

となり、確かに非相対論の「分散関係式」が得られる事がわかる。質点のエネルギーがその運動量とどのような関係式で表されているかを示す式を分散関係式という。これは物理では非常に重要な関係式となっている。

B.3.3 微分量の Lorentz 変換

Lorentz 変換 $x = \gamma(x' + vt')$, $t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$ に対して微分の変換式は

$$\frac{\partial}{\partial x} = \gamma \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \right), \quad \frac{\partial}{\partial t} = \gamma \left(v \frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial t'} \right) \quad (\text{B.9})$$

となる。但し y, z は変更を受けないので表示していない。ここで $p_x = -i \frac{\partial}{\partial x}$, $E = i \frac{\partial}{\partial t}$ と定義してみると

$$p_x = \gamma \left(p_x' + \frac{vE'}{c^2} \right), \quad E = \gamma (E' + vp_x') \quad (\text{B.10})$$

となりエネルギー・運動量の変換則と一致している。よって4次元の内積

$$\boxed{px \equiv Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \text{ が}$$

$$px = Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = p'x' = E't' - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{r}' \quad (\text{B.11})$$

のように Lorentz 変換に対して不変である事がわかる。

B.4 運動方程式の変換不変性

粒子の運動を記述する運動方程式はどの慣性系でも同じ形をしている事が相対性理論の基本原則である。ここでは、Newton 方程式と Maxwell 方程式が Galilei 変換と Lorentz 変換に対してどのように振舞っているのかを具体的に見て行こう。そうすれば変換した時の形がいかに大切であるか良くわかると思う。

• **Newton 方程式と Galilei 変換：** Galilei 変換の場合、変換則は $x = x' + vt'$, $t = t'$ である。Newton 方程式を変換してみると

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad \rightarrow \quad m \frac{d^2x'}{dt'^2} = -\frac{\partial U}{\partial x'} \quad (\text{B.12})$$

となり、方程式は不変である事がわかる。

• **Newton 方程式と Lorentz 変換：** Lorentz 変換の場合，
 $x = \gamma(x' + vt')$ ， $t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right)$ となっている．従って，座標の時間微分は

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + vdt'}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} \quad (\text{B.13})$$

さらに 2 階微分は

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{\gamma(dt' + \frac{v}{c^2}dx')} d\left(\frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}\right) = \frac{\frac{d^2x'}{dt'^2}}{\gamma^3\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)^3} \neq \frac{d^2x'}{dt'^2} \quad (\text{B.14})$$

となり，Newton 方程式は全く別物になっている．すなわち，Newton 方程式は Lorentz 変換に対して不変ではない．

• **Maxwell 方程式と Galilei 変換：** Maxwell 方程式の Galilei 変換による性質を考えるためには，物質が無い時で十分である．この時，Maxwell 方程式は電場 $\mathbf{E}$ に対して

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\mathbf{E} = 0 \quad (\text{B.15})$$

となっている．Galilei 変換の式は $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}$ ， $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}$ となるので

$$\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2 - \nabla'^2\right]\mathbf{E}' = 0 \quad (\text{B.16})$$

と変換され，Maxwell 方程式は Galilei 変換に対して不変ではない事がわかる．

• **Maxwell 方程式と Lorentz 変換：** Lorentz 変換においては

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \nabla'^2 \quad (\text{B.17})$$

であるから，Maxwell 方程式が Lorentz 変換に対して不変である．

B.5 相対性理論の具体例

ここで相対論の具体例をあげるのだから相対性理論に慣れて欲しいと思う。しかし観測しているのは地上であり、相対性理論の変換性から他の慣性系のある種の情報がわかる場合があるという事を示しているだけである。相対性理論は運動学であり、それ以上の情報がわかるものではない。

B.5.1 光のドップラー効果

星が高速で遠ざかっている時、その星から発せらる光は Lorentz 変換の影響を受ける事になる。それは、光のドップラー効果としてよく知られている現象であるし、また観測もされている。基本的には音のドップラー効果と同じであるが、光の場合は媒質がないため音の場合よりもよりシンプルである。星が速度 v で遠ざかっているとし、星から発せられた光の運動量を p とすると地球上で観測される光の運動量 p' は

$$p' = \gamma \left(p - \frac{vE}{c^2} \right) = \gamma \left(p - \frac{vp}{c} \right) = \frac{p \left(1 - \frac{v}{c} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = p \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \quad (\text{B.18})$$

となり、光の運動量は減少している。これを波長で表せば

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \quad (\text{B.19})$$

となるので光の波長は大きくなり、これを赤方偏移 (Red Shift) という。可視光では赤っぽい光は波長が長く、青っぽい光は波長が短いからである。また場の理論で赤外発散、紫外発散という言葉が良く出てくるが、この発散は物理量の運動量積分から来ていて、運動量がゼロの時に積分が無限大になる時赤外発散と呼び、運動量が大い時の発散を紫外発散と呼んでいる。これは単なるネーミングであり、物理的な意味は全く無い。

B.5.2 大気圏で生成された μ -粒子の寿命

大気圏に突入した宇宙線 (高エネルギー陽子) は大気と衝突して μ -粒子 (質量 $m_\mu = 105.6 \text{ MeV}/c^2$) を生成する場合がある。 μ -粒子はその寿命 τ_0 として $\tau_0 \simeq 2 \times 10^{-6}$ 秒程度であり、従ってこれは不安定な素粒子である。ここで

問題は、この寿命は地上の系で変更を受けるのであろうかと言う事である。これは相対性理論関連では昔よく議論された問題の一つでもある。この寿命 τ_0 は崩壊幅 Γ により

$$\tau_0 = \frac{\hbar}{\Gamma} \quad (\text{B.20})$$

と書かれている。この場合、崩壊幅 Γ はローレンツ不変な物理量である。従って、寿命もローレンツ変換に対して変化する事はない。つまりは地上でもこの μ -粒子の寿命は変わらない。

● **μ -粒子の走行距離 L :** ここで μ -粒子の走行距離を計算しよう。その走行距離 L はローレンツ変換の式 $x = \gamma(x' + vt')$ より

$$L = \gamma v \tau_0 \quad (\text{B.21})$$

である。ここでエネルギーが $1 \text{ GeV}/c^2$ の μ -粒子が上空で生成されたとしよう。この時、 $v \simeq c$ であり、また $\gamma \simeq 10.6$ である。従って、この μ -粒子の走行距離 L は

$$L = \gamma v \tau_0 = 10.6 \times 3 \times 10^8 \times 2 \times 10^{-6} \simeq 6.3 \text{ km} \quad (\text{B.22})$$

となっている。この事より、上空で生成された不安定粒子が地上で観測される可能性が充分ある事を確かに示している。

● **加速器実験 :** 大型の加速器によって生成された高エネルギーの不安定粒子の走行距離は良く知られているように、式 (B.21) によって与えられている。そしてこれは実験的にも確かめられている。

B.5.3 相対性理論の適用範囲

理論の模型を作った時に大切な事は、その模型の適用範囲を常にしっかり理解して抑えて置く事である。これはどんな場合でも重要であり、特に相対性理論においてはその適用範囲を吟味しておく必要がある。

● **双子のパラドックス :** 双子のパラドックスのような物理的な観測量が不明瞭な場合は、物理学の議論の対象にはならず、無意味な設問である。しかしそれ以上に、運動系の時計が遅れると言う事はない。このため、双子のパラドックスはそもそもパラドックスにはなっていない。

● **GPS 衛星の系**： 地上で観測できる最速の物体は衛星であろう。しかし例えば GPS 衛星は地球の重力の下で束縛状態になっている。従ってすでに系が指定されており，GPS 衛星の運動が特殊相対論の対象になる事は勿論ない。

● **キネマティクスとダイナミクス**： 相対性理論は「キネマティクス」であり，物理の「ダイナミクス」とは直接の関係はない。しかしどの理論模型も必要なキネマティクスの条件を満たしていなければ模型の意味はない。例えば，どの理論模型も当然 Lorentz 変換に対して不変である必要がある。これが破れていると，系を決めて計算を実行した時，その系ごとに異なった結果が出てしまう事になる。しかしながら，Lorentz 変換に対して不変である模型は，どの系で計算しても物理的な観測量は当然同じになる。従って計算を実行する時はなるべく計算が簡単になるような系を選ぶ事が大切である。

B.6 一般相対論

ここで簡単に一般相対論を解説しておこう．今となっては不要な理論ではあるがしかし相対性原理とどのような点で矛盾しているのかがわかれば，逆に相対性理論をより深く理解できるものと思われる．

B.6.1 一般相対論の方程式

重力場に対する Poisson 型方程式は式 (E.20) のように $\nabla^2 \mathcal{G} = mg\rho_g$ と書かれている．Einstein はこれでは不十分と思い，これを電磁場のようなベクトルかテンソルの方程式に拡張したかったのであろう．このため，計量テンソル $g^{\mu\nu}$ という量を導入する．通常の空間 (Minkowski space) で Lorentz 不変な微分量は $(ds)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$ である．計量テンソルは座標の関数 $g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}(x)$ [$x^\mu = (t, \mathbf{r})$] であり，特に時空の計量として $(ds)^2 = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$ として導入された．ただし，物理的な意味は不明である．通常の Minkowski 空間の場合 $g^{\mu\nu}$ は

$$g^{00} = 1, g^{11} = -1, g^{22} = -1, g^{33} = -1, \text{ それ以外ゼロ}$$

である．

● **Einstein 方程式：** 一般相対論の方程式は

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 8\pi G_0 T^{\mu\nu} \quad (\text{B.23})$$

と書かれている． G_0 は定数である．ここで $R^{\mu\nu}$ は Ricci テンソルとよばれる量で計量テンソル $g^{\mu\nu}(x)$ で書かれている．すなわち，式 (B.23) の左辺は全て $g^{\mu\nu}(x)$ で書かれていて，この計量テンソルが未知関数となっている．

● **エネルギー・運動量テンソル：** $T^{\mu\nu}$ は物質のエネルギー・運動量テンソルと呼ばれるものであり，基本的には物質の質量である．この式 (B.23) は結局のところ質量があったら計量テンソルがこの方程式から決定されると言っているものである．この量を自然現象 (観測量) と関係付ける事は非常に難しい．また「空間の計量に関する観測事実とは何か？」という疑問に答える事はとてもできない事である．従って，この理論には実験的な根拠は何処にもなく，恐らくはそれ以前の問題であり，Maxwell 方程式と好対照をなしている．

B.6.2 一般相対論の問題点

しかし最も深刻な問題は相対性原理との矛盾である。「質量があると計量が変わる」と一般相対論の方程式 (B.23) は主張しているが、この場合の $g^{\mu\nu}(x)$ の座標 $x = (t, \mathbf{r})$ は式 (B.23) からわかるように、物質の全質量の重力中心を原点として測定されている。従って、ある星の計量と他の別の星の計量が異なってしまう、これは最も重要な相対性原理を破っている事に対応している。これは物理学として到底、容認できる事ではない。

- **Gedanken Experiment (思考実験) :** Einstein が理論を作る根拠にしたのが「Gedanken Experiment」である。これは実験から出発した Maxwell 方程式とは異なり、等価原理をその出発点に選んでいる。このため一般相対論は自然界と遊離した理論体系になってしまったのである。科学は常に現象 (実験) から出発してそれを基礎にした理論体系を構築する事が絶対条件である。

- **一般相対論は粒子描像 :** 電磁気学は場の理論であるが、一般相対論は粒子の描像に基づいており場の理論ではない。そもそもここで扱っている「時間・空間」の意味がよくわからない。恐らくは慣性系を記述する時に使った座標系と関係しているものと考えられるが、それは物理量を記述する「言語」であり、自然界とは関係していない。その意味においても、電磁気学は極めて正常で自然界を記述できる正しい理論体系である事を痛感するものである。

- **微分幾何学 :** 一般相対論の方程式は微分幾何学を使っている。これは当時すでに完成されていた数学の理論体系である。しかし数学は「言語」であり数学で表現しようとしている n -次元空間とはあくまでも数学で定義された空間である。実際の現実空間と関係付けられるのは勿論、3次元空間だけである。例えば、1次元空間といってもこれは仮想的なものである。場の理論を本当に1次元空間であるとして解く事は数学的には非常に面白い事であるし、また場の理論の基本的な構造を理解する練習場としては最高である [3]。しかしながら、この1次元場の理論の模型は実際の物理現象との接点はない。

付 録 C 古典力学

力学についても少しだけ解説しておこう．力学に関しては調和振動子と Kepler 問題がしっかり自分で解く事ができればそれで十分である．特に Kepler 問題を何回か自力で解いてみれば力学の本質を理解する事はそれ程難しい事ではない．ここで言葉の解説をしておこう．力学という言葉は Mechanics と Dynamics との両方に使われている．Classical Mechanics は Newton 力学を意味し Quantum Mechanics が量子力学を表している．それに対して Dynamics は通常「動力学」を意味しているが，これは Kinematics (運動学) に対しての言葉である．通常の力学をあえて古典力学という呼び方をするのは量子力学に対しての意味があるものと思う．

古典力学の本質を理解するために，まずは Lagrange 形式を簡潔に解説したい．この形式はもともと使い勝手がよくまた簡単であるために人々が使い始めた理論の手法である．その上，全てにおいて，形式として大変優れているし，現在までの研究ではこの形式に問題点は見つかっていない．それどころか，場の理論も Lagrange 形式を基本として理論を組み立てている．

C.1 古典力学の Lagrange 方程式

古典力学では一般座標という概念を導入するのだが，これは通常のデカルト座標 (x, y, x) に加えて，良く極座標 (r, θ, φ) が使われるからである．Lagrange 方程式とはデカルト座標での Newton 方程式 $m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r})$ を一般座標で書き直したものである．一般座標を $q_i = (q_1, q_2, q_3)$ として Lagrangian を $L(q_i, \dot{q}_i)$ とする時，Lagrange 方程式は

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{C.1})$$

となる．この時 Lagrangian は

$$L = T(q_i, \dot{q}_i) - V(q_i) \quad (\text{C.2})$$

で与えられている。ただし $T(q_i, \dot{q}_i)$ は運動エネルギー $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ を一般座標で書き直したものである。例えば 極座標 ($q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$) だと $T(q_i, \dot{q}_i) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$ となる。

● **一般座標での Newton 方程式：** これはただ単純にひたすら Newton 方程式を一般座標で書き直しただけで簡単な数学だから、以下に示しておこう。まずは、 (x, y, z) から (q_1, q_2, q_3) への変数変換を考える。

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3)$$

であるので、それぞれの座標の時間微分は

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad \dot{y} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial y}{\partial q_i} \dot{q}_i, \quad \dot{z} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial z}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

となる。これより、

$$\frac{\partial x}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial y}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{\partial z}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i = 1, 2, 3)$$

がすぐに求められる。ここで $V = V(x, y, z)$ であり、さらに、次の量 I

$$I \equiv -\frac{\partial V}{\partial q_i} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial q_i}\right) \quad (\text{C.3})$$

を考えてみる。Newton 方程式

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (\text{C.4})$$

より $I = m\left(\ddot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i} + \ddot{y} \frac{\partial y}{\partial q_i} + \ddot{z} \frac{\partial z}{\partial q_i}\right)$ である。よって

$$I = m\left\{\frac{d}{dt}\left(\dot{x} \frac{\partial x}{\partial q_i}\right) - \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\left(\dot{y} \frac{\partial y}{\partial q_i}\right) - \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\left(\dot{z} \frac{\partial z}{\partial q_i}\right) - \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial q_i}\right\}$$

と書き直す事が出来る。さらに $\frac{\partial x}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i}$ 等の式を使って

$$I = m\left\{\frac{d}{dt}\left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\left(\dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\left(\dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial q_i}\right\}$$

と書き直す。これより運動エネルギー $T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ を用いて I は

$$I = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad \text{と書ける。ここでポテンシャル } V \text{ は座標のみの関}$$

数と仮定すると $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$ なので Lagrangian を $L = T - V$ と書けば

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{となり Lagrange 方程式が求まる。}$$

C.1.1 Lagrange 方程式の導出：最小作用の原理

この Lagrange 方程式は作用 $S = \int_{t_a}^{t_b} L(q_i, \dot{q}_i) dt$ を Euler の変分法による $\delta S = 0$ から求める事ができており、実際この方が計算が簡単である。 δS の計算は変分法に従って計算すれば

$$\delta S = \int_{t_a}^{t_b} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = \sum_{i=1}^3 \int_{t_a}^{t_b} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0$$

となる。ここで第 2 項で部分積分を使っており、また $\delta q_i(t_a) = \delta q_i(t_b) = 0$ という変分法の条件を使っている。作用を最小にするためには δq_i の係数がゼロになる必要があり上式の括弧の中がゼロより Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{が得られる。}$$

C.1.2 電子と電磁場の相互作用

Maxwell 方程式を基本法則と考えた時、電子は電磁場とどのような力をおよぼし合うのであろうか？ これは実はゲージ不変性から決定される。しかし電磁気学の Lagrangian を書こうとすると Lagrangian 密度を考える必要がある。それは電磁場が「場」であるからである。電磁場の Lagrangian 密度は後で議論する事にして、ここでは古典力学と電磁場の相互作用を考えて行こう。

● **ゲージ不変性 (古典力学)：** 古典力学において自由電子の Lagrangian は $L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2$ である。この電子が電磁場と相互作用する時、その Lagrangian はゲージ変換に対する不変性を仮定すると次の形に決まる事がわかる。

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + e (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - \phi) \quad (\text{C.5})$$

この Lagrangian はゲージ変換 $(\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi, \phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t})$ により

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + e (\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}' - \phi') - e \frac{d\chi}{dt} \quad (\text{C.6})$$

となり、全微分項 $e \frac{d\chi}{dt}$ は無視できるので、これは確かにゲージ変換に対して不変である。ここで e は定数である。

● **Lorentz 力：** この Lagrangian により電子と電磁場の相互作用は古典力学の範囲で決まった事になる。実際、具体的に計算して運動方程式を求めると

$$m \ddot{\mathbf{r}} = e \mathbf{E} + e \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \quad (\text{C.7})$$

となり Coulomb 力と Lorentz 力が導出される． Lagrange 方程式から上記 (C.7) の運動方程式を求める計算を少し書いておこう． この計算のコツは x -成分だけの計算を行う事である． その結果

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} + eA_x \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\ddot{x} + e \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \right] \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= e \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \dot{y} + \frac{\partial A_z}{\partial x} \dot{z} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]\end{aligned}$$

に注意すれば直ちに運動方程式が求められる． 但し，電場 $\mathbf{E}$ と 磁場 $\mathbf{B}$ はベクトルポテンシャルと $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ で結びついている．

C.2 調和振動子

古典力学の定番問題は調和振動子であり，これはバネの問題でもある． ここでは1次元に限って議論しよう． 何故，調和振動子の問題がよく議論されるのかという疑問に対して，確かにそれには理由がある． 今，ある多体系の問題を考えた時，そのポテンシャルを一体問題に無理やり直すと非常に複雑になる． しかし，この場合，求められた1体のポテンシャル $V(x)$ は何処かで極小になっている場合が大半である． この時，その極小値を与える x を x_0 とすると $V(x)$ は $x = x_0$ の回りで微小振動する場合が最も重要になる． すなわち $V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$ と展開できる事が直ぐに確かめられる． これは力に直したら $F(x) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -V''(x_0)(x - x_0)$ となり，バネの問題そのものである． 以下の計算では $x - x_0$ を x と置き換えて議論する． 勿論，この問題は変位が小さい時のみ成り立っている． ここで $k \equiv V''(x_0)$ とすると力 F は $F = -kx$ と書けるので Newton 方程式は $m\ddot{x} = -kx$ となる． この微分方程式は $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ を導入すると $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ となって覚えやすい形になる． この一般解は $x = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ と書けている． この時， A と B は初期条件により決まる． 例えば，条件として $t = 0$ で $x = 0$ と $\dot{x} = v_0$ とすれば $x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$ と求められる． これから，質点が振動していて，その座標が周期運動をしている事がわかる． その運動の周期 T は $T = \frac{2\pi}{\omega}$ と与えられる． これはグラフを書けば直ぐにわかる．

C.3 Kepler 問題

力学で最も重要な問題は Kepler 問題である。この問題を理解する事が力学を学ぶ意義の大半を占めている。Newton の運動方程式は $m\ddot{\mathbf{r}} = -G\frac{Mm\mathbf{r}}{r^3}$ となる。これをそのまま解くのは結構大変であるが、解法は良く知られている。

● **エネルギー積分**： 上式の両辺に $\dot{\mathbf{r}}$ を掛けると $m\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -G\frac{Mm\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$ となる。これは直ちに变形できて $\frac{m}{2} \frac{d\dot{\mathbf{r}}^2}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{GMm}{r}$ となっておりすでに解けた形になっている。積分定数を E と置くと $E = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{GMm}{r}$ となる。

● **角運動量保存と平面運動**： ここで角運動量 $\mathbf{L}$ を $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}$ と定義すると $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{r} \times G\frac{Mm\mathbf{r}}{r^3} = 0$ となっていて $\mathbf{L}$ は保存量である事がわかる。この $\mathbf{L}$ の方向を z -軸に選ぶと $\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}} = m\mathbf{r} \times \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$ であるから、運動を表す座標 $\mathbf{r}$ は $\mathbf{L}$ と直交している事になる。すなわち運動は $x-y$ 平面となっている。

● **極座標での運動方程式**： 角運動量 $\mathbf{L}$ の方向は z -軸にとっているので、その大きさを $\ell = |\mathbf{L}|$ と置くと 2次元極座標表示では $\ell = |\mathbf{L}| = L_z = mr^2\dot{\varphi}$ となっている。エネルギー E の式は極座標で書くと $E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{GMm}{r}$ となる。ここで、 $\ell = mr^2\dot{\varphi}$ を用いれば

$$E = \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{m^2 r^2} \right) - \frac{GMm}{r} \quad (\text{C.8})$$

となる。これは解析的に解く事ができて、 E がマイナスの場合は確かにこの地球の運動は楕円運動になることが示される。

C.3.1 軌道は楕円： Kepler の第 1 法則

以下にその楕円軌道を導出しよう。保存量としてエネルギー E と角運動量 ℓ がある。今の場合、変数 (r, φ) が時間の関数となっている。ここで $\dot{r} = \dots$ と $\dot{\varphi} = \dots$ の形に書き直し、さらに $\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}$ である事を用いると

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^2}{\ell} \sqrt{2m \left(E + \frac{\alpha}{r} - \frac{\ell^2}{2mr^2} \right)} \quad \text{と書き直す事ができる。}$$

但し, $\alpha = GMm$ を導入した. さらにここで積分を簡単に解ける形にするために $r = \frac{\ell}{s}$ の変数変換をする. そうすると上式は

$$-d\varphi = \frac{\ell ds}{\sqrt{2m \left(E + \alpha s - \frac{\ell^2 s^2}{2m} \right)}} = \frac{ds}{\sqrt{\left(\frac{2mE}{\ell^2} + \frac{2m\alpha}{\ell^2} s - s^2 \right)}} \quad (\text{C.9})$$

ここでルートの中は s の 2 次関数だから, 必ず因数分解した形に書き直す事が出来る. 従って, 上式は $d\varphi = -\frac{ds}{\sqrt{(s-s_1)(s_2-s)}}$ と書かれ, s_1 と s_2 はルートの中をゼロとした時の根であり,

$$s_1 = \frac{m\alpha}{\ell^2} - \sqrt{\left(\frac{m\alpha}{\ell^2} \right)^2 + \frac{2mE}{\ell^2}} \quad (\text{C.10})$$

$$s_2 = \frac{m\alpha}{\ell^2} + \sqrt{\left(\frac{m\alpha}{\ell^2} \right)^2 + \frac{2mE}{\ell^2}} \quad (\text{C.11})$$

で与えられる. この積分は $\boxed{s = s_1 + (s_2 - s_1) \sin^2 u}$ と変数変換すると直ちに出来てしまい, 答えは $\varphi_0 - \varphi = 2u$ である. u を s に戻し, さらに s を r に戻して, 後は細かい係数を入れると

$$r = \frac{A}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \quad (\text{C.12})$$

と書ける. 但し, 積分定数 φ_0 をここでは $\varphi_0 = \pi$ と取っている. また A と ε は $\boxed{A = \frac{\ell^2}{m\alpha}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{m\alpha^2}}}$ と与えられている. よって E が負の時 $\boxed{\varepsilon < 1}$ となるので, 確かに軌道が楕円である事がわかる.

C.3.2 面積速度一定 : Kepler の第 2 法則

Kepler 問題には面積速度一定の法則がある. これは角運動量保存則そのものである. それは簡単で, 楕円における微小面積は $\Delta S = \frac{1}{2} r^2 \Delta \varphi$ と書けるので, 面積速度は $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}$ となる. ところが, $\ell = mr^2 \dot{\varphi}$ なので

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\ell}{2m} \quad (\text{C.13})$$

となり面積速度一定が導かれる.

C.3.3 周期 2 乗が長半径 3 乗に比例 : Kepler の第 3 法則

Kepler 問題には周期の 2 乗が長半径の 3 乗に比例するという法則がある. 楕円の長半径 a と 短半径 b は平面幾何の問題を解けば求める事ができて

$$a = \frac{A}{1-\varepsilon^2}, \quad b = \frac{A}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \quad \text{で与えられる. また楕円の面積 } S \text{ は } S = \pi ab \text{ である.}$$

一方, 面積速度の式を全体で一周するとこれが周期 T に対応するので

$$S = \pi ab = \frac{\pi A^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \pi \sqrt{A} a^{\frac{3}{2}} = \frac{\ell}{2m} T \quad (\text{C.14})$$

となり $T^2 \propto a^3$ という Kepler の第 3 法則が示されている.

● **直接積分による周期計算 :** 周期 T は積分を直接行っても当然求められる. それは $\dot{\varphi} = \frac{\ell}{mr^2}$ を周期 T に渡って積分すれば得られる.

$$\frac{\ell}{m} \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = A^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} d\varphi \quad (\text{C.15})$$

この積分は積分公式を参照するか, または ε で展開する事により直ちに計算されて

$$\frac{\ell}{m} T = \frac{2\pi A^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{C.16})$$

となり, 幾何学的に求めた結果と一致している.

C.4 銀河の衝突

銀河間の衝突力学は重力ポテンシャル中の運動であり、しかもそれが1次元運動であるという特殊な問題になっている．ここではアンドロメダと天の川銀河の衝突が起こる時期を計算しよう．Newton 方程式は $\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^2} \mathbf{e}_r$ であるが衝突は1次元なのでこれは $\ddot{x} = -\frac{G(M+m)}{x^2}$ と書ける．ここで G は重力定数， M ， m はそれぞれの銀河の質量， r は2個の銀河間の相対距離である．ここで $M+m$ が現れたのは、2個の銀河の質量が近いので換算質量を導入したからである．この式のエネルギー積分を行うと $\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{G(M+m)}{x} = \varepsilon$ となり， ε は積分定数である．ここで衝突するまでの時間 T は

$$T = \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{2\varepsilon + \frac{2G(M+m)}{x}}}$$

となる．この積分は $x = \left(-\frac{G(M+m)}{\varepsilon}\right) \sin^2 \theta$ と置くと簡単に解けて

$$T = \frac{1}{\sqrt{-2\varepsilon}} \left(-\frac{G(M+m)}{\varepsilon}\right) \left\{ (\theta_0 - \theta_1) - \frac{1}{2}(\sin 2\theta_0 - \sin 2\theta_1) \right\} \quad (\text{C.17})$$

と求まる．但し， ε は負である．現在，アンドロメダは天の川銀河に 1.2×10^5 m/s の速さで近づいている．よって初期条件として $t=0$ で $v_0 = 1.2 \times 10^5$ m/s を取る．さらに銀河間の距離 L が $L \simeq 2.5 \times 10^6$ 光年であり，また銀河のサイズが約 1.2×10^5 光年なので $\sqrt{-2\varepsilon} = 1.4 v_0$ と $-\frac{G(M+m)}{\varepsilon} = 3.8 \times 10^6$ 光年 が求まる．これより $x_0 = 2.5 \times 10^6$ 光年と $x_1 = 1.2 \times 10^5$ 光年が求まり，従って $\theta_0 = 0.94$ と $\theta_1 = 0.18$ である．これらの値を式 (C.17) に代入すると計算結果は $T \simeq 30$ 億年 となっている．よって約30億年後には二つの銀河は融合する．

次に，2個の銀河が互いの重力圏に突入した時期を評価してみよう．ここでは銀河間の相対速度がゼロの時に「何か」が起こり，互いの重力圏に入り始めたと仮定する．その場合，「何か」が起こった時期の計算は上の計算と同じで初期条件のみ変えれば良い．今の場合，重力圏に入り始めた距離を R とすると $R = 1.5 x_0$ となるので， $\theta_R = \frac{\pi}{2}$ となっている．その結果， $T \simeq 69$ 億年である事がわかり，これは今から約69億年前に「何か」が起こった事に対応している．

付 録 D 統計物理学

統計物理学では何が計算出来るのかをしっかりと理解する事が最も大切であり、その主要目的は考えている系の分配関数を計算する事である。すなわち、

$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}, \quad \beta = \frac{1}{kT}$ を求める事が最も重要である。それは分配関数が

わかっていれば、物理的な観測量が基本的には計算可能であるからである。ここで E_n は状態 n におけるエネルギー固有値であり、一般的にはこの量子数 n は非常に複雑である。固有状態がわかると例えばエネルギーの平均 $\langle E \rangle$ は

$\langle E \rangle = \frac{\sum_n E_n e^{-\beta E_n}}{Z} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z$ となる事はすぐに計算できる。逆に言えば

E_n がどの様に計算されて求められているかが重要な問題になる。そしてこれは量子力学のエネルギー固有値問題を解く事によって得られる。その意味では「統計力学」という力学があるわけではなく、むしろ量子力学の結果を正確に理解している事の方が統計物理学には有用である。

D.1 分布関数

統計物理学における観測量は平均値 (アンサンブル・アベレージ) である。従って、どの分布関数で平均するのかと言う事だけが物理的な興味である。実際には分布関数としてカノニカル分布が決まってしまうので、その意味においては統計物理学は単純明快である。

D.1.1 ミクロカノニカル集団

まず、ミクロカノニカル集団を考えて、その状態数を $W(E_t)$ としよう。この時、 E_t はその孤立系の全エネルギーである。この系の中で、微小な部分を考えて、その微小部分のエネルギーを E とする。この時、この微小部分が実現される確率 $p(E)$ は

$$p(E) = \frac{W(E_t - E)}{W(E_t)} = \exp [\ln(W(E_t - E)) - \ln W(E_t)]$$

で与えられる。exp 化したのは、この後、カノニカル分布が導出される事を予想しているためである。ここで重要な事は「微小部分の実現される確率 $p(E)$ の計算において $W(E)$ の関数形が E_t と $E_t - E$ で同じである」と言う仮定である。これは恐らくは E が E_t と比べて十分小さいと仮定している事から正当化されるものと考えてよい。

D.1.2 カノニカル分布

E は微小量であるためその状態数が $W(E)$ で与えられるとは限らない。 $W(E_t - E)$ はその関数形として $W(E_t)$ と同じと仮定して十分意味があると考えられるが、これと $W(E)$ は全く別物である可能性が高い。実際問題として微小部分の状態数は $W(E_t)$ の関数形からは予想出来ないと言う事である。今、 E が E_t と比べて十分小さいので展開すると

$$\begin{aligned} p(E) &\simeq \exp \left[\ln \left(W(E_t) - \left(\frac{\partial W(E)}{\partial E} \right)_{E=E_t} E \right) - \ln W(E_t) \right] \\ &\simeq \exp \left[- \left(\frac{\partial \ln W(E)}{\partial E} \right)_{E=E_t} E \right] \end{aligned} \quad (D.1)$$

となる。これから見ても、確かに分布関数は $p(E) \simeq \exp[-aE]$ の形をしており、これがカノニカル分布に対応している。この時、観測されているカノニカル分布と一致するとするならば $a = \frac{1}{kT} = \frac{\partial \ln W(E)}{\partial E}$ である事がわかる。

D.2 エントロピー

この分布関数を熱力学に結びつける事を考える。熱力学の基本方程式は $TdS = dE + pdV$ であり、熱力学の第一法則である。この式と数学の微分公式より $dS = \frac{1}{T}dE + \frac{p}{T}dV = \frac{\partial S}{\partial E}dE + \frac{\partial S}{\partial V}dV$ となりこれより $\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}$ である事がわかる。従って、 $\frac{\partial \ln W(E)}{\partial E} = \frac{1}{kT}$ と比較すると $S = k \ln W$ の関係式が予想される。即ち、統計物理において分布関数がカノニカル分布である事を要求し、さらにその係数 a は熱力学の公式から予測される $\frac{1}{kT}$ と同じであるとするとエントロピーが状態数の Log に比例する事がわかるのである。

D.2.1 エントロピーと観測量

この時, S のエネルギー依存性を考える事が重要である. 即ち,

$$S(E_t) = k \ln W(E_t)$$

におけるエネルギー E はミクロカノニカルなエネルギー E_t である. 従って, S 自体は物理的な観測量に直接は結びつかない. 観測量に結びつくのは S の変化分 ΔS つまりその微分値のみである. 従って, エントロピーの取り扱いには十分な注意深さが必要であり, 余程しっかり考えないと間違える事になる. 特に, カノニカル集団でエントロピーを扱う時はその微分値のみが意味がある事に注意しなければならない. 統計物理学においてはエントロピー自体が観測量に直接に結び付けられる事はない.

D.3 スピンと統計

粒子のスピンの整数の場合, その統計はボーズ統計であるとどの教科書にも書いてある. これは本当だろうか? 例えば重い原子系のボーズ凝縮の実験ではその全体のスピンの整数の時にボーズ凝縮が起こっていると言われている. しかし原子系の物性は電子の振る舞いにより決定されている. 原子核のスピンの影響する事はまずあり得ない. それはスピン・スピン相互作用はかなりの短距離力である事がわかっているからである. もしある原子系でボーズ凝縮が起こったと考えたならば, 原子核の中性子を一つ増やしたアイソトープに関しても実験してみて, 今度は全スピンの半整数だからボーズ凝縮が起らないことを証明する必要がある. しかし, このような現象は現実離れしている. 原子核のスピンの影響するような現象は, 余程強い磁場をかけたりしない限り現われる事はない.

D.3.1 フォトンとボーズ統計

フォトンは確かにスピンの1であり, これはボーズ統計に属している. Planck の黒体輻射の公式もフォトンがボーズ粒子であると仮定して求められているし, 実験的にもフォトンがボーズ統計に属するとして全く矛盾がない. しかしながら, 基本粒子で整数スピンを持っているのはフォトンだけである. 他のボーズ粒子と言っているのは全て複合粒子である. 本当に整数スピンとボーズ統計が対応しているのだろうか? さらに言えば, フォトンのスピンは確かに1

であるが、しかしフォトンのスピンはスピン角運動量の性質は待っていないくスピン演算子の固有値とはなっていないのである。フォトンの偏極ベクトルは空間回転に対してランク1のテンサーとして振舞うので、そのスピンは1であるとして全く矛盾はない事も事実である。また電磁場を量子化する時に交換関係を用いて実行して矛盾がないので確かにフォトンにはボーズ粒子である。しかし、それ以上の事は良くわからない。

D.3.2 フェルミ統計

電子や核子などのフェルミオンは確かにフェルミ統計に属している。これはパウリ原理として良く知られているし、実験的にも疑う余地はない。Dirac方程式から始まって、フェルミオン場を反交換関係で量子化するとこのパウリ原理はしっかり理解できるものである。むしろ、ここには理論と実験の矛盾はないし概念的にも理解されている。しかし、これは基本粒子に対してのみ言える事であり、複合粒子に対しては成り立たない事である。

D.3.3 複合粒子のスピンと統計

それでは、原子系の統計とは何であろうか？本当に原子系の全スピンの統計に影響するのであるか？これに対する理論的考察は皆無に近い。人々が疑う事無くスピンと統計をこれまでは信じてきた。問題ははっきりしていて、まだ信頼できる実験が何処にも無いと言う事である。さらに理論模型を作るにしても、複合系を考える場合、それが複合系である事がわかるような現象は統計力学では処理できないのである。統計力学と言っても、ダイナミックスそのものを扱っているわけではなく、状態関数によって指定されるエネルギーを分布関数に入れて平均操作をする事が統計力学のすべてであり本質である。従って複合粒子の内部構造を考える必要があるような物理現象に対しては統計力学では扱えないと言う事である。実験的にわかっている現象としては、 ^3He と ^4He の超流動の実験がある。この2つは質量が25%も違うので、その意味では2つの振る舞いに実験的な影響が出てきても不思議ではない。しかし、現実はその程大きな差は無く、この両者の全スピンの整数か半整数かによる違いは観測されていない。すなわち、基本的な物性は当然電子によって決められているのである。

付 録 E 古典場の理論

電磁場は場の理論であるが、Schrödinger 方程式も Dirac 方程式も共に場の理論として同じ Lagrange 形式で記述されている．ここではそれらの場を Lagrangian 密度の言葉で書き、それに対応する方程式を求めてゆく．場の量子化に関しては第 15 章で簡単な解説をしているが、量子場の理論の詳しい物理 (例えば対称性の破れなど) は場の理論の教科書 [1, 2, 3, 4, 7, 8] を参考にして欲しい．なお以下の議論では簡単のために自然単位系 ($c = 1$, $\hbar = 1$) を採用している．

E.1 場の方程式と Lagrangian 密度

場における Lagrange 方程式の導出は古典力学の場合と同様で作用 S を $S = \int \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, \psi^\dagger, \partial_\mu \psi^\dagger) d^4x$ と定義してこれを最小にする事である．まず ψ に対して変分を行うと

$$\delta S = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta (\partial_\mu \psi) \right] d^4x = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) \right] \delta \psi d^4x = 0$$

となる．上式では一度部分積分を行い、さらに境界での 3 次元表面積分はゼロであるとした．これは $\psi^\dagger$ に対しても同様である．これより、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\dagger} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^\dagger)} \right) \quad (\text{E.1})$$

となり、確かに場 ψ に対する Lagrange 方程式が求められたのである．

• **Bjorken-Drell のメトリック：** ここで μ が 2 回繰り返して出てきた時は $\mu = 0, 1, 2, 3$ の和を取るものと仮定されている．また 4 次元微分演算子を

$$\partial_\mu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (\text{E.2})$$

と定義しているが、これは単純に便利だからである．ここで 4 元ベクトルを

$$x^\mu = (t, \mathbf{r}), \quad x_\mu = (t, -\mathbf{r}), \quad p^\mu = (E, \mathbf{p}), \quad p_\mu = (E, -\mathbf{p}) \quad (\text{E.3})$$

とする時, 4次元内積の定義 $A_\mu B^\mu \equiv A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3$ より

$$x_\mu x^\mu = t^2 - \mathbf{r}^2, \quad p_\mu p^\mu = E^2 - \mathbf{p}^2, \quad x_\mu p^\mu = tE - \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \quad (\text{E.4})$$

となり, これは Lorentz 変換に対して不変である. この表記は Bjorken-Drell の教科書で導入され, 今はほとんどの場の理論の教科書で使われている [7].

E.2 Schrödinger 場

Schrödinger 場は非相対論的なのに, 何故, 相対論的な表記で書けるのかと思われるかも知れない. しかし実は相対論か非相対論かの差はほとんど無く, ダイナミックスを議論する時に重要になるだけである. 従って非相対論の場の理論に慣れておくと相対論的な場の理論の理解に役立つ. 特に量子力学に対する正しい直感があると相対論的な場の理論を正確に理解する事ができる.

E.2.1 Lagrangian 密度と Lagrange 方程式

Schrödinger 場の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2m} \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_k} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \psi^\dagger V \psi \quad (\text{E.5})$$

となっている. ここで, ポテンシャル V は外場として導入している. この時, k が2回繰り返して出てきた時は, 和を意味しており, $k = 1, 2, 3$ の和が取られるものと仮定されている. この時 Lagrange 方程式は

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \psi}{\partial t})} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\frac{\partial \psi}{\partial x_k})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}$$

となる. また, $\psi^\dagger$ に対しても同様の方程式が求まる.

• **量子力学の Lagrange 方程式:** この式から場に対する方程式を求めると

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} \nabla^2 - V(r) \right) \psi(t, \mathbf{r}) = 0 \quad (\text{E.6})$$

となり, Schrödinger 方程式が求められる.

E.2.2 Hamiltonian 密度

Lagrangian 密度から Hamiltonian 密度を作る事が出来る．何故，Hamiltonian 密度を作るかと言う問題であるが，実は Lagrangian 密度において並進対称性を要求すると下記に定義するエネルギー・運動量テンソル $T^{\mu\nu}$

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \partial^\nu \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi^\dagger)} \partial^\nu \psi^\dagger - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \quad (\text{E.7})$$

が保存量になるからである．すなわち $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ が証明され， $T^{\mu\nu}$ が保存量である事を示している．ここで Hamiltonian 密度として

$$\mathcal{H} \equiv T^{00} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} \partial_0 \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi^\dagger)} \partial_0 \psi^\dagger - \mathcal{L} \quad (\text{E.8})$$

を定義し，さらに Schrödinger 場の Lagrangian 密度を代入して全空間で積分すれば Hamiltonian

$$H \equiv \int \mathcal{H} d^3r = \int \left[\frac{1}{2m} \nabla \psi^\dagger \cdot \nabla \psi + \psi^\dagger V \psi \right] d^3r \quad (\text{E.9})$$

が得られ，確かに保存する物理量である．ここで部分積分を用いて上式を書き直すと $H = \int \left[-\frac{1}{2m} \psi^\dagger \nabla^2 \psi + \psi^\dagger V \psi \right] d^3r$ となり，これは通常の Schrödinger 方程式の Hamiltonian を波動関数 ψ で期待値を取った式と一致している．

E.2.3 場の Hamiltonian

量子力学では $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r)$ を Hamiltonian と呼んでいる．これは古典力学から導出された名残と言って良く，実際，この H_0 に対応する電磁場の Hamiltonian は存在しない．これらの式から明らかなように，量子力学の Hamiltonian H_0 を状態 ψ で期待値をとれば Schrödinger 場の Hamiltonian が求められている．

E.3 量子電磁力学の Lagrangian 密度

少し難しい記述になるが、現在最も信頼されている場の理論である Dirac 場と電磁場の全 Lagrangian 密度を議論しよう。これが量子電磁力学である。

E.3.1 Dirac 場の Lagrangian 密度

質量 m を持つ質点に対する自由 Dirac 場の Lagrangian 密度は

$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\partial_\mu\gamma^\mu - m)\psi$ で与えられる。ここで

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{r}, t) \\ \psi_2(\mathbf{r}, t) \\ \psi_3(\mathbf{r}, t) \\ \psi_4(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}, \quad \psi^\dagger(\mathbf{r}, t) = (\psi_1^\dagger(\mathbf{r}, t), \psi_2^\dagger(\mathbf{r}, t), \psi_3^\dagger(\mathbf{r}, t), \psi_4^\dagger(\mathbf{r}, t))$$

であり、また $\bar{\psi}$ は $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ と定義されている。 γ^μ はガンマ行列であり、Dirac 表示という割合良く使うガンマ行列の表現で具体的に書くと、

$$\gamma^\mu = (\gamma_0, \boldsymbol{\gamma}), \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

である。この時、質量 m を持つ自由なフェルミオンの Dirac 方程式は

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} - m\beta\right)\psi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (\text{E.10})$$

と書かれている。但し $\beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ である。

E.3.2 Dirac 方程式の自由粒子解

Dirac 方程式は ψ を自由粒子解として

$$\psi_s(\mathbf{r}, t) = u_{\mathbf{p}}^{(s)} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-iEt + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \equiv \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-iEt + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}} \quad (\text{E.11})$$

と仮定する。 ζ_1 と ζ_2 は 2 成分スピノルである。これを式 (E.10) に代入すると

$$\begin{pmatrix} -m + E & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & m + E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{E.12})$$

となりこの行列式がゼロであるという条件より $E = \pm\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ と求まる。

• **スピノル解：** これを式 (E.12) に代入すると規格化されたスピノル解 $u_{\mathbf{p}}^{(s)}$ と $v_{\mathbf{p}}^{(s)}$ が求まり

$$u_{\mathbf{p}}^{(s)} = \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2E_{\mathbf{p}}}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \chi_s \end{pmatrix}, \quad v_{\mathbf{p}}^{(s)} = \sqrt{\frac{E_{\mathbf{p}} + m}{2E_{\mathbf{p}}}} \begin{pmatrix} -\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_{\mathbf{p}} + m} \chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix} \quad (\text{E.13})$$

となる。但し $u_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger} u_{\mathbf{p}}^{(s)} = v_{\mathbf{p}}^{(s)\dagger} v_{\mathbf{p}}^{(s)} = 1$ 。ここで $\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}$ (但し $\mathbf{n}$ は整数) $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ である。 χ_s はスピンの固有関数を表し、 $s = \pm\frac{1}{2}$ である。

• **負のエネルギー解の物理：** $v_{\mathbf{p}}^{(s)}$ が負のエネルギー状態 $E = -\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ のスピノル解でありこれは物理的に意味がある状態として現われている。それは E が固有値であるからである。しかし負のエネルギー状態の存在はそのままでは問題が起こる。それは正のエネルギー状態は必ず負のエネルギー状態に遷移してしまう現象が起こってしまうからである。この困難を克服するために Dirac は「物理的真空」を新しく定義した。その物理的真空とは負のエネルギー状態はすべて詰まっているという仮定である。こうすると Pauli 原理のため物理的真空は安定となっている。

E.3.3 電磁場の Lagrangian 密度

電磁場の Lagrangian 密度 $\mathcal{L}_{EM}$ は

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\text{E.14})$$

で与えられる。ここで $F^{\mu\nu}$ は場の強さと呼ばれるもので $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ と書いており、ゲージ場は $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$ である。この $F^{\mu\nu}$ を具体的に書くと

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.15})$$

となっていて、これは電場と磁場を表している。

• **ゲージ変換：** この $F^{\mu\nu}$ は次のゲージ変換

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \chi(t, \mathbf{r})}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla} \chi(t, \mathbf{r}) \quad (\text{E.16})$$

に対して変わらない．またゲージ場に対する方程式は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (\text{E.17})$$

である．これは Maxwell 方程式をベクトルポテンシャルで書いた式に対応している．ただし， $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$ の場合である．

E.3.4 量子電磁力学の全 Lagrangian 密度

電磁場と Dirac 場が相互作用する場合，その全 Lagrangian 密度はゲージ不変性と矛盾しない形で決められている．Dirac 場と電磁場の相互作用まで入れた全 Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\partial_\mu\gamma^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi - e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi A^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (\text{E.18})$$

で書けている．この Lagrangian 密度はゲージ変換 $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu\chi$, $\psi' = e^{-ie\chi}\psi$ に対して不変である事が容易に確かめられる．これが量子電磁力学 (QED) の Lagrangian 密度である．

E.4 重力場の Lagrangian 密度

重力を入れた理論を考える時，量子電磁力学の理論体系にこの重力の相互作用を組み入れる事が自然である．重力場はゲージ理論では不可能であるが，その理由はゲージ理論だと粒子間の相互作用は必ず斥力と引力の両方が現れてしまうからである．しかし重力理論は引力のみである事がわかっており，ゲージ理論は適していない．それでは重力場はどのような場なら常に引力を与えるのであろうか？実はこの答えは非常に簡単で重力場が「スカラー場」であれば，その場を媒介した相互作用は常に引力になっている．

E.4.1 Lagrangian 密度

ここで具体的な Lagrangian 密度を書いておこう．質量 m を持つ質点 ψ が電磁場 A^μ と重力場 $\mathcal{G}$ と相互作用する場合の Lagrangian 密度は

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - m(1 + g\mathcal{G})\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\mathcal{G}\partial^\mu\mathcal{G} \quad (\text{E.19})$$

と与えられている．ここで $\mathcal{G}$ は質量のないスカラー場である．この Lagrangian 密度によりすべての物理的な観測量は矛盾なく記述されている．

E.4.2 重力場の方程式

上記の Lagrangian 密度が決められると、重力場に対する方程式は Lagrange 方程式から求められる。この方程式は時間によっている方程式になっているが、外場である物質場が時間によらない場合は、一般に静的近似をする事が出来る。この場合、重力場 $\mathcal{G}$ に対する方程式は

$$\nabla^2 \mathcal{G} = mg\rho_g \quad (\text{E.20})$$

と求められる。この時、 $m\rho_g$ は物質の密度に対応する。結合定数 g は重力定数と $G = \frac{g^2}{4\pi}$ により結びついている。これは、基本的には重力場に対する Poisson 型方程式になっていて、確かに観測されている重力場を再現できている。

E.4.3 重力場中の Dirac 方程式

全 Lagrangian 密度が求められたので量子電磁力学と重力に関する議論はすべてこの Lagrangian 密度から行う事ができる。ここでは重力関係だけを取り扱おう。この Lagrangian 密度から質量 m の質点に対して、重力場がある時の Dirac 方程式は

$$\left[-i\nabla \cdot \boldsymbol{\alpha} + \left(m - \frac{GmM}{r} \right) \beta \right] \Psi = E\Psi \quad (\text{E.21})$$

である。 M は重力中心の質量であり、座標系は質量中心を原点にしている。

E.4.4 重力場中の Dirac Hamiltonian の非相対論近似

重力場中の Dirac 方程式の Hamiltonian は

$$H = \hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \left(m - \frac{GmM}{r} \right) \beta \quad (\text{E.22})$$

で与えられる。この Hamiltonian を Foldy-Wouthuysen 変換して、非相対論的な Hamiltonian を求める事は難しい事ではない。この Foldy-Wouthuysen 変換はユニタリー変換なので常に信頼できる。その結果だけ書くと、

$$H = m + \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{GmM}{r} + \frac{1}{2m^2} \frac{GmM}{r} \hat{\mathbf{p}}^2 - \frac{1}{2m^2} \frac{GMm}{r^3} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{L}) \quad (\text{E.23})$$

となる．古典近似をした後のポテンシャルは因数分解仮説と Virial 定理

$$\begin{aligned} \text{因数分解仮説：} \quad & \left\langle \frac{1}{2m^2} \frac{GmM}{r} \hat{\mathbf{p}}^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2m^2} \frac{GmM}{r} \right\rangle \langle \hat{\mathbf{p}}^2 \rangle \\ \text{Virial 定理：} \quad & \left\langle \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{m} \right\rangle = -\langle V \rangle \end{aligned}$$

により最終的な重力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2} \left(\frac{GmM}{r} \right)^2 \quad (\text{E.24})$$

となる．

E.5 重力理論：付加ポテンシャルの物理

水星の近日点移動の問題は Einstein がその解決を一般相対論により試みた事でもよく知られている．実際，水星の近日点移動の観測値は通常の重力より他に何かある可能性を示唆している．ここで新しい重力項が

$$V(r) = -\frac{GmM}{r} + \frac{1}{2mc^2} \left(\frac{GmM}{r} \right)^2 \quad (\text{E.25})$$

と表せられる事は重要である．この場合 Newton 方程式は

$$m\ddot{r} = -\frac{GmM}{r^2} + \frac{\ell^2}{mr^3} + \frac{G^2M^2m}{c^2r^3} \quad (\text{E.26})$$

である．ここで新しく擬角運動量 L を $L^2 \equiv \ell^2 + \frac{G^2M^2m^2}{c^2}$ と定義し，さらに角速度 ω と R を $\omega \equiv \frac{\ell}{mR^2}$, $R \equiv \frac{\ell^2}{GMm^2(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{4}}}$ と定義する． ε は離心率を表す．また， ω と関係して $\Omega^2 \equiv \omega^2 + \frac{G^2M^2}{c^2R^4} \equiv \omega^2(1+\eta)$ と定義する． η は $\eta = \frac{G^2M^2}{c^2R^4\omega^2}$ である．この時，軌道を与える式は $r = \frac{A}{1+\varepsilon \cos\left(\frac{L}{\ell}\varphi\right)}$ となる．ここで A と ε は $A = \frac{L^2}{GMm^2}$, $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{m(GmM)^2}}$ で与えられる．物理的な観測量は $\dot{\varphi} = \frac{\ell}{mr^2}$ を周期 T に渡って積分する事により得られる．

$$\frac{\ell}{m} \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = A^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\left(1 + \varepsilon \cos\left(\frac{L}{\ell}\varphi\right)\right)^2} d\varphi \quad (\text{E.27})$$

これは直ちに計算されて $\omega T = 2\pi(1+2\eta)(1-\varepsilon\eta) \simeq 2\pi\{1+(2-\varepsilon)\eta\}$ となる．ここで ε は十分小さいと仮定しているが厳密解も知られている．これより新しい重力項により引き起こされる効果は周期が少しずれる事を示し

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{th} \simeq (2-\varepsilon)\eta \quad (\text{E.28})$$

と書くことが出来る．この式から分かるように周期が増えており，これは確かに時間の遅れに対応している．

E.5.1 水星の近日点移動の観測値

水星の近日点移動の観測値はもともとは角速度 ω で測定されたものと考えられているが，現在は角度のズレとして使われている．この時，角度のズレの観測値は $\Delta\theta \simeq 42''$ per 100 year である．水星の周期は 0.24 年である事から，一周回る毎での近日点移動比 $\delta\theta$ は

$$\delta\theta \simeq \frac{42}{3600} \times \frac{1}{360} \times \frac{0.24}{100} \simeq 7.8 \times 10^{-8} \quad (\text{E.29})$$

となる．これは角速度 ω で測定されたとしたならば，このズレは角速度 ω の進みに対応している．その意味で人々は水星の近日点移動を進みと解釈したものと考えられる．一方，理論計算の方は

$$\eta = \frac{G^2 M^2}{c^2 R^4 \omega^2} \simeq 2.65 \times 10^{-8} \quad (\text{E.30})$$

となる．ここで，水星の軌道半径と太陽質量は $R = 5.73 \times 10^{10}$ m, $M = 1.989 \times 10^{30}$ kg である事を用いている．これより理論の近日点移動比 $\delta\theta_{th}$ は

$$\boxed{\delta\theta_{th} \equiv \left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_{th} \simeq 4.8 \times 10^{-8}} \quad \text{となり観測値と良く一致している.}$$

E.5.2 GPS 衛星の遅れ

GPS 衛星は地球の周りを一日に2回周回しているように軌道が設定されているため周期は半日である．このGPS衛星の場合のデータは

$R = 2.6561 \times 10^7$ m, $M = 5.974 \times 10^{24}$ kg, $\omega = 1.4544 \times 10^{-4}$ と与えられているので $\eta = \frac{G^2 M^2}{c^2 R^4 \omega^2} \simeq 1.69 \times 10^{-10}$ となる．従って，GPS衛星の時間の遅れは

$$\boxed{\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{th} \simeq 3.38 \times 10^{-10}} \quad \text{である.}$$

● **GPS 衛星の観測値：** GPS 衛星の内蔵時計は毎秒 100 億分の 4.45 秒 だけ遅れるように補正されている [9]. これは $\left(\frac{\Delta T}{T}\right) \simeq 4.45 \times 10^{-10}$ だけ遅らせるように設定されている事に対応している. 但し, 衛星の時計をこの量だけ遅らせたのは一般相対論の効果とされているが, その計算の理論的根拠は不明である. 通常的一般相対論による周期のズレの計算では $\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{GR} \simeq 0.10 \times 10^{-10}$ となり, これよりもはるかに小さい値である. この内蔵時計で採用されている遅れの値 (100 億分の 4.45 秒) は理論値より 30% 大きいだけであり, 確かに大雑把な遅れをうまく表現している. さらに言えばこの補正が 30% 程大きすぎるため, 地上でも補正せざるを得ないものとなっている.

● **GPS 衛星軌道のズレ：** 今, GPS 衛星の角度のズレの式は $\Delta\theta = 2\pi(2-\varepsilon)\eta$ である. これより 1 年間で GPS 衛星のズレを 地上 で測ったとすると $\Delta\ell_{GPS \text{ (one year)}} = \Delta\ell \times 2 \times 365.25 \simeq \span style="border: 1px solid black; padding: 0 2px;">9.93 \text{ m} だけ遅れる事になる.$

E.5.3 地球公転の遅れ：うるう秒

地球公転の場合, 軌道半径 R , 太陽の質量 M それと角速度 ω はそれぞれ $R = 1.496 \times 10^{11} \text{ m}$, $M = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$, $\omega = 1.991 \times 10^{-7}$ である. 重力の付加ポテンシャルによる周期のズレは $\frac{\Delta T}{T} = (2-\varepsilon)\eta \simeq 1.981 \times 10^{-8}$ である. 従って 1 年間における地球公転周期は

$$\Delta T_{Orbital \text{ Motion}} = 0.621 \text{ s/year} \quad (\text{E.31})$$

だけ大きくなっているため, これは確かに遅れになっている. 従って, この事はうるう秒の補正が必要である事を示している.

● **うるう秒の観測値：** 実際, うるう秒の補正は 1972 年 6 月から始まりこれまで 40 年間に 25 秒補正している. 従って 1 年間での観測値は

$$\Delta T_{Orbital \text{ Motion}}^{Obs} \simeq 0.625 \pm 0.013 \text{ s/year} \quad (\text{E.32})$$

である. これは式 (E.31) の理論値と完全に一致している. うるう秒の起源は地球の公転運動から Newcomb が定義した正確な秒時間と原子時計による精密測定による秒時間が少しずつれている事からきている [10]. これは重力の付加ポテンシャルの影響そのものである.

E.5.4 月の後退

月も付加重力ポテンシャルの影響を受けている．ここでは、このズレの量が月の軌道の後退と関係している事を示し観測量と比較しよう．

● **月の軌道のズレ**： 月の軌道の場合もズレを表す式はおなじである．月の場合、軌道半径 R_m 、地球の質量 M それと角振動数 ω はそれぞれ

$R_m = 3.844 \times 10^8 \text{ m}$, $M = 5.974 \times 10^{24} \text{ kg}$, $\omega = 2.725 \times 10^{-6}$ である．これより $\boxed{\frac{\Delta T}{T_0} = (2 - \varepsilon)\eta \simeq 2.14 \times 10^{-11}}$ となる．今、月の軌道のズレの計算を行う．まず角度のズレの式は $\frac{\Delta \theta}{2\pi} = \frac{\Delta T}{T_0} = (2 - \varepsilon)\eta$ だから、軌道のズレ $\Delta \ell_m$ は1周期につき $\Delta \ell_m = R_m \Delta \theta \simeq 0.052 \text{ m}$ となる．よって1年間で月のズレは $\Delta \ell_m (\text{one year}) = \Delta \ell_m \times \frac{3.156 \times 10^7}{2.36 \times 10^6} \simeq 69.5 \text{ cm}$ だけ軌道が遅れる．

● **月の後退: 観測量**： 月の軌道は楕円なのでこの軌道のズレは後退したように見える部分がある．軌道の式は $r = \frac{R_m}{1 + \varepsilon \cos \theta}$ で与えられるとして十分である．今、月の場合、離心率 ε は十分小さいので上の式を ε で展開すると $r \simeq R_m(1 - \varepsilon \cos \theta)$ となる．従って、軌道のズレ Δr は $\theta \simeq \frac{\pi}{2}$ の時を見ると1年間では $\Delta r \simeq R_m \Delta \theta \varepsilon \simeq \Delta \ell_m (\text{one year}) \varepsilon \simeq 3.8 \text{ cm}$ となっている．これは月の後退の観測値 $\Delta r_m^{obs} \simeq 3.8 \text{ cm}$ と完全に一致している [11]．

付 録 F 物理の数学

F.1 座標系

座標系は数学の基本である．座標系を導入する事により様々な記述が可能になり，言語としては最高に便利なものである．

● **直交座標 (デカルト座標)** : 座標系の基本は直交座標 (x, y, z) であり，これがすべての出発点である．この場合，座標は自然に定義されるし最もわかり易い事は事実である．しかし物理の方程式を解こうとする場合，ポテンシャルが極座標表示で書かれている場合が多いため，極座標表示も重要になる．

● **極座標** : (r, θ, φ) と書く

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy dz = \int_0^{\infty} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

立体角 : $d\Omega \equiv \sin \theta d\theta d\varphi$

[注：3重積分のときの積分記号は $\int \int \int$ でも $\int$ でもよい]

● **円筒座標** : (r, φ, z) と書く

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy dz = \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dz$$

F.2 積分公式

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty e^{-ax} dx &= \frac{1}{a} \\
 \int_0^\infty x^n e^{-ax} dx &= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial a^n} \frac{1}{a} = \frac{n!}{a^{n+1}} \\
 \int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\
 \int_0^\infty x^{2n+1} e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2} \frac{n!}{a^{n+1}} \\
 \int_0^\infty x^{2n} e^{-ax^2} dx &= (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial a^n} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{(2n-1)!! \sqrt{\pi}}{2^{n+1} a^{n+\frac{1}{2}}} \\
 \int_{-\infty}^\infty \frac{f(x) dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{a^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(a \tan \theta) \cos \theta d\theta \quad (x = a \tan \theta) \\
 \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{2}{a^2} \\
 \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta &= \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2} \\
 \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{a+bt}} &= \frac{2}{b} \left(\sqrt{|a+b|} - \sqrt{|a-b|} \right)
 \end{aligned}$$

F.3 δ 関数

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^\infty \delta(x) dx &= 1 \\
 \int_{-\infty}^\infty f(x) \delta(x-a) dx &= f(a) \\
 \delta(ax) &= \frac{1}{|a|} \delta(x) \\
 \delta(x^2 - a^2) &= \frac{1}{2|a|} [\delta(x-a) + \delta(x+a)] \\
 \delta(\mathbf{r}) &\equiv \delta(x) \delta(y) \delta(z)
 \end{aligned}$$

F.4 ベクトル

F.4.1 ベクトルの公式

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}) \cdot \boldsymbol{A} = 0$$

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{A}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B})$$

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \quad [\boldsymbol{\sigma} : \text{Pauli matrices}]$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| |\boldsymbol{b}| \cos \theta$$

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| |\boldsymbol{b}| \sin \theta$$

F.4.2 $\boldsymbol{\nabla}$ と $\boldsymbol{\nabla}^2$ の公式

$$\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

$$\boldsymbol{\nabla} \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = -\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = -4\pi \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$$

F.4.3 内積

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} \equiv \text{div } \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

F.4.4 外積

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{e}_z$$

$$\nabla \times \mathbf{B} \equiv \text{rot } \mathbf{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$$

F.5 微分演算公式と座標系

F.5.1 直交座標系 (x, y, z)

• Gradient :
$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

• Laplacian :
$$\nabla^2 \phi \equiv \Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

直交座標におけるベクトル : $\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$

• Divergence :
$$\text{div } \mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

• Rotation :
$$\text{rot } \mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z$$

F.5.2 円筒座標系 (r, φ, z)

• Gradient :
$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

• Laplacian :
$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

円筒座標におけるベクトル： $\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi + A_z \mathbf{e}_z$

$$A_r = A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi, \quad A_\varphi = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi, \quad A_z = A_z$$

• **Divergence：** $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

• **Rotation：**

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z$$

単位ベクトルの変換

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y \end{cases}$$

F.5.3 極座標系 (r, θ, φ)

• **Gradient：** $\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi$

• **Laplacian：**

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

• **極座標におけるベクトル：** $\mathbf{A} = A_r \mathbf{e}_r + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi$

$$\begin{cases} A_r = A_x \sin \theta \cos \varphi + A_y \sin \theta \sin \varphi + A_z \cos \theta \\ A_\theta = A_x \cos \theta \cos \varphi + A_y \cos \theta \sin \varphi - A_z \sin \theta \\ A_\varphi = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi \end{cases}$$

• **Divergence：** $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$

• **Rotation：** $\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_r +$
 $\frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi$

単位ベクトルの変換

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{e}_x = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_r + \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_\theta - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_y = \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_\theta + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_z = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta \end{cases}$$

F.5.4 $\nabla^2 \phi = C$ の対称性とその解

電磁気学で ∇^2 を扱う時は極座標か円筒座標で問題を解く事になる.

$$\text{極座標:} \quad \nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

$$\text{円筒座標:} \quad \nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

ここで ϕ に対称性がある時, これらの式は

$$\text{極座標:} \quad \nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (\text{球対称性})$$

$$\text{円筒座標:} \quad \nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (\text{円筒対称性})$$

と書ける. 例えば球対称性の微分方程式の場合

$$\bullet \quad \boxed{\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = -\rho_0} \quad \text{の解法:}$$

$$\bullet \quad \text{微分を外すと} \quad \boxed{\phi = -\frac{1}{6} \rho_0 r^2 + \frac{C_1}{r} + C_2} \quad \text{と求まる.}$$

F.6 複素数と複素積分

F.6.1 複素数の定義

$$\begin{cases} z = x + iy = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \\ z^* = re^{-i\theta} \end{cases}$$

F.6.2 Euler の公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \end{cases}$$

F.6.3 解析関数

複素関数 $f(z)$ が $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ と展開出来る時この関数は解析関数と呼ばれる。ここで重要な事は展開している n は整数である事である。従って例えば $f(z) = \sqrt{z}$ は解析関数ではない。

この時、原点を中心とした半径 R の円を複素平面で考えて、 $\theta = 0$ から一周まわる積分路を C と呼ぼう。今、関数 $f(z)$ をこの積分路 C で積分しよう。

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \oint_C z^n dz \quad (\text{F.1})$$

ここで $z = Re^{i\theta}$ と変数変換すると $dz = iRe^{i\theta} d\theta$ となる。よって

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_0^{2\pi} iR^{n+1} e^{i(n+1)\theta} d\theta = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i c_{-1} & n = -1 \end{cases} \quad (\text{F.2})$$

となる。 $f(z)$ で $n = -1$ に対応する部分を $z = 0$ のポールと呼び、 c_{-1} をその留数と言う。

例題： $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ipx}}{x^2 + a^2} dx$: ($p > 0, a > 0$) の計算

解答：

$\oint_C \frac{e^{ipz}}{z^2 + a^2} dz$ の複素積分を上半面の半径 R の半円 (経路 C) で積分する.

$$\oint_C \frac{e^{ipz}}{z^2 + a^2} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{ipx}}{x^2 + a^2} dx + \int_0^\pi \frac{e^{ipR \cos \theta - pR \sin \theta}}{R^2 e^{2i\theta} + a^2} iR e^{i\theta} d\theta \quad (\text{F.3})$$

ここで右辺第 1 項は $R \rightarrow \infty$ で問題の積分そのものである. 第 2 項は θ の範囲が $0 < \theta < \pi$ なので $\sin \theta$ は常に正である. よって, $e^{ipR \cos \theta - pR \sin \theta}$ は $R \rightarrow \infty$ でゼロになる. 一方, 複素積分の公式から

$$\oint_C \frac{e^{ipz}}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i \frac{e^{-pa}}{2ai} = \frac{\pi e^{-pa}}{a} \quad \text{と求まるので積分の答えは}$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ipx}}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi e^{-pa}}{a}} \quad \text{となる.}$$

F.7 三角関数

$$\begin{cases} \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \\ \tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \end{cases}$$

$$a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha)$$

$$\begin{cases} \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \\ \cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \\ \cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \end{cases}$$

F.8 指数関数と対数関数

- 基本的な性質 : $e^x \cdot e^y = e^{(x+y)}, \quad (e^x)^y = e^{xy}, \quad e = 2.7182818$
 $\ln xy = \ln x + \ln y, \quad \ln x^y = y \ln x, \quad \ln x \equiv \ln_e x$

- 微分 : $\frac{de^x}{dx} = e^x, \quad \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$

F.9 Taylor 展開

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 - i\frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + i\frac{1}{5!}x^5 + \dots = \cos x + i \sin x$$

F.10 線積分と面積積分

F.10.1 線積分

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \equiv \int_C (A_x dx + A_y dy + A_z dz)$$

C : 積分路 (線に沿って積分: 実際の積分は 直線 か 円 が可能)

半径 a の円 ($A_\theta = A_\theta(r)$ の対称性) : $\int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = A_\theta(a)2\pi a$

F.10.2 面積積分

$$\int \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \equiv \int \int_S A_n dS$$

$d\mathbf{S}$: ベクトルの向きは面に垂直な方向

A_n : 法線方向の成分 (球の場合は $\mathbf{e}_r$ 方向外向き)

(実際の積分は 直方体 か 球 か 円筒 が可能)

半径 R の球 ($A_n = A_r(r)$ の対称性) : $\int \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = A_r(R)4\pi R^2$

F.11 Gauss の定理

Gauss の定理とは任意の閉じた体積に対してベクトル量 $\mathbf{A}$ の発散量 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ を積分するとこの積分量はこの表面における A_n ($\mathbf{A}$ の法線方向の成分) について表面積分したものと一致しているというものである.

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d^3r = \int_S A_n dS_n \equiv \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{F.4})$$

ここで, dS_n は表面積分を表している. 方向は外向きを正としている.

F.11.1 直感的解説

この Gauss の定理 (F.4) について、半径 a の球を考えて検証して見よう。球対称性がある場合、球での積分には角度の依存性はないので、数学の公式より

$$\text{左辺} = \int \left[\int_0^a \frac{1}{r^2} \left(\frac{d}{dr} (r^2 A_r) \right) r^2 dr \right] d\Omega = a^2 \int A_r d\Omega = \int_{[r=a]} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$$

となり納得できるのである。

F.11.2 Gauss の定理の証明

この式 (F.4) の証明は 3 つのステップに沿って行う。まずは、1 辺が a の立方体を考えて、この立方体の隅の 1 個を原点にとる。この立方体に対して Gauss の定理が成立する事を証明する。次にこの立方体を 8 つに切り、1 辺が $a/2$ の立方体に対して Gauss の定理を証明する。この時に、それぞれ小さな立方体に関しては接する面どうしが打ち消し合い、結局全体の表面だけが積分に効いて来る事が示される。最後に、ステップ 3 として任意の体積を考え、これを無限小の立方体に分割して考えると、明らかに接する面はお互いに反対向きになり打ち消し合う事が容易にわかる。従って、結局全体の表面積の積分になる事が証明されるのである。

● **立方体での Gauss の定理：** Gauss の定理の証明をまず立方体で行う。この場合、左辺の積分は

$$\begin{aligned} \int_{0 \leq x, y, z \leq a} \nabla \cdot \mathbf{A} d^3r &= \int \left[\int_0^a dx \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} \right) \right] dydz + \int \left[\int_0^a dy \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \right] dzdx \\ &+ \int \left[\int_0^a dz \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \right] dxdy \quad \text{である。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \int_{0 \leq x, y, z \leq a} \nabla \cdot \mathbf{A} d^3r &= \int (A_x(a, y, z) - A_x(0, y, z)) dydz \\ &+ \int (A_y(x, a, z) - A_y(x, 0, z)) dzdx + \int (A_z(x, y, a) - A_z(x, y, 0)) dxdy \end{aligned}$$

となり、この右辺は立方体における表面積分である事がわかり

$$\int_{0 \leq x, y, z \leq a} \nabla \cdot \mathbf{A} d^3r = \int_S A_n dS_n \quad \text{が証明されたのである。} \quad (\text{F.5})$$

● **一般の場合の Gauss の定理** : Gauss の定理の証明が立方体でわかると、前述したように後は簡単である。まずは立方体を 8 つに切ってそのそれぞれに対して Gauss の定理を示すと、それぞれにおいて面が接している所は常に打ち消し合っている事がわかる。従って、残るのは全体の表面での積分になっている事が直ぐにチェックできる。この事がわかると、一般の場合も同じように無限小の立方体に分割して見れば明らかなように、接している所は必ず打ち消し合い、最終的に残る積分はすべて表面となっているのである。

F.12 Stokes の定理

Gauss の定理の証明と同じくらい重要な数学の定理に Stokes の定理

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{F.6})$$

がある。ここで C は閉曲線を表し、 S はその閉曲線で囲まれる面積を表し、この面積積分は右手の法則に従って面積積分の方向を決めている。

F.12.1 直感的解説

Stokes の定理 (F.6) について、円筒対称性がある場合に見て行き、半径 a の円筒で検証をして行こう。数学の公式を使うと左辺は

$$\int \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) dS_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) dS_\varphi + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) dS_z$$

となるが円筒対称性より $A_r = A_r(r)$, $A_\varphi = A_\varphi(r)$, $A_z = 0$ である。よって

$$\text{左辺} = \int \left[\int_0^a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) r dr \right] d\varphi = a \int A_\varphi d\varphi = \int_{[r=a]} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

となり納得できるのである。

F.12.2 Stokes の定理の証明

Stokes の定理の証明を行う．手法は Gauss の定理の場合とほぼ同じである．

● **長方形での Stokes の定理**： まず長方形で行う．この長方形の一つの頂点を原点に取り， x －軸方向に a そして y －軸方向に b の長方形を考える．長方形が $x-y$ 平面にあるため， $d\mathbf{S}$ の方向は z －軸である．よって左辺は

$$\int_S \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy = \int_0^b [A_y(a, y, z) dy - A_y(0, y, z)] dy - \int_0^a [A_x(x, b, z) dx - A_x(x, 0, z)] dx$$

となる．これは長方形の周囲を一周積分する事に対応している．すなわち上式の右辺は原点から x －軸に沿って a まで積分し，そこから y －軸方向に沿って b まで積分し，さらにそこから x －軸に沿って 0 まで積分し，そして最終的に y －軸方向に沿って原点まで積分したものである．これは長方形に対して Stokes の定理が証明された事に対応している．よって

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \quad (\text{F.7})$$

が示された事になっている．

● **一般の場合の Stokes の定理**： 一般の場合の Stokes の定理の証明は，Gauss の定理の時の証明と同じであり，上式の場合の長方形を4つに分割してみる．そうすると，分割されたものの長方形でお互いに接している線積分はすべて打ち消し合い消えてしまう．結局．残るのは外回りの線積分だけになる．よって，この場合も確かに Stokes の定理が証明された事になっている．この事より，一般の閉曲線で囲まれる面積を無限に小さな長方形に分割してみると，やはり重なった部分は打ち消し合い消えてしまう．そして残った線積分はすべて閉曲線そのものの線積分になっているのである．従って，確かに任意の閉曲線で囲まれる面積に対して Stokes の定理が成り立っているのである．

関連図書

- [1] 西島和彦, 「相対論の量子力学」, (培風館, 1973)
- [2] K. Nishijima, “Fields and Particles”, (W.A. Benjamin, INC, 1969)
- [3] T. Fujita, “Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory”
(Nova Science Publishers, 2011, 2nd edition)
- [4] T. Fujita and N. Kanda,
“Fundamental Problems in Quantum Field Theory”
(Bentham Publishers, 2013)
- [5] T. Fujita, M. Hiramoto and H. Takahashi,
“Bosons after Symmetry Breaking in Quantum Field Theory”
(Nova Science Publishers, 2009)
- [6] “New Fundamentals in Fields and Particles”
T. Fujita (Editor), (Transworld Research Network, 2008)
- [7] J.D. Bjorken and S.D. Drell, “Relativistic Quantum Mechanics”,
(McGraw-Hill Book Company, 1964)
- [8] J.J. Sakurai, ” Advanced Quantum Mechanics”, (addison-Wesley, 1967)
- [9] B.W. Parkinson and J.J. Spilker, “Global Positioning System”,
Progress in Astronautics and Aeronautics (1996)
- [10] Simon Newcomb, “Tables of the Four Inner Planets”,
2nd ed. (Washington: Bureau of Equipment, Navy Dept., 1898).
- [11] B.G. Bills and R.D. Ray , “ Lunar Orbital Evolution:
A Synthesis of Recent Results ”,
Geophysical Research Letters 26 (19): 3045-3048 (1999)

索引

- AC, 162
- Alternating current, 162
- Ampère の法則, 93
- Atomic transition, 4
- Battery, 4
- Biot-Savart の法則, 93
- Black body radiation, 6
- CP 対称性, 92
- CVC 理論, 155
- Charge density, 9
- Compton 散乱, 29, 134
- Conductor, 16
- Conservation of charge, 15
- Continuity equation, 14
- Coulomb の法則, 11
- Coulomb ゲージ, 130
- Coulomb ポテンシャル, 12
- Curie の原理, 92
- Curie の原理, 155
- Current, 3
- Current density, 9
- DC, 161
- Dielectric, 17
- Dirac の波動関数, 130
- Dirac 場, 148, 188
- Dirac 場の量子化, 148
- Dirac 方程式, 130
- Dirac 方程式の自由粒子解, 188
- Direct current, 161
- Discharge, 2
- Displacement current, 122
- Einstein, 137
- Electric dipole moment, 14
- Electric field, 11
- Electric polarization, 3
- Electromagnetic induction, 8, 23
- Electromagnetic wave, 5
- Euler の公式, 203
- Faraday の法則, 37, 113
- Fermi, 155
- Feynman の伝播関数, 151
- Feynman 伝播関数, 156
- Feynman 図, 149, 153
- Field, 10
- Field quantization, 26
- Fock 空間, 128, 149
- GPS 衛星, 169, 193
- Galilei transformation, 164
- Galilei 変換, 164
- Gauss の定理, 60, 79, 88, 206
- Gauss の法則, 45
- Generator of electricity, 24
- Green 関数, 63, 65
- Hamiltonian 密度, 187
- Heisenberg, 146
- Higgs 機構, 155
- Hydro-photoelectric effect, 31
- Induction heating, 24

- Insulator, 17
Interaction, 24
Kepler 問題, 173, 177
Lagrange 方程式, 173
Lagrangian 密度, 147, 185
Laplace 方程式, 10, 55
Larmor 振動数, 141
Lorentz ゲージ, 130
Lorentz 変換, 165, 166
Lorentz 力, 25, 141, 175
MRI, 142
Magnet, 21
Magnetic dipole moment, 19
Magnetic flux, 24
Magnetization, 20
Maxwell 方程式, 9, 167
Meissner 効果, 21, 109
Microwave oven, 30
Minkowski 空間, 170
Mirror charge method, 59
Mugen Universe, 158
Newton 方程式, 83, 166
Nishijima, 152
Non-linear equation, 11
Oscillator, 22
Pauli 行列, 139
Photoelectric effect, 30
Photon, 26
Pierre Curie, 3, 92, 137
Piezoelectric effect, 3
Planck の公式, 7
Poisson 方程式, 10, 55, 63
Polarization, 18
Polarization vector, 27
Polarized light, 28
Poynting ベクトル, 22, 124
QCD, 154
Quartz, 3
Radiation, 4
Radio wave, 5
Rayleigh 散乱, 29, 135
Relativity, 163
Rutherford 散乱, 135
Schrödinger 場, 186
Semiconductor device, 4, 17
Solid state, 7
Stokes の定理, 113, 208
Superconductor, 21
Superposition principle, 10
S 行列, 149
T-積, 149
Thermal fluctuation, 31
Thomson 散乱, 29, 135
Tomonaga, 146
Ultraviolet rays, 4
Voltage, 3
W ボソンの電荷, 155, 160
Zeeman 効果, 141
4 点相互作用, 155
うるう秒, 194
うるう秒の起源, 194
アノマリー現象, 153
イオントラップ, 23
インダクタンス, 116
エネルギー・運動量テンソル, 170
エネルギー固有値, 181
エネルギー積分, 177
エントロピー, 182
オームの法則, 16, 88, 92
オーロラ, 8

- カイラル・アノマリー, 152
カイラル対称性, 92
カットオフ運動量, 150
カノニカル分布, 181, 182
カラー自由度, 154
カレント, 87
ガリレオの相対性理論, 164
ガンマ行列, 188
キネマティックス, 169
クォーク, 154
グルオン, 154
ゲージ固定, 125
ゲージ不変な Lagrangian 密度, 190
ゲージ不変性, 85, 99, 175
ゲージ変換, 175, 190
コイル, 22
コンデンサー, 22, 49
コンデンサーに働く力, 84
コンデンサーのエネルギー, 74
コンデンサーの容量, 74
サイクロトロン運動, 141
スピノル, 148
スピノル解, 189
スピン, 130
スピンと統計, 183
スピン固有関数, 148
ダイナミックス, 169
デカルト座標, 197
ドップラー効果, 168
バーテックス補正, 150
パリティ, 92
フェルミオン, 150
フェルミ統計, 184
フォトン, 6, 26, 30, 125, 128, 132
フォトン・フォトン散乱, 137
フォトンの自己エネルギー, 151
フォトンの生成・消滅, 27, 160
フォトンの弾性散乱, 134
フォトンの偏光, 132
フォトン伝播関数, 156
ベクトルポテンシャル, 99, 114, 126
ボーズ統計, 184
ポンピング, 6
マイクロカノニカル, 181
メトリック, 185
モーター, 25
ランク, 133
ループ図, 149
レーザー光, 5, 28, 144
レーザー冷却, 144
レーダー, 5
圧電効果, 2, 3, 92
異常磁気能率, 146, 151
一般座標, 173
一般相対論, 170
一般相対論の問題点, 171
一様電荷分布, 40
円電流, 19, 95, 104
円筒座標, 197
演算子, 128
可視光, 5
荷電粒子の相互作用, 85
回路の方程式, 123
海水の抵抗率, 17
外積, 200
角運動量保存, 177
慣性系, 163
観測者, 164
起電力, 114, 115
逆圧電効果, 3

- 逆散乱過程, 137
球殻一様電荷分布, 50
球状一様電荷分布, 41, 48
強い相互作用, 154
強磁性体, 106
鏡像法, 59
極座標, 197
空の青さ, 28
繰り込み理論, 146, 149, 153
群論的解説, 133
傾斜磁場, 142
計量テンソル, 170
結合定数, 159, 160
月の後退, 195
原子遷移, 4, 133
古典場の理論, 185
古典力学, 144, 173
固体, 7
固体の黒体輻射, 7
交換関係, 26, 128, 184
交流, 162
光電効果, 30
黒体輻射, 6
座標系, 197
最小作用の原理, 175
三角形図, 152, 153
散乱断面積, 135
仕事率, 122
思考実験, 171
紫外線, 4, 5
紫外発散, 169
時間の遅れ, 193
時間反転, 92
磁位, 96, 105
磁化, 20, 105
磁荷, 19
磁気トラップ, 23, 143
磁気感受率, 106
磁気双極子, 19, 96, 107
磁場, 19
磁場のエネルギー, 21, 103, 117, 123
磁性体, 104
磁石, 20, 21
磁束, 114
磁束密度, 9
自己エネルギー, 150
自発的対称性の破れ, 92, 155
自由フォトン, 129
自由場, 128
自由粒子解, 130
弱い相互作用, 155
周期, 179
重ね合わせの原理, 10
重力, 154
重力の付加ポテンシャル, 192
重力の量子化, 154
重力場, 190
重力場の Lagrangian 密度, 190
重力場の方程式, 191
重力場中の Dirac 方程式, 191
重力定数, 191
重力理論, 192
場の Hamiltonian, 187
場の定義, 10
場の量子化, 26
場の量子論, 154
常磁性体, 106
情報の伝達, 161
真空管ダイオード, 17
真空偏極, 146, 152

- 水晶, 3
- 水星の近日点, 193
- 水分子の分布, 142
- 整流子, 25
- 生成・消滅演算子, 128, 148
- 静電気, 2
- 静電容量, 50
- 積分形 Gauss の法則, 46
- 赤外線, 5
- 赤外発散, 169
- 摂動論, 149
- 絶縁体, 16, 17
- 線積分, 93, 206
- 双子のパラドックス, 169
- 相互作用, 24
- 相互作用表示, 149
- 相対性原理, 163
- 相対性理論, 163
- 相対論での速度の和, 165
- 太陽光, 28
- 太陽光発電, 30
- 太陽風, 8
- 楕円運動, 177
- 対称性の破れ, 155
- 単位ベクトル, 201, 202
- 地球公転の遅れ, 194
- 地球磁場, 8
- 中性粒子のトラップ, 143
- 調和振動子, 173, 176
- 超伝導, 21, 107, 109
- 長半径, 179
- 直線電流の作る磁場, 94
- 直流, 161
- 点電荷, 46
- 点電荷の自己エネルギー, 69
- 点電荷密度, 47
- 伝播関数, 63, 151, 153, 156
- 伝播関数のまとめ, 156
- 電圧, 3, 4
- 電位, 12, 36, 37
- 電位差, 12, 49, 53, 71, 74, 89, 123
- 電荷, 13, 159
- 電荷保存, 15
- 電荷密度, 9
- 電気双極子, 13, 39
- 電気双極子に働く力, 84
- 電気双極子の鏡像法, 61
- 電気双極子の電位, 14, 18
- 電気抵抗, 89, 110
- 電気抵抗率, 16
- 電気伝導率, 90
- 電気分極, 3
- 電気容量, 73, 89
- 電子と磁場の相互作用, 139
- 電子と電磁場の相互作用, 175
- 電子の Hamiltonian, 139
- 電子レンジ, 30
- 電磁場の Lagrangian 密度, 189
- 電磁場のエネルギー, 122, 123
- 電磁場の量子化, 128
- 電磁場中の運動方程式, 85
- 電磁波, 5, 26, 121, 125, 142
- 電磁波の発振機構, 126
- 電磁誘導, 8, 23, 113
- 電場, 9, 35–37, 39, 57, 60, 70, 73
- 電場のエネルギー, 22, 67, 68, 70, 75, 123
- 電線による通信, 5
- 電束密度, 18, 78, 80
- 電池, 4

- 電波, 27
電流, 3, 87, 161
電流の定義, 87
電流密度, 9, 87
透磁率, 106
導体, 15
導体球のエネルギー, 69
特殊相対性理論, 165
内積, 199
熱ゆらぎ, 31
熱輻射, 4
発振機構, 22
発電機構, 24
半導体, 15, 17
半導体素子の輻射, 4
反交換関係, 148
反磁性体, 106
反粒子, 148
非可換ゲージ理論, 155
非線形方程式, 11
非相対論近似, 191
非相対論的量子力学, 139
微分演算子, 200
微分幾何学, 171
負のエネルギー解, 148, 189
複合粒子のスピンと統計, 184
複素積分, 203
物理的観測量, 153
分極, 18, 77
分極ベクトル, 77
分極電荷密度, 79
分散関係式, 26, 125, 130, 166
分配関数, 181
分布関数, 181
平面一様電荷分布, 49
平板の電場, 73
偏極ベクトル, 27, 129, 131
偏光, 28
偏光版, 132
変位電流, 122, 124
保存系, 124
放射能, 92
放電, 2
摩擦帯電, 2
摩擦放電, 2
無限宇宙, 158
面積積分, 206
面積速度, 178
有限質量ベクトルボソン, 151
誘電体, 15, 17, 80
誘電体の電場のエネルギー, 81
誘電率, 78
誘導加熱, 24
陽子のスピン, 142
陽電子, 148
雷, 3
粒子描像, 171
量子, 6
量子状態遷移, 4
量子色力学, 154
量子数, 160
量子電磁力学, 147, 188
量子力学, 85, 141
連続方程式, 14, 121