

群論の初歩　：　物理院生用

藤田　丈久

(よろず物理研究所)

はじめに

物理学を深く理解するためには群論を自分のものにする事がかなり重要である。ところが、物理学科の授業で群論を教える事はほとんどないのが現状であると言えよう。そしてこれは1970年代の教育状況から変わらず続いてきたものと考えられる。しかしながら大学院に進学した途端に、理論物理においては群論をある程度、理解している事は当然であると言う事になっている。

このノートでは物理屋に取って最低限のレベルにおける群論とその表現を紹介している。数学的な厳密さはほとんど考慮していないが、しかし基本的な戦略は正しいものと考えている。このノートは大学院での講義ノートをベースにして書いたものである。この大学院講義自体は英語で行われたものであるが、このノートは主に日本語の記述になっている。但し、一部、必要に応じて英語で書かれたものはそのまま英語での記述になっている。

目次

第 1 章 群論とは？	1
1.1 群の定義	1
1.1.1 群の形成	2
1.1.2 群の実例	2
1.2 Special Unitary 行列 $SU(N)$	4
1.2.1 行列 $SU(2)$	4
1.2.2 $SU(N)$ は群	5
1.3 対称群 (非可換群)	7
1.3.1 対称群の構成要素	8
1.3.2 対称群における演算の定義	9
1.3.3 対称群は群をなす	9
第 2 章 群の表現	11
2.1 基底ベクトルと表現行列	11
2.2 積表現	12
2.3 既約と可約	12
2.4 群の表現の具体例	13
2.4.1 例題 1. $G \{I, E_1, E_2, E_3\}$ の表現	13
2.4.2 例題 2. 対称群 $S_2 \{I, \pi_2\}$ の表現	14
第 3 章 群論の応用	17
3.1 状態関数の変換とオペレータの変換性	17
3.2 Hamiltonian の対称性	18
3.2.1 エネルギー固有値の d -重縮退	19

3.2.2	空間反転対称性	20
3.3	回転対称性 (3次元空間)	21
3.3.1	$\hat{R}_\theta$ は群をなす	21
3.3.2	状態関数に対する回転群演算子	22
3.3.3	Euler 角と回転群演算子	24
3.3.4	回転演算子 $\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma)$ の性質	24
3.4	角運動量 ℓ とその固有関数	26
3.4.1	球面調和関数	26
3.4.2	合成角運動量の固有関数	27
3.4.3	全角運動量 $\mathbf{J} = \ell + \mathbf{s}$ とスピン $\mathbf{s}$	29
3.4.4	回転オペレータ $\hat{R}$ と表現行列 $D_{m'm}^{(\ell)}$	30
3.4.5	Wigner-Eckart の定理	30
3.5	Isospin 空間	32
3.5.1	Isospin 空間	32
3.5.2	Isospin 空間における回転	33
3.5.3	Isospin 空間のスカラー	34
3.5.4	$\mathbf{T}^2$ の固有値	35
3.5.5	アイソベクトル $\mathbf{T}$ の回転	36
3.5.6	Pauli 行列と SU(2)	36
第 4 章	回転群 O(3) の表現	37
4.1	回転群 O(3)	37
4.1.1	$\mathbf{J}^2$ の固有値	37
4.1.2	$J_\pm$ の行列要素	39
4.2	D 関数の計算	40
4.2.1	$D^{(J)}(R^{-1})$ に対する微分方程式	40
4.2.2	微分方程式の解	42
4.2.3	D 関数の例題	44
第 5 章	SU(2) の表現	47
5.1	SU(2) の基本表現	47
5.2	$J = 1$ の表現	49

5.3	一般の場合の表現行列	51
第 6 章	SU(3) の群と表現	53
6.1	SU(3) と素粒子	53
6.1.1	8 次元表現のバリオン	54
6.1.2	複素共役の表現 $\mathbf{3}^*$	55
6.2	SU(3) の Generator とその構造	56
6.2.1	SU(2) の Generator	56
6.2.2	SU(3) の Generator	57
6.3	Complex Conjugate (複素共役)	58
6.3.1	SU(2) の複素共役の表現	58
6.3.2	SU(3) の複素共役の表現	59
6.4	Young Diagram	60
6.4.1	Young Box とその次元	60
6.4.2	対称群 (λ, μ) による表現	61
6.4.3	Young Diagram の積	62
第 7 章	既約分解	65
7.1	スピン $1 \otimes 1$ は 0 と 1 と 2 の直和	65
7.1.1	ベクトル	65
7.1.2	既約分解	66
7.2	各項の性質	67
7.2.1	Scalar $S = \hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2$	67
7.2.2	Vector $\mathbf{V} = \hat{\mathbf{r}}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_2$	67
7.2.3	$S, \mathbf{V}$ の対称性	68
7.3	式 (7.4), (7.6) の証明に必要な式のまとめ	68
7.4	Group Theory for Landau-Yang Theorem	69
7.4.1	Reduction of spin $1 \otimes 1$ states	69
7.4.2	Rank k Tensor and Tensor Product	71
7.4.3	Landau-Yang Theorem	72

第 8 章	Quantum Chromodynamics	73
8.1	Introduction	73
8.2	Properties of QCD with $SU(N_c)$ Colors	74
8.2.1	Lagrangian Density of QCD	74
8.2.2	Infinitesimal Local Gauge Transformation	75
8.2.3	Local Gauge Invariance	76
8.3	Noether Current in QCD	77
8.3.1	Conserved Charge of Color Octet State	78
8.3.2	Gauge Non-invariance of Interaction Lagrangian Density	78
8.4	Equation of Motion	79
付 録 A	パリティ変換と奇関数積分	81
A.1	簡単な例題	81

第1章 群論とは？

群論を理論物理学者が解説する事はかなり難しいものと思われる。到底、厳密にはできないし、そうする事に興味もないものである。しかし物理学者にとって群論は非常に有用である。例えば、回転群の表現を正確に捉えていれば、電磁場のスピンの1であることを納得できるものである。偏極ベクトルはリー代数を満たさないがしかしランク1のテンソルであることから、ほとんどスピン1の粒子と考えて十分であることが良くわかるものである。後で解説するように、通常のベクトル、例えば空間座標 $\mathbf{r}$ はランク1のテンソルである。従ってベクトルポテンシャルも当然、ランク1のテンソルとなっている。

この章ではまず、群とは何なのかと言う事から始めて行こう。群の概念は非常に面白いものであり、自然界の様々な構造をうまく classify(分類) するのに役立つものである。まずは群の定義をきちんと理解することが重要である。

1.1 群の定義

群とは基本的に何かの集合体である。この場合、数学ではその集合体を構成する要素をまず考える事になる。今考えている群 G の要素をここでは例えば

$$G : \{a, b, c, \dots, g\} \quad (1.1)$$

としよう。この場合はただ並べただけであり、特別な意味はない。群論においては、ここで何らかの演算をこの要素間に定義する事になる。例えば、普通の掛け算とか行列の掛け算とかである。以降、演算を代表して $\bullet$ と表記しよう。

1.1.1 群の形成

群を形成するためには次の4個の条件を満たす必要がある。

- (1) 要素 a と b の演算結果 $(a \bullet b)$ が元の群 G に属している
- (2) 単位要素が存在する
- (3) 逆元が存在する
- (4) 結合則 $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ が成り立つ

群 G がこの4個の条件を満たしている場合、これは群を形成していると言う。

● **可換群 (Abelian group) :**

$a \bullet b = b \bullet a$ が成り立つ場合、これを可換群 (abelian group) と言う。

● **非可換群 (Non-abelian group) :**

$a \bullet b \neq b \bullet a$ の場合、これを非可換群 (non-abelian group) と言う。Special Unitary 行列 $SU(N)$ によって作られる群は典型的な非可換群である。

1.1.2 群の実例

群についていくつかの実例をあげて議論して行こう。まずは群をなさない集合体の例を挙げて、その中身を見てみよう。

[1] **群でない例：集合体 $F \{1, 2, \frac{1}{2}\}$**

今、例として集合体 $F \{1, 2, \frac{1}{2}\}$ を考えてみよう。この場合、演算は掛け算としよう。この例では単位要素は存在するし、逆元も存在している。また、結合則も成り立っている。ところが、(1) の規則である「要素間 $a \bullet b$ の演算結果が元の群 G に属している」を満たしていない。それは明らかで、 $2 \bullet 2 = 2 \times 2 = 4$ は F の要素の中にはない。従って、これは群をなしていない事がわかる。

[2] I, E_1, E_2, E_3 の群

今、群 $\mathcal{G}$ として

$$\mathcal{G} \{I, E_1, E_2, E_3\} \quad (1.2)$$

を考えよう。ここで演算として次のようなものを考えよう。但し、この群は可換群と仮定されている。

$$E_1 \bullet E_1 = E_2 \bullet E_2 = E_3 \bullet E_3 = I \quad (1.3)$$

$$E_1 \bullet E_2 = E_3, \quad E_1 \bullet E_3 = E_2, \quad E_2 \bullet E_3 = E_1 \quad (1.4)$$

$$E_1 \bullet I = E_1, \quad E_2 \bullet I = E_2, \quad E_3 \bullet I = E_3 \quad (1.5)$$

この集合体 $\mathcal{G}$ が群をなしている事を示そう。まず (1) の規則である「要素間で $a \bullet b$ の演算結果が元の群 $\mathcal{G}$ に属している」に関してであるが、これは明らかであろう。次に、単位元であるが、これは I である。さらに逆元は $E_1^{-1} = E_1$ など自分自身である。また結合則は

$$(E_1 \bullet E_2) \bullet E_3 = E_1 \bullet (E_2 \bullet E_3) \quad (1.6)$$

を示す事であるが、これは

$$E_3 \bullet E_3 = E_1 \bullet E_1 \Rightarrow I = I \quad (1.7)$$

であり明らかに成り立っている。従ってこれは確かに群をなしている事がわかる。

[3] 巡回群

今、群 $\mathcal{G}$ として

$$\mathcal{G} \{C_n, C_n^2, \dots, C_n^n = I\} \quad (1.8)$$

を考えよう。ここで n は整数である。この場合 $C_n^k = e^{\frac{2\pi k}{n}i}$ と書かれている。これが群を形成している事を示そう。単位オペレータは $I = 1$ である。 C_n^k の逆行列は

$$(C_n^k)^{-1} = e^{\frac{2\pi(n-k)}{n}i} \quad (1.9)$$

となっている。これは

$$\left(C_n^k\right)^{-1} C_n^k = e^{\frac{2\pi(n-k)}{n}i + \frac{2\pi k}{n}i} = I \quad (1.10)$$

から明らかである。

1.2 Special Unitary 行列 SU(N)

行列の要素として Special Unitary 行列 SU(N) を考えてみよう。これは非可換群である。

1.2.1 行列 SU(2)

今、簡単な例として 2×2 の Special Unitary 行列 A を考えよう。この場合

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

としよう。Unitary 行列であるとは

$$AA^\dagger = 1 \quad (1.12)$$

が成り立っている事である。ここで $A^\dagger$ は

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

である。この 行列が Unitary である事の条件は

$$|a|^2 + |b|^2 = 1, \quad ac^* + bd^* = 0 \quad (1.14)$$

$$|c|^2 + |d|^2 = 1, \quad ca^* + db^* = 0 \quad (1.15)$$

となっている。また Special であるとは

$$\det A = ad - bc = 1 \quad (1.16)$$

が成り立っているものである。このため SU(2) の場合、最初、8 個の自由度が存在していたが 5 個の条件があるため、自由度は 3 個である。

1.2.2 SU(N) は群

ここで SU(N) は群を形成している事を証明しよう。この群の演算は行列の掛け算である。

• (1) $C = AB$ も SU(N):

この行列の掛け算の結果もやはり SU(N) であることを証明しよう。まずはユニタリーであることを示そう。

$$CC^\dagger = AB(AB)^\dagger = ABB^\dagger A^\dagger = AA^\dagger = 1 \quad (1.17)$$

により示された。ここで簡単な事ではあるが、 $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ を示しておこう。これは成分で示すのが一番、楽である。

$$[(AB)^\dagger]_{ij} = \left(\sum_{k=1}^N A_{ik} B_{kj} \right)^\dagger = \sum_{k=1}^N A_{jk}^* B_{ki}^* = \sum_{k=1}^N (B^\dagger)_{ik} (A^\dagger)_{kj} = (B^\dagger A^\dagger)_{ij} \quad (1.18)$$

• (2) 単位元:

SU(N) の単位元とは単位行列の事であり、これは常に存在している。通常はこれを 1 とか E と表記している。この場合、 $E_{ij} = \delta_{ij}$ である。

• (3) 逆元:

SU(N) の逆元 A^{-1} は $A^\dagger$ である。これは $AA^\dagger = 1$ の両辺に A^{-1} を掛けることにより

$$A^{-1}AA^\dagger = A^\dagger = A^{-1} \quad (1.19)$$

となる事から明らかである。

• (4) 結合則 (Combination Rule):

結合則 $(AB)C = A(BC)$ が成り立っているかどうかの検証をする場合、具体的に計算することが大切である。今の場合、

$$[(AB)C]_{ik} = \sum_{j=1}^N (AB)_{ij} C_{jk} = \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N A_{im} B_{mj} C_{jk} = \sum_{m=1}^N A_{im} (BC)_{mk} = [A(BC)]_{ik}$$

となって、結合則は確かに成り立っている。この行列が群を形成しているためには掛け算された $C = AB$ の行列式が $\det\{AB\} = 1$ である事を示す必要がある。この証明のために、まずは $\det\{A\} = \exp[\text{Tr} \ln A]$ を証明しておこう。

- $\det\{A\} = \exp[\text{Tr} \ln A]$ の証明：
行列式の定義式から

$$\det\{A\} = \sum_{i=1}^N A_{ij} \Delta_{ij} \quad (1.20)$$

と書かれている。ここで Δ_{ij} は小行列式である。ここで $A(x)$ として行列 A が x の関数になっていると仮定しよう。ここで式 (1.20) を x で微分しよう。この時

$$\frac{d \det\{A\}}{dx} = \sum_{i,j=1}^N \frac{dA_{ij}}{dx} \Delta_{ij} \quad (1.21)$$

となる事が簡単に示される。ところが逆行列 A^{-1} は

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{\Delta_{ji}}{\det\{A\}} \quad (1.22)$$

と書かれているので、これより式 (1.21) は

$$\frac{d \det\{A\}}{dx} = \sum_{i,j=1}^N \frac{dA_{ij}}{dx} (A^{-1})_{ji} \det\{A\} = \text{Tr} \left(A^{-1} \frac{dA}{dx} \right) \det\{A\} \quad (1.23)$$

となっている。ここで

$$A = e^{xB} \quad (1.24)$$

としよう。但し、 B は定数行列である。この時、

$$\frac{dA}{dx} = B e^{xB}, \quad A^{-1} = e^{-xB} \quad (1.25)$$

である。よって式 (1.23) は

$$\frac{d \det\{e^{xB}\}}{dx} = (\text{Tr} B) \det\{e^{xB}\} \quad (1.26)$$

となっている。この微分方程式は直ちに解けて

$$\ln \det\{e^{xB}\} = (\text{Tr} B)x + C \quad (1.27)$$

となる。但し C は積分定数である。ここで $x = 0$ を入れると $C = 0$ が求まる。これより $x = 1$ と置いて $A = e^B$, $B = \ln A$ に注意すると式 (1.27) は

$$\det\{A\} = e^{\text{Tr} \ln A} \quad (1.28)$$

となり、証明された。

• $\det\{C\} = \det\{AB\} = 1$ の証明 :

本題に戻って $\det\{AB\} = 1$ を証明しよう。これは簡単で

$$\det\{AB\} = e^{\text{Tr} \ln(AB)} = e^{\text{Tr}(\ln A + \ln B)} = e^{\text{Tr} \ln A} e^{\text{Tr} \ln B} = \det\{A\} \det\{B\} = 1 \quad (1.29)$$

となり、証明された。これにより $SU(N)$ は群をなしている事が示された。

1.3 対称群 (非可換群)

ここで対称群 S_n (Permutation group) について解説しよう。これは非可換群 (Non-abelian) である。今、群の要素を

$$S_n \equiv \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

と書く。この操作の意味は

$$1 \rightarrow i_1, \quad 2 \rightarrow i_2, \quad \cdots, \quad n \rightarrow i_n \quad (1.31)$$

と変換しなさいと言う演算を意味している。従って、状態関数にこの S_n をオペレートした場合

$$S_n \psi(1, 2, \cdots, n) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \psi(1, 2, \cdots, n) = \psi(i_1, i_2, \cdots, i_n) \quad (1.32)$$

となる。

1.3.1 対称群の構成要素

ここでは簡単のために S_3 を考えよう。 S_3 は $SU(3)$ と準同形であることが示されているため、 $SU(3)$ の表現の一部を S_3 の表現で表す事が良く行われている。従って S_3 の表現論を理解しておくことは $SU(3)$ の表現を求める時にかなり有用であると言える。この S_3 群の構成要素として6個の演算子がある。まずは単位元である。

- **単位要素 e :**

単位要素を e と書くと

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

となっている。

- **5個の要素 $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$:**

これに加えて5個の要素がある。これらは具体的に

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.35)$$

$$\pi_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

$$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

$$\pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

と書かれている。

1.3.2 対称群における演算の定義

S_3 における要素間に演算を定義しよう。2 個の要素を

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

としよう。この時、 P_1 と P_2 の演算 $P_1 \bullet P_2$ を

$$P_1 \bullet P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

と定義しよう。これより、例えば $\pi_4 \bullet \pi_5$ は

$$\pi_4 \bullet \pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e \quad (1.41)$$

となっている。

1.3.3 対称群は群をなす

S_3 が群を作っている事を示そう。

• (1) $\pi_i \bullet \pi_j$ は群の要素 :

実際の計算結果をまとめておこう。

$$\pi_1 \bullet \pi_1 = \pi_2 \bullet \pi_2 = \pi_3 \bullet \pi_3 = \pi_4 \bullet \pi_5 = \pi_5 \bullet \pi_4 = e, \quad (1.42)$$

$$\pi_1 \bullet \pi_2 = \pi_2 \bullet \pi_3 = \pi_3 \bullet \pi_1 = \pi_5, \quad (1.43)$$

$$\pi_2 \bullet \pi_1 = \pi_3 \bullet \pi_2 = \pi_1 \bullet \pi_3 = \pi_4, \quad (1.44)$$

$$\pi_1 \bullet \pi_4 = \pi_3, \quad \pi_1 \bullet \pi_5 = \pi_2, \quad \pi_4 \bullet \pi_1 = \pi_2, \quad \pi_5 \bullet \pi_1 = \pi_3 \quad (1.45)$$

$$\pi_2 \bullet \pi_4 = \pi_1, \quad \pi_2 \bullet \pi_5 = \pi_3, \quad \pi_4 \bullet \pi_2 = \pi_3, \quad \pi_5 \bullet \pi_2 = \pi_1 \quad (1.46)$$

$$\pi_3 \bullet \pi_4 = \pi_2, \quad \pi_3 \bullet \pi_5 = \pi_1, \quad \pi_4 \bullet \pi_3 = \pi_1, \quad \pi_5 \bullet \pi_3 = \pi_2 \quad (1.47)$$

• (2) **単位元**：

対称群の単位元は e である。

• (3) **逆元**：

対称群の逆元は確かに存在している。 π_1, π_2, π_3 の逆元は自分自身である。一方、 π_4, π_5 の逆元は

$$\pi_4^{-1} = \pi_5, \quad \pi_5^{-1} = \pi_4 \quad (1.48)$$

となっている。

• (4) **結合則**：

結合則が成り立っている事は簡単に示すことができる。その一例を書いておこう。

$$(\pi_1 \bullet \pi_2) \bullet \pi_3 = \pi_5 \bullet \pi_3 = \pi_2 \quad (1.49)$$

$$\pi_1 \bullet (\pi_2 \bullet \pi_3) = \pi_1 \bullet \pi_5 = \pi_2 \quad (1.50)$$

で一致している。これらより対称群は確かに群を形成している事が示された。

第2章 群の表現

物理学においては群の表現論 (Group Representation) が重要になっている。群を表現するとは、その群 G の要素 g を基底ベクトル (状態ベクトル) を用意して行列表現する事に対応している。従ってどのような基底を用意するかと言う事が最も重要な問題となっている。表現の基底をうまく選ぶとその表現行列は単純なものとなると言う事に対応している。

2.1 基底ベクトルと表現行列

今、基底ベクトルとして N 個の状態ベクトルを用意しよう。これを

$$\Psi : \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\} \quad (2.1)$$

としよう。この基底ベクトルでは N 次元表現に対応している。この時、表現とは

$$g\psi_i = \sum_{j=1}^N D(g)_{ji} \psi_j \quad (2.2)$$

と書いた時の $D(g)$ に対応している。この $D(g)$ を表現行列と言う。この場合、添え字が行列の和とは逆になっている事に注意しよう。

2.2 積表現

群 G の2個の要素 $g_1 g_2$ の積表現がどうなっているのか見てみよう。積表現の表現行列を $D(g_1 g_2)$ としよう。この時

$$g_1 g_2 \psi_i = \sum_{j=1}^N D(g_1 g_2)_{ji} \psi_j \quad (2.3)$$

となっている。この時、次の式が成り立っている。

$$D(g_1 g_2) = D(g_1) D(g_2) \quad (2.4)$$

この証明は簡単であるが、ここに書いておこう。

• $D(g_1 g_2) = D(g_1) D(g_2)$ の証明 :

これは $g_1 g_2$ を状態関数にオペレートして行けば示すことができる。すなわち

$$\begin{aligned} g_1 g_2 \psi_j &= g_1 \sum_{k=1}^N D(g_2)_{kj} \psi_k = \sum_{k,i=1}^N D(g_2)_{kj} D(g_1)_{ik} \psi_i \\ &= \sum_{i=1}^N [D(g_1) D(g_2)]_{ij} \psi_i = \sum_{i=1}^N D(g_1 g_2)_{ij} \psi_i \end{aligned} \quad (2.5)$$

となる。従って、これより

$$D(g_1 g_2) = D(g_1) D(g_2) \quad (2.6)$$

が証明された。

2.3 既約と可約

群 G の2つの表現 $D^{(1)}(g)$ と $D^{(2)}(g)$ からより大きな行列 $D(g)$ を

$$D(g) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(g) & 0 \\ 0 & D^{(2)}(g) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

と作った時、この $D(g)$ も群 G の表現となっている。この時、表現 $D(g)$ は表現 $D^{(1)}(g)$ と $D^{(2)}(g)$ の直和であると言い

$$D(g) = D^{(1)}(g) \oplus D^{(2)}(g) \quad (2.8)$$

と表記される。この時、表現 $D(g)$ は**可約** (reducible) であると言う。可約ではない表現を**既約表現** (irreducible) と言う。

2.4 群の表現の具体例

回転群などの表現行列を求める前に、まずは第1章で議論した群についてその表現を求めてみよう。これらは簡単な群のため、表現行列も簡単に計算する事ができる。

2.4.1 例題 1. $G = \{I, E_1, E_2, E_3\}$ の表現

群 G として

$$G = \{I, E_1, E_2, E_3\} \quad (2.9)$$

を考えて、その基本表現を求めておこう。状態ベクトルとして

$$\Psi : \{\psi_1 = I, \psi_2 = E_1, \psi_3 = E_2, \psi_4 = E_3\} \quad (2.10)$$

としよう。この時

$$E_1\psi_1 = E_1 = \psi_2 \quad (2.11)$$

$$E_1\psi_2 = E_1 \bullet E_1 = I = \psi_1 \quad (2.12)$$

$$E_1\psi_3 = E_1 \bullet E_2 = E_3 = \psi_4 \quad (2.13)$$

$$E_1\psi_4 = E_1 \bullet E_3 = E_2 = \psi_3 \quad (2.14)$$

と求まる。従って

$$E_1 \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

であるから E_1 の表現行列 $D(E_1)$ は

$$D(E_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

となっている。

2.4.2 例題 2. 対称群 S_2 $\{I, \pi_2\}$ の表現

簡単な例題として対称群 S_2 を考えよう。要素は2個であり I, π_2 である。今の場合

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

である。ここで状態ベクトルとして

$$\Psi : \{\psi_1 = u(1)v(2), \psi_2 = u(2)v(1)\} \quad (2.18)$$

としよう。この時

$$\begin{aligned} \pi_2 \psi_1 &= u(2)v(1) = \psi_2 \\ \pi_2 \psi_2 &= u(1)v(2) = \psi_1 \end{aligned} \quad (2.19)$$

と求まる。従って表現行列 $D(\pi_2)$ は

$$D(\pi_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

となっている。一方、状態ベクトルを

$$\Psi : \{\psi_1 = u(1)v(2) + u(2)v(1), \psi_2 = u(1)v(2) - u(2)v(1)\} \quad (2.21)$$

と選んでみよう。この時

$$\begin{aligned}\pi_2\psi_1 &= \psi_1 \\ \pi_2\psi_2 &= -\psi_2\end{aligned}\tag{2.22}$$

なので表現行列 $D(\pi_2)$ は

$$D(\pi_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\tag{2.23}$$

となっている。この場合は表現行列が対角的になっている。従って、この状態ベクトルは π_2 オペレータの固有関数になっている。

第3章 群論の応用

群論を量子力学へ応用する事は非常に重要である。特に Hamiltonian が空間回転に対して不変な場合がよくあるため、その対称性から得られる様々な性質は一般性があり応用範囲が広いものである。ここでは空間回転の対称性と関係している回転群やそれと同形の $SU(2)$ の群について簡単な解説をしよう。

3.1 状態関数の変換とオペレータの変換性

状態関数 ψ をユニタリーオペレータ $\hat{U}$ で変換するとは

$$\psi' = \hat{U}\psi \quad (3.1)$$

と状態関数にオペレータ $\hat{U}$ を掛けて演算を実行する事である。それでは、量子力学で良く出てくる一般のオペレータ $\hat{O}$ はどのように変換するのであろうか？これは変換する前と変換後におけるオペレータ $\hat{O}$ の期待値が同じであると言う要請から理解されることである。すなわち

$$\langle \psi' | \hat{O}' | \psi' \rangle = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle \quad (3.2)$$

である。よってこれは

$$\langle \psi | \hat{U}^\dagger \hat{O}' \hat{U} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle \quad (3.3)$$

となる事から

$$\hat{U}^\dagger \hat{O}' \hat{U} = \hat{O} \implies \hat{O}' = \hat{U} \hat{O} \hat{U}^{-1} \quad (3.4)$$

と求まる。例えば Hamiltonian $\hat{H}$ の場合、 $\hat{H}' = \hat{U} \hat{H} \hat{U}^{-1}$ となる。

3.2 Hamiltonian の対称性

今、Hamiltonian $\hat{H}$ がユニタリーオペレータ $\hat{U}$ の変換で不変であるとしよう。この時、数学的には

$$\hat{H}' = \hat{H} = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^{-1} \quad (3.5)$$

と書かれている。ユニタリーオペレータ $\hat{U}$ を考える理由は簡単でノルムが

$$\langle U\psi|U\psi\rangle = \langle\psi|U^\dagger U\psi\rangle = 1 \quad (3.6)$$

と保存されているからである。この対称性の式 (3.5) があると、Hamiltonian $\hat{H}$ の固有値は $\hat{U}$ の固有値で指定される事が示される。

● $\hat{H}$ 固有値が $\hat{U}$ の固有値で指定される事の証明 :

式 (3.5) から $\hat{H}$ と $\hat{U}$ は交換する。すなわち

$$\hat{H}\hat{U} = \hat{U}\hat{H} \quad (3.7)$$

である。今、 $\hat{H}$ の固有値と固有関数を E_a , ψ_a としよう。

$$\hat{H}\psi_a = E_a\psi_a \quad (3.8)$$

この式に左から $\hat{U}$ をオペレートして式 (3.7) を使うと

$$\begin{aligned} \hat{U}\hat{H}\psi_a &= E_a\hat{U}\psi_a \\ \hat{H}(\hat{U}\psi_a) &= E_a(\hat{U}\psi_a) \end{aligned} \quad (3.9)$$

となり、これは $\hat{U}\psi_a$ も $\hat{H}$ の固有関数であることを示している。よって $\hat{U}\psi_a$ は ψ_a に比例している。従って

$$\hat{U}\psi_a = k\psi_a \quad (3.10)$$

と書くことができる。この式は ψ_a が $\hat{U}$ の固有関数となっている事を表している。

3.2.1 エネルギー固有値の d -重縮退

ここで Hamiltonian $\hat{H}$ の固有値が d -重に縮退している場合を考えよう。従って

$$\hat{H}\psi_n = E\psi_n \quad (n = 1, 2, \dots, d) \quad (3.11)$$

である。ここで

$$\langle \psi_n | \psi_m \rangle = \delta_{nm} \quad (3.12)$$

は仮定されている。エネルギーは縮退していると言う事はそれに関連して、何かの対称性 $\hat{R}$ が必ず、存在しているはずである。すなわち

$$\hat{R}\hat{H}\hat{R}^{-1} = \hat{H} \quad (3.13)$$

となるようなオペレータ $\hat{R}$ が存在するはずである。この場合、

$$\hat{H}(\hat{R}\psi_n) = E(\hat{R}\psi_n) \quad (n = 1, 2, \dots, d) \quad (3.14)$$

が成り立っている。この式から状態関数 $\hat{R}\psi_n$ も同じエネルギー E の状態に属している事がわかる。従ってこれは

$$\hat{R}\psi_n = \sum_{m=1}^m D_{mn}(R)\psi_m \quad (3.15)$$

と ψ_n の線形結合で書かれている。この式は $D_{mn}(R)$ が表現行列に対応している事を示している。

● 空間回転不変性

特に、空間回転における Hamiltonian の不変性に関しては今後、詳しく議論して行く事になる。連続変換の対称性に関してはこの回転対称性が物理学では最も重要な問題である。

3.2.2 空間反転対称性

空間反転 (パリティ変換) $\mathbf{r} \Rightarrow -\mathbf{r}$ のオペレータを

$$\hat{P}\psi(\mathbf{r}) = \psi(-\mathbf{r}) \quad (3.16)$$

で定義しよう。単位オペレータ I を

$$\hat{I}\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) \quad (3.17)$$

で定義する。この時 $\{\hat{I}, \hat{P}\}$ は群を形成している。

● $\hat{P}$ の表現行列 :

ここで状態ベクトルとして

$$\Psi : \{\psi_1 = u(\mathbf{r}), \psi_2 = u(-\mathbf{r})\} \quad (3.18)$$

としよう。この時

$$\begin{aligned} \hat{P}\psi_1 &= \psi_2 \\ \hat{P}\psi_2 &= \psi_1 \end{aligned} \quad (3.19)$$

と求まる。従って表現行列 $D(\hat{P})$ は

$$D(\hat{P}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

となっている。これは対称群 S_2 と全く同じ表現行列である。

3.3 回転対称性 (3次元空間)

空間回転における対称性について解説しよう。まず座標 $\mathbf{r}$ を z -軸周りに θ だけ回転した時、その回転したあとの座標を $\mathbf{r}'$ としよう。すなわち

$$\mathbf{r}' = \hat{R}_\theta \mathbf{r} \quad (3.21)$$

である。ここで $\hat{R}_\theta$ は回転のオペレータであり式 (3.21) が

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

である事から

$$\hat{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

となっている。

3.3.1 $\hat{R}_\theta$ は群をなす

この $\hat{R}_\theta$ は群を形成している事を示そう。

• $\hat{R}_{\theta_1} \hat{R}_{\theta_2}$ も回転オペレータ :

今、2個の回転の積 $\hat{R}_{\theta_1} \hat{R}_{\theta_2}$ を考えてみよう。この時、

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\theta_1} \hat{R}_{\theta_2} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{R}_{\theta_1 + \theta_2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

となり確かに、これも回転演算子となっている。

● **単位オペレータ：**

これは簡単で $\theta = 0$ の時で $\hat{R}_\theta = I$ に対応する。

● **逆元オペレータ：**

この場合 $(\hat{R}_\theta)^{-1} = \hat{R}_{-\theta}$ に対応する。

● **結合則：**

これは簡単なので省略しよう。従って、 $\hat{R}_\theta$ は確かに群を形成している事が示された。この場合、 $\hat{R}_\theta$ は直交行列であり、

$$\hat{R}_\theta (\hat{R}_\theta)^t = 1 \quad (3.25)$$

を満たしている。

3.3.2 状態関数に対する回転群演算子

これまで見てきた空間回転のオペレータは座標を回転するものである。それでは状態関数に対する回転のオペレータはどうなっているのでしょうか？このオペレータを $\hat{R}_z(\theta)$ としよう。この場合

$$\psi'(\mathbf{r}) = \hat{R}_z(\theta)\psi(\mathbf{r}) \quad (3.26)$$

となる。これは z -軸の周りの θ 回転を意味している。座標と状態関数を同時に回転すれば元に戻るので

$$\psi'(\mathbf{r}') = \psi(\mathbf{r}) \quad (3.27)$$

となっている。これより

$$\psi'(\mathbf{r}) = \psi(\hat{R}_\theta^{-1}\mathbf{r}) \quad (3.28)$$

となっている。ここで θ が充分小さい場合 $\theta \ll 1$ を考えよう。この時

$$\hat{R}_\theta^{-1} \simeq \begin{pmatrix} 1 & \theta & 0 \\ -\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

なので $\psi(\hat{R}_\theta^{-1}\mathbf{r})$ は

$$\begin{aligned}\psi'(\mathbf{r}) &= \psi(\hat{R}_\theta^{-1}\mathbf{r}) = \psi(x + \theta y, y - \theta x, x) \\ &= \left[1 + \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \theta + \cdots \right] \psi(\mathbf{r})\end{aligned}\quad (3.30)$$

である。一方、角運動量 ℓ_z は

$$\ell_z = -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (3.31)$$

である。但し $\hbar = 1$ としている。これより

$$\hat{R}_z(\theta) \simeq (1 - i\ell_z\theta + \cdots) \quad (3.32)$$

となる。これは θ が充分小さい場合であるが、 θ が有限の場合は以下のように計算する。 $\frac{\theta}{n}$ を n 回だけ回転させると

$$\hat{R}_z(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{i\ell_z\theta}{n} \right)^n = e^{-i\ell_z\theta} \quad (3.33)$$

となる事がわかる。これが状態関数を θ だけ回転させるオペレータとなっている。

• $\hat{R}_z(\theta) = e^{-i\ell_z\theta}$ は群を形成する :

この場合、 z -軸周りの回転だけなので単純である。このため この証明は省略しよう。実際の回転群はすべての角度によるものとなり、これはかなり難しい問題となっている。以下にできる限り平明に解説して行こう。

3.3.3 Euler 角と回転群演算子

任意の角度の回転を考えると3つの自由度が必要となる事が Euler により示されている。それは Euler 角と呼ばれるものであり、この Euler 角は (α, β, γ) で表されている。この Euler 角により3次元の回転は正確に記述される事が分かっている。Euler 角による回転の演算子 $\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma)$ は次のように表す事ができる。

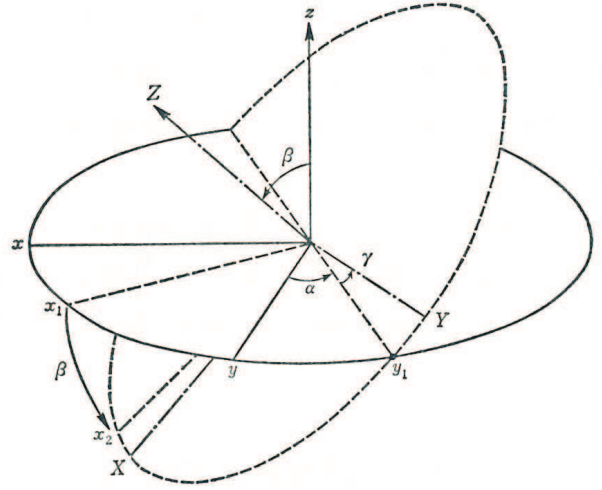


図 3.1: Euler 角

3.3.4 回転演算子 $\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma)$ の性質

この回転演算子 $\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma)$ は

$$\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha\ell_z} e^{-i\beta\ell_y} e^{-i\gamma\ell_z} \quad (3.34)$$

と書かれている。これが何故、このような形になったのかを簡単に解説しよう。これは図を見ながら考えて行くことが大切である。これは Euler 角の回転演算子についてこの式に至るまでの経過を見て行く事になるが、このためにはそれぞれのステップを検証する事が必要となる。しかしながらこの過程はかなり複雑であり、しっかり考えないと良くわからない事であると言える。

● 第一ステップ

最初に z -軸の周りに α だけ回転しよう。これは $\hat{R}_z(\alpha)$ である。

● 第二ステップ

次に y_1 -軸周りに β だけ回転しよう。これは

$$\hat{R}_{y_1}(\beta) = \hat{R}_z(\alpha) \hat{R}_y(\beta) \hat{R}_z^{-1}(\alpha) \quad (3.35)$$

と書かれている。

● 第三ステップ

次に Z -軸周りに γ だけ回転しよう。これは

$$\hat{R}_Z(\gamma) = \hat{R}_{y_1}(\beta) \hat{R}_z(\gamma) \hat{R}_{y_1}^{-1}(\beta) \quad (3.36)$$

と書かれている。

● 連続操作

従ってこれを連続して操作すると

$$\begin{aligned} \hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) &= \hat{R}_Z(\gamma) \hat{R}_{y_1}(\beta) \hat{R}_z(\alpha) \\ &= \hat{R}_{y_1}(\beta) \hat{R}_z(\gamma) \hat{R}_{y_1}^{-1}(\beta) \hat{R}_z(\alpha) \hat{R}_y(\beta) \hat{R}_z^{-1}(\alpha) \hat{R}_z(\alpha) \\ &= \hat{R}_z(\alpha) \hat{R}_y(\beta) \hat{R}_z^{-1}(\alpha) \hat{R}_z(\gamma) \hat{R}_z(\alpha) \hat{R}_y^{-1}(\beta) \hat{R}_z^{-1}(\alpha) \hat{R}_z(\alpha) \hat{R}_y(\beta) \hat{R}_z^{-1}(\alpha) \hat{R}_z(\alpha) \\ &= \hat{R}_z(\alpha) \hat{R}_y(\beta) \hat{R}_z(\gamma) = e^{-i\alpha\ell_z} e^{-i\beta\ell_y} e^{-i\gamma\ell_z} \end{aligned}$$

となる。これが Euler 角 (α, β, γ) による回転演算子である。

3.4 角運動量 ℓ とその固有関数

回転群のオペレータ $\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha\ell_z} e^{-i\beta\ell_y} e^{-i\gamma\ell_z}$ の $\exp$ の肩に現われる ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z の事を生成子 (generator) と言う。これは角運動量演算子である。ここでは角運動量演算子の性質とその固有関数について解説しよう。

● Lie 代数

この要素間の演算は交換関係で

$$[\ell_x, \ell_y] = i\ell_z, \quad [\ell_y, \ell_z] = i\ell_x, \quad [\ell_z, \ell_x] = i\ell_y \quad (3.37)$$

が成り立っている。これを Lie 代数と言う。但し、これは群を作っていない。単位オペレータが存在しないし、逆元もないからである。

● Casimir オペレータ

ここで $\ell^2 = \ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2$ を定義する。この場合、簡単な計算で

$$[\ell^2, \ell_i] = 0, \quad (i = x, y, z) \quad (3.38)$$

が証明される。この Casimir オペレータは $O(3)$ と $SU(2)$ に関しては1個存在している。一方、 $SU(3)$ の場合、2個の Casimir オペレータが存在している。

3.4.1 球面調和関数

角運動量演算子 ℓ^2, ℓ_z の固有関数が球面調和関数 $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ である。従って

$$\ell^2 Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \ell(\ell + 1) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (3.39)$$

$$\ell_z Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = m Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (3.40)$$

となっている。ほとんどの場合、これは簡略化して

$$\ell^2 |\ell m\rangle = \ell(\ell + 1) |\ell m\rangle \quad (3.41)$$

$$\ell_z |\ell m\rangle = m |\ell m\rangle \quad (3.42)$$

と書かれている。

● 球面調和関数の性質

球面調和関数は空間反転に対して

$$Y_{\ell m}(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-)^{\ell} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (3.43)$$

となる。また直交性

$$\int Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell m'}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{m, m'} \quad (3.44)$$

そして加法定理

$$\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \frac{2\ell + 1}{4\pi} \quad (3.45)$$

が成り立っている。また $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ の具体的な表現として

$$\begin{aligned} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) &= \frac{(-)^{\ell+m}}{(2\ell)!!} \sqrt{\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!}} (\sin \theta)^m \\ &\quad \times \frac{d^{\ell+m}}{(d \cos \theta)^{\ell+m}} (\sin \theta)^{2\ell} e^{im\varphi} \end{aligned} \quad (3.46)$$

と書かれる。

3.4.2 合成角運動量の固有関数

ここで2個の角運動量 ℓ_1, ℓ_2 を考えて、その和である $\mathbf{L} = \ell_1 + \ell_2$ の固有関数を求めよう。 ℓ_1, ℓ_2 それぞれの固有関数は

$$\ell_1^2 |\ell_1 m_1\rangle = \ell_1(\ell_1 + 1) |\ell_1 m_1\rangle, \quad \ell_{1z} |\ell_1\rangle = m_1 |\ell_1 m_1\rangle \quad (3.47)$$

$$\ell_2^2 |\ell_2 m_2\rangle = \ell_2(\ell_2 + 1) |\ell_2 m_2\rangle, \quad \ell_{2z} |\ell_2\rangle = m_2 |\ell_2 m_2\rangle \quad (3.48)$$

としよう。この時、 $\mathbf{L}^2$ の固有関数 $|LM\rangle$ は

$$|LM\rangle = \sum_{m_1, m_2} (\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 | LM) |\ell_1 m_1\rangle |\ell_2 m_2\rangle, \quad \text{with } (M = m_1 + m_2) \quad (3.49)$$

と書かれている。ここで $(\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 | LM)$ は Clebsch-Gordan 係数と呼ばれている。これは状態 $|LM\rangle$ が $\mathbf{L}^2$, L_z の固有関数

$$\mathbf{L}^2 |LM\rangle = L(L+1) |LM\rangle \quad (3.50)$$

$$L_z |LM\rangle = M |LM\rangle \quad (3.51)$$

になるように決められたものである。この Clebsch-Gordan 係数の決め方は少し面倒なのでここでは省略しよう。この式 (3.49) を逆に解いた式も成り立っている。

$$|\ell_1 m_1\rangle |\ell_2 m_2\rangle = \sum_{LM} (\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 | LM) |LM\rangle \quad (3.52)$$

● Clebsch-Gordan 係数の性質

ここで Clebsch-Gordan 係数の最も基本的な性質を書いて置こう。

$$\sum_{m_1, m_2} (\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 | LM) (\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 | LM') = \delta_{M, M'} \quad (3.53)$$

$$\sum_{JM} (\ell_1 m_1 \ell_2 m_2 | LM) (\ell_1 m'_1 \ell_2 m'_2 | LM) = \delta_{m_1, m'_1} \delta_{m_2, m'_2} \quad (3.54)$$

これは Clebsch-Gordan 係数の直交性である。他の基本的な性質として

$$(J_1 M_1 J_2 M_2 | JM) = (-)^{J_1+J_2-J} (J_2 M_2 J_1 M_1 | JM) \quad (3.55)$$

$$= (-)^{J_1+J_2-J} (J_1 - M_1 J_2 - M_2 | J - M) \quad (3.56)$$

が重要であろう。この CG 係数は 3j シンボル

$$(J_1 M_1 J_2 M_2 | JM) = (-)^{J_1-J_2+M} \sqrt{2J+1} \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J \\ M_1 & M_2 & -M \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

と結びついている。この 3j シンボルには次のような簡単な対称性がある。

$$\begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_3 & J_1 & J_2 \\ M_3 & M_1 & M_2 \end{pmatrix} = (-)^{J_1+J_2+J_3} \begin{pmatrix} J_2 & J_1 & J_3 \\ M_2 & M_1 & M_3 \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

3.4.3 全角運動量 $\mathbf{J} = \ell + \mathbf{s}$ とスピン $\mathbf{s}$

電子を考えるとその粒子の全角運動量は $\mathbf{J} = \ell + \mathbf{s}$ となりスピン部分も足される事になる。但し $s = \frac{1}{2}$ である。この場合、全角運動量 $\mathbf{J}^2$, J_z の固有関数を作るために Clebsch-Gordan 係数が必要であった。実際、その固有状態は

$$|JM\rangle = \sum_{m, m_s} \left(\ell m \frac{1}{2} m_s | LM \right) Y_{\ell m} \chi_{m_s} \quad (3.59)$$

となっている。この場合、 J は必ず、半整数となっている。ここで χ_{m_s} はスピンの状態関数であり、今の場合 $\mathbf{s}^2$, s_z の固有関数として

$$\chi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

をとっている。実際

$$\mathbf{s}^2 \chi_{m_s} = \frac{3}{4} \chi_{m_s}, \quad s_z \chi_{m_s} = m_s \chi_{m_s} \quad (3.61)$$

である。この $\mathbf{J}^2$ についてその固有値 J が半整数である。しかし $\mathbf{J}$ はリー代数を満たしているため、整数の場合と同じように取り扱っても特に問題となる事はない。

● $\mathbf{J}^2$ の固有関数

ここで $\mathbf{J}^2$, J_z の固有関数を書いて置こう。

$$|jm\rangle = \sum_{m, m_s} \left(\ell m \frac{1}{2} m_s | jm \right) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \chi_{m_s} \quad (3.62)$$

今の場合、Clebsch-Gordan 係数が解析的に書かれているので $j = \ell \pm \frac{1}{2}$ に対して

$$|\ell \pm \frac{1}{2}, m\rangle = \pm \sqrt{\frac{\ell \pm m + \frac{1}{2}}{2\ell + 1}} Y_{\ell, m - \frac{1}{2}} \chi_{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{\ell \mp m + \frac{1}{2}}{2\ell + 1}} Y_{\ell, m + \frac{1}{2}} \chi_{-\frac{1}{2}} \quad (3.63)$$

となる。ここで $j = \ell \pm \frac{1}{2}$ に対して複合同順とする。

3.4.4 回転オペレータ $\hat{R}$ と表現行列 $D_{m'm}^{(\ell)}$

回転オペレータ $\hat{R}$ を $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ にオペレートすると

$$\hat{R}Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \sum_{m'=-\ell}^{\ell} D_{m'm}^{(\ell)} Y_{\ell m'}(\theta, \varphi) \quad (3.64)$$

となる。この $D_{m'm}^{(\ell)}$ が回転オペレータ $\hat{R}$ の表現行列となっている。具体的な形は第4章で求める事になる。

● 既約テンソルオペレータ $T_{\kappa}^{(k)}$

ここで既約テンソルオペレータ $T_{\kappa}^{(k)}$ を

$$\hat{R}T_{\kappa}^{(k)}\hat{R}^{-1} = \sum_{m'=-k}^k D_{m'\kappa}^{(k)} T_{m'}^{(k)} \quad (3.65)$$

により定義しよう。この $T_{\kappa}^{(k)}$ は基本的には空間回転における性質が $Y_{k\kappa}$ と同じとなっている。従って回転における性質は $Y_{k\kappa}$ に比例しているので

$$T_{\kappa}^{(k)} \simeq C_0 Y_{k\kappa}, \quad (C_0 \text{ 定数}) \quad (3.66)$$

と考えてめったに間違える事はない。直感的にはこれで十分と言える。

3.4.5 Wigner-Eckart の定理

回転群の応用で重要な定理が Wigner-Eckart の定理である。これは既約テンソルオペレータ $T_{\kappa}^{(k)}$ を状態 $|jm\rangle$ と $|j'm'\rangle$ で期待値を取った場合、その z -成分の影響はすべて Clebsch-Gordan 係数で決められると言うものである。式で書くと

$$\langle jm|T_{\kappa}^{(k)}|j'm'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} (j'm'k\kappa|jm) \langle j||T^{(k)}||j'\rangle \quad (3.67)$$

となるという定理である。ここで $\langle j||T^{(k)}||j'\rangle$ はダブルバー行列要素と呼ばれるもので、これは磁気量子数 m, m', κ には依らない。磁気量子数の依存性はすべて Clebsch-Gordan 係数の中に入っている。

● Wigner-Eckart の定理の証明

この定理の証明は比較的簡単である。まずは $T_{\kappa}^{(k)}$ と $|j' m'\rangle$ の合成状態を作ろう。この場合、式 (3.52) より

$$T_{\kappa}^{(k)} |j' m'\rangle = C(T^{(k)}) \sum_{JM} (j' m' k \kappa | JM) |J M\rangle \quad (3.68)$$

と書くことができる。ここで $C(T^{(k)})$ は $T_{\kappa}^{(k)}$ の大きさにのみ関係する量である。また合成された角運動量は JM である。この式 (3.68) を用いて式 (3.67) の左辺を計算すると

$$\langle jm | T_{\kappa}^{(k)} | j' m' \rangle = C(T^{(k)}) \sum_{JM} (j' m' k \kappa | JM) \langle jm | J M \rangle \quad (3.69)$$

$$= C(T^{(k)}) \sum_{JM} (j' m' k \kappa | JM) \delta_{jJ} \delta_{mM} \quad (3.70)$$

$$= C(T^{(k)}) (j' m' k \kappa | jm) \quad (3.71)$$

となる。よって

$$C(T^{(k)}) = \frac{\langle j || T^{(k)} || j' \rangle}{\sqrt{2j+1}} \quad (3.72)$$

とおけば Wigner-Eckart の定理が証明された事になっている。

$$\langle jm | T_{\kappa}^{(k)} | j' m' \rangle = (j' m' k \kappa | jm) \frac{\langle j || T^{(k)} || j' \rangle}{\sqrt{2j+1}}$$

3.5 Isospin 空間

陽子と中性子の質量はほとんど同じである。実際、

$$\begin{aligned} M_p &= 938.3 \text{ MeV} \\ M_n &= 939.6 \text{ MeV} \end{aligned}$$

となっている。また強い相互作用をすると言う点でも同じである。このため、この二つを核子と総称している。そしてその違いである電荷は Isospin の量子数の違いにより分類して行く事になる。

3.5.1 Isospin 空間

Isospin 空間は次の Pauli 行列によって記述されている。この場合、Isospin オペレータ t は

$$t = \frac{1}{2}\tau \quad (3.73)$$

であり、 τ は Pauli 行列である。これは下記のように書かれている。

$$\begin{aligned} \tau &= (\tau_x, \tau_y, \tau_z) \\ \tau_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.74)$$

また陽子と中性子の状態を

$$\begin{aligned} |p\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |n\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.75)$$

と定義している。この時、陽子と中性子は τ_z の固有状態となっていて

$$\begin{aligned} \tau_z |p\rangle &= |p\rangle \\ \tau_z |n\rangle &= -|n\rangle \end{aligned} \quad (3.76)$$

である。従ってこれらの isospin は

$$\begin{aligned} t_z|p\rangle &= \frac{1}{2}|p\rangle \\ t_z|n\rangle &= -\frac{1}{2}|n\rangle \end{aligned} \quad (3.77)$$

である。電荷の演算子 Q は $Q = \frac{1}{2}(1 + \tau_z)$ と定義されている。よって

$$\begin{aligned} Q|p\rangle &= |p\rangle \\ Q|n\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (3.78)$$

となる。

3.5.2 Isospin 空間における回転

3次元空間での回転 (z -軸周り) は

$$\hat{R}_z(\theta) = e^{-i\ell_z\theta} \quad (3.79)$$

であった。これと同様に Isospin 空間における回転を考えよう。Isospin 空間において z -軸周りに α 回転するオペレータは

$$\hat{R}_z(\alpha) = e^{-i\alpha t_z} \quad (3.80)$$

と定義される。この式は

$$\hat{R}_z(\alpha) = \cos \frac{\alpha}{2} - i\tau_z \sin \frac{\alpha}{2} \quad (3.81)$$

と書く事ができる。この証明は簡単に $\exp$ を Taylor 展開すれば

$$\begin{aligned} \hat{R}_z(\alpha) &= e^{-i\alpha t_z} = 1 - \frac{i\alpha}{2}\tau_z - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{-i\alpha}{2}\right)^3\tau_z + \frac{1}{4!}\left(\frac{-i\alpha}{2}\right)^4 + \cdots \\ &= \cos \frac{\alpha}{2} - i\tau_z \sin \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \quad (3.82)$$

となるからである。

3.5.3 Isospin 空間のスカラー

核力を考える時に、それは Isospin 空間でスカラーとなっている必要がある。実際、2体の核力 V_{NN} は

$$V_{NN} = [a + b(\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)] V_0(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \quad (3.83)$$

と書かれている。ここで a, b は定数である。

• $\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2$ はアイソスカラー :

この $\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2$ が Isospin 空間でスカラーである事を示そう。まず全アイソスピン $\mathbf{T}$ を

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2) \quad (3.84)$$

で定義しよう。ここで Isospin 空間でスカラーであるとは、Isospin 空間での回転

$$R_\alpha(T_i) = e^{-i\alpha T_i} \quad (3.85)$$

に対して不変となっている事である。但し、 T_i は T_x, T_y, T_z を表している。ここで $\mathbf{T}^2$ を計算すると

$$\mathbf{T}^2 = \frac{1}{4}(\boldsymbol{\tau}_1^2 + \boldsymbol{\tau}_2^2 + 2\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) = \frac{1}{2}(3 + \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \quad (3.86)$$

となる。一方、

$$[\mathbf{T}^2, T_i] = 0, \quad (i = x, y, z) \quad (3.87)$$

が簡単に証明される。従って、微小の α に対して $\mathbf{T}^2$ を回転すると

$$R_\alpha(T_i) \mathbf{T}^2 R_\alpha^{-1}(T_i) = \mathbf{T}^2 + i\alpha[\mathbf{T}^2, T_i] + \cdots = \mathbf{T}^2 \quad (3.88)$$

となり、回転に対して不変であることが示された。これより $\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2$ が Isospin 空間でスカラーである事が示された。

3.5.4 T^2 の固有値

2体の核力を考える時、その状態のアイソスピンが重要になる事がある。簡単な計算ではあるが、結果だけでも書いておこう。 T^2 の固有値はその固有関数を Φ_T とすると

$$T^2 \Phi_T = T(T+1) \Phi_T \quad (3.89)$$

となる。核子のアイソスピンは $t = \frac{1}{2}$ なので $T = 0, 1$ が可能な量子数となる。

● $T = 0$ の場合 (singlet) :

その状態関数は

$$\Phi_0^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|p\rangle_1 |n\rangle_2 - |n\rangle_1 |p\rangle_2) \quad (3.90)$$

となる。この場合

$$\tau_1 \cdot \tau_2 \Phi_0^{(0)} = -3 \Phi_0^{(0)} \quad (3.91)$$

である。

● $T = 1$ の場合 (triplet) :

その状態関数は

$$\Phi_1^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|p\rangle_1 |n\rangle_2 + |n\rangle_1 |p\rangle_2), \quad \Phi_1^{(1)} = |p\rangle_1 |p\rangle_2, \quad \Phi_1^{(-1)} = |n\rangle_1 |n\rangle_2 \quad (3.92)$$

と3個の状態が存在している。この時

$$\tau_1 \cdot \tau_2 \Phi_1^{(n)} = \Phi_1^{(n)}, \quad (n = -1, 0, 1) \quad (3.93)$$

となる。

3.5.5 アイソベクトル T の回転

ここで例えば T_z は回転 $R_\alpha(T_x) = e^{-i\alpha T_x}$ に対して不変とはなっていない。これは簡単な計算で

$$R_\alpha(T_x) T_z R_\alpha^{-1}(T_x) = e^{-i\alpha T_x} T_z e^{i\alpha T_x} = T_z \cos \alpha - T_y \sin \alpha \quad (3.94)$$

となる事から不変ではないことがわかる。この事は T_i がアイソベクトルであるため、回転に対して動いてしまう事に対応している。不変量はスカラーだけである。

3.5.6 Pauli 行列と SU(2)

SU(2) は special unitary の 2 行 2 列の行列である。この群の要素 u は

$$u = e^{iH} \quad (3.95)$$

と書くことができる。この場合、 $u u^\dagger = 1$ より

$$u u^\dagger = e^{iH} e^{-iH^\dagger} = e^{i(H-H^\dagger)} = 1 \quad (3.96)$$

これより

$$H = H^\dagger, \quad (H : \text{Hermite matrix}) \quad (3.97)$$

すなわち、 H は Hermite 行列であることがわかる。従って

$$H = \begin{pmatrix} a & b - ic \\ b + ic & d \end{pmatrix} \quad (3.98)$$

と書くことができる。ここで a, b, c, d は実数である。この式は

$$H = \begin{pmatrix} a & b - ic \\ b + ic & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.99)$$

と変形される。これは Pauli 行列 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ により

$$H = a' + b \sigma_x + c \sigma_y + d' \sigma_z \quad (3.100)$$

と書かれている。ここで定数は任意である。

第4章 回転群 $O(3)$ の表現

回転群は3次元空間の回転に関して構成されている。これは $O(3)$ とも呼ばれているが、この群は3行3列の直交行列で構成されている。ここではこの回転群の表現行列を求めて行こう。

4.1 回転群 $O(3)$

回転群のオペレータは Euler 角 α, β, γ により指定され

$$\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z} \quad (4.1)$$

と書かれている。ここで J_x, J_y, J_z は generator であり、リー代数を満たしている。すなわち

$$[J_x, J_y] = iJ_z, \quad [J_y, J_z] = iJ_x, \quad [J_z, J_x] = iJ_y \quad (4.2)$$

が成り立つ。

4.1.1 J^2 の固有値

ここで $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ と定義しよう。これは Casimir オペレータであり

$$[J^2, J_i] = 0, \quad (i = x, y, z) \quad (4.3)$$

が成立している。ここでは J_z が対角的になるような基底をとろう。すなわち

$$J^2 |JM\rangle = J(J+1) |JM\rangle \quad (4.4)$$

$$J_z |JM\rangle = M |JM\rangle \quad (4.5)$$

と取る。但し、以降は $|M\rangle \equiv |JM\rangle$ と表記しよう。この場合

$$\langle M|J_z|M'\rangle = M\delta_{MM'} \quad (4.6)$$

となる。ここで $J_{\pm}$ を

$$J_{\pm} = J_x \pm iJ_y \quad (4.7)$$

で定義しよう。この時、簡単な計算で

$$[J_z, J_{\pm}] = \pm J_{\pm} \quad (4.8)$$

が示される。ここでこの式 $J_z J_{\pm} - J_{\pm} J_z = \pm J_{\pm}$ を状態 $|M\rangle, |M'\rangle$ で挟むと

$$\begin{aligned} \langle M|J_z J_{\pm} - J_{\pm} J_z|M'\rangle &= \pm \langle M|J_{\pm}|M'\rangle \\ \text{書き直して} \quad (M - M' \mp 1)\langle M|J_{\pm}|M'\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

となる。これより $M' = M \mp 1$ 以外では $\langle M|J_{\pm}|M'\rangle = 0$ であることがわかる。よってゼロでない行列要素を

$$\langle M|J_+|M-1\rangle = A \quad (4.10)$$

$$\langle M|J_-|M+1\rangle = B \quad (4.11)$$

として A, B を求めて行く。一方、

$$J_- J_+ = \mathbf{J}^2 - J_z^2 - J_z = |J_+|^2 \geq 0 \quad (4.12)$$

である。ここで $-J \leq M \leq J$ を考慮すると、この式から

$$\langle J|J_- J_+|J\rangle = \langle J|\mathbf{J}^2 - J_z^2 - J_z|J\rangle = \langle J|\mathbf{J}^2|J\rangle - J(J+1) = 0 \quad (4.13)$$

が求まる。これより

$$\langle J|\mathbf{J}^2|J\rangle = J(J+1) \quad (4.14)$$

が得られる。

4.1.2 $J_{\pm}$ の行列要素

次に $J_{\pm}$ の行列要素 ($\langle M|J_+|M-1\rangle$ と $\langle M|J_-|M+1\rangle$) を求めてみよう。簡単な計算で

$$[J_+, J_-] = 2J_z \quad (4.15)$$

を示すことができる。この式を $|M\rangle$ の状態で挟むと

$$|\langle M-1|J_-|M\rangle|^2 - |\langle M|J_-|M+1\rangle|^2 = 2M \quad (4.16)$$

が得られる。ここで $F(M) \equiv |\langle M-1|J_-|M\rangle|^2$ と定義すると式 (4.16) は

$$F(M) - F(M+1) = 2M \quad (4.17)$$

となる。この式から任意の k に対して

$$F(M) - F(M+k) = 2Mk + k(k+1) \quad (4.18)$$

が成り立つ事が示される。これは数列の問題を解くのと同一ような手法により求めることができる。ここで $k = J - M + 1$ とおくと

$$F(M) - F(J+1) = (J-M+1)(J+M) \quad (4.19)$$

となる。今、 $F(J+1) = 0$ なので、結局

$$\langle M-1|J_-|M\rangle = \sqrt{(J-M+1)(J+M)} \quad (4.20)$$

が求まる。同様に

$$\langle M+1|J_+|M\rangle = \sqrt{(J-M)(J+M+1)} \quad (4.21)$$

となっている。但し、このルートの前に現れる位相は無視している。

4.2 D 関数の計算

回転群のオペレータは

$$\hat{R}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z} \quad (4.22)$$

であった。ここでこの行列要素を

$$D_{MK}^{(J)}(R) \equiv \langle M | e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z} | K \rangle \quad (4.23)$$

と定義しよう。これからこの $D_{MK}^{(J)}(R)$ を求めて行こう。この計算はかなり大変ではあるが、しかし何とか計算して結果を得る事が可能である。後で $SU(2)$ による計算と比較して見るとわかるが、 $SU(2)$ による手法の方がはるかに簡単である。これから期待値を取る前の D 関数

$$D^{(J)}(R^{-1}) = e^{i\gamma J_z} e^{i\beta J_y} e^{i\alpha J_z} \quad (4.24)$$

に対する微分方程式を立てて、それを解いて形を決める作業をして行こう。

4.2.1 $D^{(J)}(R^{-1})$ に対する微分方程式

まずは $D^{(J)}(R^{-1})$ を α で微分しよう。これは簡単に計算できて

$$-i \frac{\partial}{\partial \alpha} D^{(J)}(R^{-1}) = D^{(J)}(R^{-1}) J_z \quad (4.25)$$

となる。次に β で微分しよう。この場合

$$-i \frac{\partial}{\partial \beta} D^{(J)}(R^{-1}) = e^{i\gamma J_z} e^{i\beta J_y} J_y e^{i\alpha J_z} = e^{i\gamma J_z} e^{i\beta J_y} e^{i\alpha J_z} e^{-i\alpha J_z} J_y e^{i\alpha J_z}$$

と変形できる。ここで $\boxed{e^{-i\alpha J_z} J_y e^{i\alpha J_z} = J_{y_1}}$ に注意すると

$$-i \frac{\partial}{\partial \beta} D^{(J)}(R^{-1}) = D^{(J)}(R^{-1}) J_{y_1} \quad (4.26)$$

と求まる。さらに γ で微分しよう。ここで $\boxed{\left(D^{(J)}(R^{-1})\right)^{-1} J_z D^{(J)}(R^{-1}) = J_Z}$ に注意すると

$$-i \frac{\partial}{\partial \gamma} D^{(J)}(R^{-1}) = J_z D^{(J)}(R^{-1}) = D^{(J)}(R^{-1}) J_Z \quad (4.27)$$

と求まる。

● J_x, J_y, J_z の座標系回転

ここで J_x, J_y の座標系の回転を行おう。 z -軸周りの α 回転は

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{x_1} \\ J_{y_1} \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

なので

$$J_{\pm} = J_x \pm iJ_y = e^{\pm i\alpha} (J_{x_1} \pm iJ_{y_1}) \quad (4.29)$$

が示される。同様にして J_X, J_Z に対して β 回転すると

$$\begin{pmatrix} J_X \\ J_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{x_1} \\ J_{z_1} \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

となる。従って

$$J_Z = J_{x_1} \sin \beta + J_z \cos \beta \quad (4.31)$$

となっている。ここで $J_{z_1} = J_z$ を使っている。

● 変数 β の微分方程式

$J_{\pm}$ を変形すると

$$J_{\pm} = e^{\pm i\alpha} \left(\frac{1}{\sin \beta} (J_Z - J_z \cos \beta) \pm iJ_{y_1} \right) \quad (4.32)$$

と求まる。従って

$$D^{(J)}(R^{-1})J_{\pm} = e^{\pm i\alpha} D^{(J)}(R^{-1}) \left(\pm iJ_{y_1} + \frac{1}{\sin \beta} (J_Z - J_z \cos \beta) \right) \quad (4.33)$$

となる。ここで式 (4.25), (4.26), (4.27) を用いると上式は

$$e^{\pm i\alpha} \left[\pm \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\sin \beta} \left(-\frac{\partial}{\partial \gamma} + \cos \beta \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) \right] D^{(J)}(R^{-1}) = D^{(J)}(R^{-1})J_{\pm} \quad (4.34)$$

と求まる。この式を $|K\rangle$ と $|M\rangle$ 状態で期待値を取ると

$$\left[\pm \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\sin \beta} (K - M \cos \beta) \right] D_{MK}^{(J)}(\beta)^* \quad (4.35)$$

$$= D_{M\pm 1, K}^{(J)}(\beta)^* \sqrt{(J \mp M)(J \pm M + 1)} \quad (4.36)$$

となる。但し

$$D_{MK}^{(J)}(\beta) \equiv \langle M | e^{-i\beta J_y} | K \rangle \quad (4.37)$$

と定義している。

4.2.2 微分方程式の解

この微分方程式を解いて行こう。まず特別な場合を考えよう。

● $M = J$ の場合：

この場合、微分方程式は

$$\left[\frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\sin \beta} (K - J \cos \beta) \right] D_{MK}^{(J)}(\beta)^* = 0 \quad (4.38)$$

となる。この $D_{MK}^{(J)}(\beta)$ は実数なので*を外すと微分方程式は

$$\frac{dD_{JK}^{(J)}(\beta)}{d\beta} = -\frac{1}{\sin \beta} (K - J \cos \beta) D_{JK}^{(J)}(\beta) \quad (4.39)$$

となる。これは直ちに解けて

$$\ln D_{JK}^{(J)}(\beta) = -K \ln \tan \frac{\beta}{2} + J \ln \sin \beta + C_0 \quad (4.40)$$

と求まる。 C_0 は積分定数である。よって

$$D_{JK}^{(J)}(\beta) = A_0 \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{J-K} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{J+K} \quad (4.41)$$

となる事がわかる。ここで A_0 は定数である。

● 一般の M の場合：

M が一般の場合、逐次法によって解く事ができる。ここではその結果だけを書いておこう。

$$D_{MK}^{(J)}(\beta) = (-)^{M-K} \sqrt{\frac{(J+M)!}{(J-M)!(J+K)!(J-K)!}} \times \\ \zeta^{-\frac{(M-K)}{2}} (1-\zeta)^{-\frac{(M+K)}{2}} \left(\frac{d}{d\zeta} \right)^{J-M} \zeta^{J-K} (1-\zeta)^{J+K} \quad (4.42)$$

但し、 $\zeta = \sin^2 \frac{\beta}{2}$ である。これより、一般的な D 関数 $D_{MK}^{(J)}(R)$ は

$$D_{MK}^{(J)}(R) = e^{-i\alpha M - i\gamma K} D_{MK}^{(J)}(\beta) \quad (4.43)$$

と書くことができる。

4.2.3 D 関数の例題

具体的な例をいくつか挙げておこう。

● $J = \frac{1}{2}$ の D 関数

$J = \frac{1}{2}$ の場合の D 関数は直接、計算する事ができる。これは D 関数の定義より

$$D_{MK}^{(\frac{1}{2})}(\beta) = \langle M | e^{-\frac{i}{2}\sigma_y} | K \rangle \quad (4.44)$$

である。これは

$$D_{MK}^{(\frac{1}{2})}(\beta) = \langle M | \cos \frac{\beta}{2} - i\sigma_y \sin \frac{\beta}{2} | K \rangle \quad (4.45)$$

となる。これより $D_{MK}^{(\frac{1}{2})}(\alpha, \beta, \gamma)$ は

$$D_{MK}^{(\frac{1}{2})}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha M - i\gamma K} \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & -\sin \frac{\beta}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

と求まる。ここで M, K は $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ と行列の上から下へ、左から右へ動くとする。

● $J = 1$ の D 関数

$J = 1$ の場合、まず J_y の表現行列を求める。これは

$$\langle M+1 | J_+ | M \rangle = \sqrt{(J-M)(J+M+1)} \quad (4.47)$$

$$\langle M-1 | J_+ | M \rangle = \sqrt{(J+M)(J-M+1)} \quad (4.48)$$

より求める事ができる。その結果

$$J_y = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

となる。これは $J_y^3 = J_y$ を満たしている事から

$$D_{MK}^{(1)}(\beta) = \langle M | e^{-i\beta J_y} | K \rangle = \langle M | 1 - iJ_y \sin \beta + (\cos \beta - 1)J_y^2 | K \rangle \quad (4.50)$$

となる。ここで J_y の表現を具体的に代入すると

$$D_{MK}^{(1)}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha M - i\gamma K} \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\beta}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta & \sin^2 \frac{\beta}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta & \cos \beta & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta \\ \sin^2 \frac{\beta}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \beta & \cos^2 \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

と求める事ができる。ここで M, K は 1, 0, -1 と行列の上から下へ、左から右へ動くとする。

● 計算結果の比較：

以上の例は微分方程式を解いて求めた式 (4.42) による D 関数の計算結果と一致している。次章で SU(2) の場合の計算を実行するが、その結果も式 (4.42) による D 関数と一致している。

第5章 SU(2) の表現

この章では SU(2) の表現について議論しよう。SU(2) は 3 次元空間の回転群 O(3) と同形である。このため、ここで求めた D 関数は前章で求めた O(3) の D 関数と一致している。しかし SU(2) の場合、その求め方は非常に簡単である。以下に SU(2) の表現行列を求めて行こう。

5.1 SU(2) の基本表現

SU(2) が群を作っている事はすでに証明済みである。ここではその表現を求めて行こう。ここで、SU(2) の群の要素を

$$u = \begin{pmatrix} a & -b \\ b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad u^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & b \\ -b^* & a \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

と書こう。この場合、special unitary の条件は $uu^\dagger = 1$ であり、これから

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (5.2)$$

が求まる。また $\det\{u\} = 1$ も同じ条件となっている。従って自由度は 3 である。

● 表現の基底

SU(2) の表現の基底として $[\xi, \eta]$ を選ぶ事にしよう。この時 $\hat{U}$ を SU(2) 群のオペレータとして

$$\begin{aligned} \hat{U}\xi &= a\xi + b^*\eta \\ \hat{U}\eta &= -b\xi + a^*\eta \end{aligned} \quad (5.3)$$

としよう。これから SU(2) 群の表現を求めて行こう。まずは群のオペレータを基底に演算しよう。この時

$$\begin{aligned}\hat{U}[\xi, \eta] &= [\hat{U}\xi, \hat{U}\eta] = [a\xi + b^*\eta, -b\xi + a^*\eta] \\ &= [\xi, \eta] \begin{pmatrix} a & -b \\ b^* & a^* \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (5.4)$$

となり、この表現行列 $D(\hat{U})$ は

$$D(\hat{U}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b^* & a^* \end{pmatrix} = u \quad (5.5)$$

となって、もとの SU(2) の行列と一致している。これは [2] 次元表現とも呼ばれているもので基本表現である。ここで a, b を

$$\begin{aligned}a &= e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \cos \frac{\beta}{2} \\ b &= e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} \sin \frac{\beta}{2}\end{aligned}\quad (5.6)$$

と選ぶと D 関数は

$$D^{(\frac{1}{2})}(\hat{U}) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \cos \frac{\beta}{2} & -e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} \sin \frac{\beta}{2} \\ e^{\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} \sin \frac{\beta}{2} & e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

となる。これは前章で求めた D 関数である式 (4.46) と一致している。

5.2 $J = 1$ の表現

次に $J = 1$ の表現を求めてみよう。基本になる式は

$$\begin{aligned}\hat{U}\xi &= a\xi + b^*\eta \\ \hat{U}\eta &= -b\xi + a^*\eta\end{aligned}\tag{5.8}$$

である。ここで $J = 1$ の場合の基底 (f_1, f_0, f_{-1}) を以下のように選ぶ。

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi^2, \quad f_0 = \xi\eta, \quad f_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta^2\tag{5.9}$$

ここで

$$\hat{U}[f_1, f_0, f_{-1}] = [\hat{U}f_1, \hat{U}f_0, \hat{U}f_{-1}]\tag{5.10}$$

を計算して行こう。

• $\hat{U}f_1$ の計算

まず、 $\hat{U}f_1$ を計算する。この場合、

$$\hat{U}f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{U}\xi)(\hat{U}\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a\xi + b^*\eta)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^2\xi^2 + (b^*)^2\eta^2 + 2ab^*\xi\eta)\tag{5.11}$$

となる。よって

$$\hat{U}f_1 = a^2f_1 + \sqrt{2}ab^*f_0 + (b^*)^2f_{-1}\tag{5.12}$$

と求まる。

• $\hat{U}f_0$ と $\hat{U}f_{-1}$ の計算

同様にして $\hat{U}f_0$ と $\hat{U}f_{-1}$ を計算すると

$$\hat{U}f_0 = -\sqrt{2}abf_1 + (|a|^2 - |b|^2)f_0 + \sqrt{2}a^*b^*f_{-1}\tag{5.13}$$

$$\hat{U}f_{-1} = b^2f_1 - \sqrt{2}a^*bf_0 + (a^*)^2f_{-1}\tag{5.14}$$

と求まる。これを表現行列の形に直すと

$$\hat{U}[f_1, f_0, f_{-1}] = [f_1, f_0, f_{-1}] \begin{pmatrix} a^2 & -\sqrt{2}ab & b^2 \\ \sqrt{2}ab^* & |a|^2 - |b|^2 & -\sqrt{2}a^*b \\ (b^*)^2 & \sqrt{2}a^*b^* & (a^*)^2 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

となる。これより右辺の行列が D 関数である。ここで

$$\begin{aligned} a &= e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \cos \frac{\beta}{2} \\ b &= e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} \sin \frac{\beta}{2} \end{aligned} \quad (5.16)$$

と選ぶと D 関数は

$$D^{(1)}(\hat{U}) = \begin{pmatrix} e^{-i(\alpha+\gamma)} \cos^2 \frac{\beta}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\alpha} \sin \beta & e^{-i(\alpha-\gamma)} \sin^2 \frac{\beta}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\gamma} \sin \beta & \cos \beta & -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\gamma} \sin \beta \\ e^{i(\alpha-\gamma)} \sin^2 \frac{\beta}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha} \sin \beta & e^{i(\alpha+\gamma)} \cos^2 \frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

となる。これは前章で求めた $J=1$ の D 関数である式 (4.51) と一致している。

5.3 一般の場合の表現行列

ここで一般の次元についてその表現行列を求めよう。計算の仕方はこれまでと全く同じである。これは $N + 1$ 次元の表現を求める事に対応している。まず基底として

$$f_n^{(N)} = \frac{\xi^{N-n}\eta^n}{\sqrt{(N-n)!n!}}, \quad (n = 0, 1, \dots, N) \quad (5.18)$$

と選ぼう。ここで $\boxed{N = 2J, n = J - K}$ と置くと

$$f_K^{(J)} = \frac{\xi^{J+K}\eta^{J-K}}{\sqrt{(J+K)!(J-K)!}} \quad (5.19)$$

となる。これまでと同様に基本になる式は

$$\begin{aligned} \hat{U}\xi &= a\xi + b^*\eta \\ \hat{U}\eta &= -b\xi + a^*\eta \end{aligned} \quad (5.20)$$

である。よって

$$\hat{U}f_K^{(J)} = \frac{(a\xi + b^*\eta)^{J+K}(-b\xi + a^*\eta)^{J-K}}{\sqrt{(J+K)!(J-K)!}} \quad (5.21)$$

となる。これを具体的に計算して行くと

$$\hat{U}f_K^{(J)} = \frac{1}{\sqrt{(J+K)!(J-K)!}} \sum_{s=0}^{J+K} \sum_{r=0}^{J-K} \frac{(J+K)!}{(J+K-s)!s!} (a\xi)^{J+K-s} (b^*\eta)^s \quad (5.22)$$

$$\times \frac{(J-K)!}{(J-K-r)!r!} (a^*\eta)^r (-b\xi)^{J-K-r} \quad (5.23)$$

となる。ここで $r + s = J - M$ により M を導入して和を s から M に変換する。この時、D 関数は

$$\hat{U}f_K^{(J)} = \sum_{M=-J}^J D_{MK}^{(J)}(U) f_M^{(J)} \quad (5.24)$$

と定義されているので、式 (5.27) と比較すれば求まる。その結果

$$D_{MK}^{(J)}(U) = \sum_{r=0}^{J-K} \frac{(a)^{M+K+r} (b^*)^{J-M-r} (-b)^{J-K-r} (a^*)^r}{(M+K+r)!(J-M-r)!(J-K-r)!r!} \quad (5.25)$$

$$\times \sqrt{(J+M)!(J-M)!(J+K)!(J-K)!} \quad (5.26)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} a &= e^{-\frac{i}{2}(\alpha+\gamma)} \cos \frac{\beta}{2} \\ b &= e^{-\frac{i}{2}(\alpha-\gamma)} \sin \frac{\beta}{2} \end{aligned} \quad (5.27)$$

と選ぶと D 関数は

$$D_{MK}^{(J)}(U) = \sum_{r=0}^{J-K} \frac{(-)^{J-K-r} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{M+K+2r} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{2J-M-K-2r}}{(M+K+r)!(J-M-r)!(J-K-r)!r!} \quad (5.28)$$

$$\times e^{-iM\alpha-iK\gamma} \sqrt{(J+M)!(J-M)!(J+K)!(J-K)!} \quad (5.29)$$

と求まった。これは回転群 O(3) で求めた D 関数と一致している。

第6章 SU(3) の群と表現

SU(3) の群とは 3 行 3 列の special unitary 行列の事である。この群は SU(2) の群と比べると格段に難しくなり、その表現を解析的に求める事は基本的にはできていない。しかし素粒子論における粒子の分類には非常に大きな役割をはたしてきた。さらに QCD はカラー自由度として SU(3) のゲージ理論となっている。その意味においても SU(3) の群は物理では良く使われてきたが、その取り扱いはそう簡単とは言えない。ここでは易しい部分だけ取り出して解説しよう。

6.1 SU(3) と素粒子

SU(3) の群が素粒子物理学に応用されたのは半世紀以上も昔の事である。今では $SU_f(3)$ (フレーバー物理) と呼ばれているもので素粒子の記述に応用されて大きな成功を収めたのである。これはアイソスピンを拡張して u , d , s という 3 個のクォークを triplet と見なす事が基本となっている。ここで s -クォークは strange quark を意味している。従って簡単な基底として

$$\psi_1 = u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_3 = s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

を取ることになる。これは 3 次元表現の基底に対応している。この 3 次元表現と言う表記は対称群から来ている。SU(3) と S_3 が準同形であるため、SU(3) の表現を S_3 で表す事が良く行われている。

6.1.1 8 次元表現のバリオン

ここでこの $\mathbf{3}$ 表現による 3 個の直積から 8 次元表現を作ることができる。 $\mathbf{3}$ 表現を 3 個かけると 27 次元の表現が作られるが、この状態は可約である。これを既約状態の和に直すとそこから 8 次元表現が現れるのである。これはクォーク 3 個からバリオンを構成する事に対応している。SU(2) の場合、2 個の粒子 (陽子と中性子) から構成されていて、この 2 個から作られる状態に singlet と triplet 状態があった。これは SU(2) なので $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}$ と書かれる。SU(3) の場合、これがかなり複雑になる。基本表現を $\mathbf{3}$ 次元表現で表しているので 3 個の積は

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{10} \quad (6.2)$$

と言う既約表現の直和となる。この計算は Young diagram の手法に従えば簡単にできるので後の節でその方法を解説しよう。

● 8 個のバリオン

もし 8 次元表現 (8 重項状態) が自然界に対応しているとしたら 8 個のバリオンが見つかる事になっている。これは素粒子を記述する Hamiltonian の相互作用が $SU_f(3)$ の回転に対して不変であるとバリオンの質量が縮退して観測されることになっているからである。そして実験的にも核子の仲間として 8 個のバリオンが見つまっている。それらは

$$P, N, \Lambda, \Sigma^\pm, \Sigma^0, \Xi^\pm \quad (6.3)$$

の素粒子であり、これらの質量は 1 GeV 付近にある。これらの素粒子の量子数を見るとそれぞれの量子数では最低エネルギーの質量を持っていることが分かっている。従ってこれらの素粒子はすべて強い相互作用に関しては安定な粒子である。しかしながら、陽子以外はどれも弱い相互作用により崩壊するため不安定な粒子である。但し Σ^0 に関しては電磁的な相互作用で崩壊する事が知られている。これは Σ^0 と Λ でアイソスピン以外はその量子数が同じなので電磁気的な崩壊が可能となっているからである。

6.1.2 複素共役の表現 3^*

SU(3) の場合、複素共役の表現 3^* は 3 次元表現とは異なっている。一方、これは後程、議論することであるが、SU(2) の場合は複素共役の表現 2^* が 2 次元表現と同値である。このため SU(2) においては 2^* 表現を 2 表現から区別する事はできない。しかしながら SU(3) では 3^* 表現を 3 表現から区別する必要があり、これは物理においては 3^* 表現を反クォークに対応させることができるのでむしろ有効である。従って、クォーク・反クォークによりメソンを作る場合、 3 表現と 3^* 表現の直積を作ることにより

$$3 \otimes 3^* = 1 \oplus 8 \quad (6.4)$$

として 8 次元表現を作ることができるのである。

● 8 個のメソン

これはメソンの状態に対応している。実際、メソンでは質量が低いところに 8 個の状態 (8 重項状態)

$$\pi^\pm, \pi^0, \eta, K^+, K^0, K^-, \bar{K}^0 \quad (6.5)$$

が知られている。これらのメソンはすべて不安定な粒子である。この中で π^0 と η は電磁的な相互作用で $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ などと崩壊するため寿命は非常に短い事が知られている。ちなみに、この π^0 崩壊の実験データは 3 角形図の理論計算により非常に正確に再現されている [5]。一方、それ以外のメソンは弱い相互作用で崩壊するため、例えば $\pi^\pm$ はその崩壊寿命が $\sim 10^{-8}$ 秒の大きさとなっている。

● singlet のメソン

メソンの場合、式 (6.4) には singlet の状態が現われている。この場合、メソンには Pauli 原理は働かないので反対称である必要はない。このため singlet の状態のメソンが存在しても対称性とは矛盾していない。実際、 η' という中間子が観測されていてこれが singlet のメソンに対応していると考えられている。

6.2 SU(3) の Generator とその構造

Special unitary 行列 SU(N) においてその自由度は

$$2N^2 - N^2 - 1 = N^2 - 1 \quad (6.6)$$

となる。ここで最初の $2N^2$ は複素数の変数で $N \times N$ の行列要素である事に依っている。次の N^2 は unitary の条件 $UU^\dagger = 1$ から来ている。そして最後の 1 は special すなわち $\det(U) = 1$ の条件からである。

6.2.1 SU(2) の Generator

SU(2) の場合、3 個の自由度があり、これは generator としては Pauli 行列 τ_x, τ_y, τ_z が対応している。この場合、SU(2) の群の要素 U は

$$U = e^{i\frac{\tau}{2} \cdot \alpha} \quad (6.7)$$

と書かれている。ここで α は任意の定数である。ここで U が special unitary であることから

$$\det(U) = e^{\frac{i}{2}\text{Tr}\{\tau \cdot \alpha\}} = 1 \quad (6.8)$$

よって

$$\text{Tr}\{\tau_x\} = \text{Tr}\{\tau_y\} = \text{Tr}\{\tau_z\} = 0 \quad (6.9)$$

が条件となっている。実際、Pauli 行列

$$\tau_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

はこの条件を満たしている。

6.2.2 SU(3) の Generator

SU(3) の場合、8 個の自由度がある。この generator としては Gell-Mann 行列と呼ばれる λ を用いる。今の場合 λ は

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

と書かれている。これは確かに

$$\text{Tr}\{\lambda_i\} = 0 \quad (i = 1, 8) \tag{6.12}$$

となっている。

● λ_i の交換関係と反交換関係

行列 λ_i には次のような交換関係と反交換関係そして $\text{Tr}\{\lambda_i \lambda_j\}$ の式

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2if_{ijk}\lambda_k \tag{6.13}$$

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = \frac{4}{3}\delta_{ij} + 2id_{ijk}\lambda_k \tag{6.14}$$

$$\text{Tr}\{\lambda_i \lambda_j\} = 2\delta_{ij} \tag{6.15}$$

が成り立っている。ここで f_{ijk} , d_{ijk} は structure constant と呼ばれる定数である。

6.3 Complex Conjugate (複素共役)

SU(2) の場合、複素共役の表現は元の基本表現と同じである。しかし SU(3) では基本表現と複素共役表現では全く異なったものになっている。従って例えば、クォークの状態関数を考える場合、どうしても SU(3) が必要となる。複素共役の表現を反クォークの状態と関連付けるからである。

6.3.1 SU(2) の複素共役の表現

SU(2) の基本的な変換性は

$$\psi' = e^{\frac{i}{2}\delta\alpha\cdot\tau}\psi \simeq \left(1 + \frac{i}{2}\delta\alpha\cdot\tau\right)\psi \quad (6.16)$$

と書かれている。ここで $\delta\alpha$ は無限小であるとしている。この式 (6.16) の複素共役をとると

$$\psi'^* = \left(1 - \frac{i}{2}\delta\alpha\cdot\tau^*\right)\psi^* \quad (6.17)$$

となる。ここで τ^* は

$$\tau_1^* = \tau_1, \quad \tau_2^* = -\tau_2, \quad \tau_3^* = \tau_3 \quad (6.18)$$

となっている。従って

$$(i\tau_2)\tau^*(-i\tau_2) = -\tau \quad (6.19)$$

が示される。

● 複素共役の ψ_c 状態

ここで複素共役の状態 ψ_c を

$$\psi_c = i\tau_2\psi^* \quad (6.20)$$

で定義しよう。この時、SU(2) の基本変換に対して

$$\psi'_c = i\tau_2 \psi^{*'} = i\tau_2 \left(1 - \frac{i}{2} \delta \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\tau}^*\right) \psi^* \quad (6.21)$$

$$= \psi_c - i\tau_2 \frac{i}{2} \delta \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\tau}^* (i\tau_2) (-i\tau_2) \psi^* = \left(1 + \frac{i}{2} \delta \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\tau}\right) \psi_c \quad (6.22)$$

となり ψ_c は SU(2) の基本変換そのものとなっている。従って複素共役の状態 ψ_c は元の状態と同じ変換となっている。まとめると

$$\begin{cases} \psi & : \mathbf{2} \\ \psi_c & : \mathbf{2}^* = \mathbf{2} \end{cases} \quad (6.23)$$

となっている。従って SU(2) では $\mathbf{2}^*$ を $\mathbf{2}$ と区別する事はできない。

6.3.2 SU(3) の複素共役の表現

SU(3) の場合は SU(2) と本質的に異なっている。SU(3) の基本的な変換性は

$$\psi' = e^{\frac{i}{2} \delta \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\lambda}} \psi \simeq \left(1 + \frac{i}{2} \delta \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\lambda}\right) \psi \quad (6.24)$$

$$\psi'^* = e^{-\frac{i}{2} \delta \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\lambda}^*} \psi^* \simeq \left(1 - \frac{i}{2} \delta \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\lambda}^*\right) \psi^* \quad (6.25)$$

である。しかしながらこの場合

$$S \boldsymbol{\lambda}^* S^{-1} = -\boldsymbol{\lambda}^* \quad (6.26)$$

を満たすオペレータ S が存在しないことが証明されている。従って、SU(3) においては複素共役の表現は基本表現とは全く別の表現である。すなわち

$$\mathbf{3}^* \neq \mathbf{3} \quad (6.27)$$

$$(6.28)$$

である。

6.4 Young Diagram

SU(3) の群の直積は通常は可約である。例えば $3 \otimes 3^*$ は 2 個の既約表現の直和

$$3 \otimes 3^* = 1 \oplus 8 \quad (6.29)$$

として書かれている。この規則は Young diagram の方法で簡単に計算できる事が知られている。ここではその規則について具体的な計算手法を解説しよう。この議論は SU(3) に限って行われている。

6.4.1 Young Box とその次元

1 個の Box は 3 に対応している。 3^* は 2 個の Box が縦に並んでいるものである。素粒子論への応用では 1 個の Box をクォークに対応させ、 3^* は反クォークに対応している。バリオンは 3 を 3 回かける事により新しい表現を作る。メソンは 3^* と 3 を掛ける事により作られている。これらは共に 8 表現として実現されている。

$$\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} = 3$$

$$\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} = 3^*$$

図 6.1: 基本のヤング図

ここでバリオンを作る場合の計算を書いて置こう。これは

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$$

となっていて 8 表現が確かに表れている。注意すべき点はこの右辺に 1 表現 (singlet) が現れている点である。この $SU_f(3)$ では関係していないが、QCD の場合、重要な役割を果たしている。有限な color を持つ状態はゲージに依ってしまうので物理的に観測される状態は必ず、singlet になっている必要がある事が分かっている。これは完全反対称の状態に対応している。

6.4.2 対称群 (λ, μ) による表現

対称群においては (λ, μ) による表現が良く使われている。この (λ, μ) による表現の次元は

$$D_{(\lambda, \mu)} = \frac{1}{2}(\lambda + 1)(\mu + 1)(\lambda + \mu + 2) \quad (6.30)$$

となっている。以下に Young Diagram との比較を載せておこう。

● Young Diagram と (λ, μ)

まず Young Diagram と (λ, μ) の関係をしめて置こう。右の図で N_1, N_2, N_3 は Box の数を意味している。この時

$$\lambda = N_1 - N_2$$

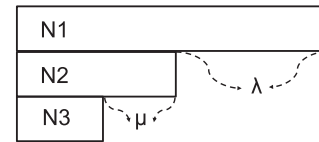
$$\mu = N_2 - N_3$$

である。例えば図 6.1 の Young Diagram は $(1, 0)$ と $(0, 1)$ となっている。このため、この次元は式 (6.30) から

$$(1, 0) = \mathbf{3}$$

$$(0, 1) = \mathbf{3}^*$$

となる事がわかる。



$$\lambda = N_1 - N_2$$

$$\mu = N_2 - N_3$$

図 6.2: ヤング図と (λ, μ)

● Young Diagram と (λ, μ) と次元

ここで2個の重要な Young Diagram と (λ, μ) の具体的な値を上げておこう。これより Young Diagram を見ればその対称性が直ちにわかることになり非常に便利でもある。Box が3個、縦に並んだ図が完全反対称である $(0,0)$ に対応している。一方、その下の図は8表現である。SU(2) の triplet (τ) に対して SU(3) では octet (λ) である。

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} = 1 = (0,0)$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} = 8 = (1,1)$$

図 6.3: ヤング図と (λ, μ)

6.4.3 Young Diagram の積

ここで Young Diagram の積についてその例題をあげて簡単に解説しよう。ここで a が付いた Box は左の Box の右横(上)か下左にのみくっ付ける事ができるという規則である。この規則を応用すると基本的な Young Diagram の積をすべて行う事ができる。これは Young Diagram の積は可約であるがそれを既約表現の和できちんと書かれていると言う事である。これは非常に有用である事が知られている。この場合、それぞれの図は

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline a \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline a \\ \hline \end{array}$$

図 6.4: ヤング図の積

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus 3^*, \quad 3^* \otimes 3 = 8 \oplus 1$$

$$6 \otimes 3 = 8 \oplus 10$$

となっている。但し $6 \otimes 3$ の図は省略している。

● $8 \otimes 8$ の計算法

この $8 \otimes 8$ の積の計算法をしっかりと理解するとほとんどの場合の積の計算ができるようになるものと思われる。ここで基本的な規則として、前節で解説した規則に加えて a は縦には並ぶ事は出来ない事がある。これは反対称性と関係している。次に、 b は同じ列で a の左には来てはいけない規則が重要である。これらの規則の下で Young Diagram の積を行うと正しい既約表現の和が求める事ができる。

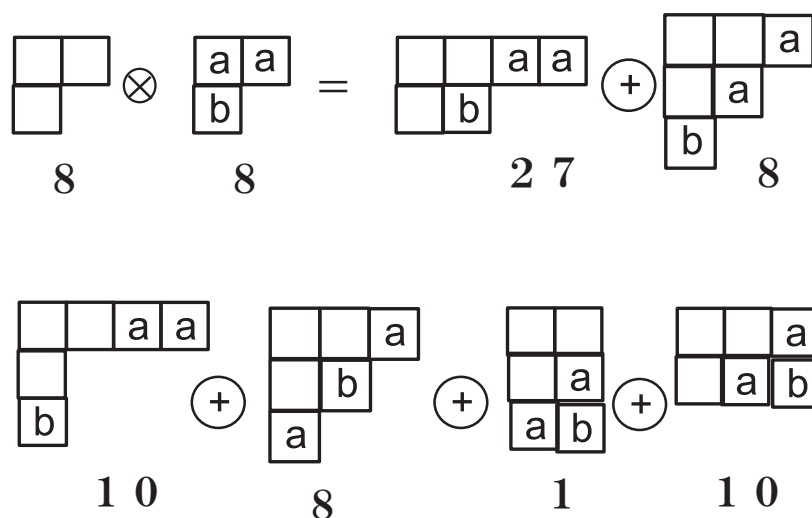


図 6.5: ヤング図の積 (8×8)

ここでこのヤング図の積を式で書いておこう。これは

$$8 \otimes 8 = 27 \oplus 8 \oplus 10 \oplus 8 \oplus 1 \oplus 10$$

となっている。

第7章 既約分解

この章での議論は回転群に限っての取り扱いとなっている。基本的には可約表現を既約テンソルの直和で書いた場合の結果をここに記している。具体的に、2個のランク1のテンソルの直積は可約であり、これを既約表現の直和と分解する方法について解説しよう。また、この章の後半では Landau-Yang の定理について解説しよう。この定理は群論と直接関係している問題である。群論における対称性をきちんと理解していると定理の証明が簡単であることがわかるのである。さらにこの定理は自然現象に直接関係していることでもあり、群論の応用としても面白い問題であると言えよう。

7.1 スピン $1 \otimes 1$ は 0 と 1 と 2 の直和

2個のスピン1の状態の和は0と1と2の既約表現の直和になっている。この事を以下に見て行こう。

7.1.1 ベクトル

まず、通常ベクトルを考えよう。例えば空間座標 $\mathbf{r}$ や運動量 $\mathbf{p}$ は球面調和関数 $Y_{\ell m}$ の $\ell = 1$ である Y_{1m} に比例している。この事を証明するのは簡単であり、以下のように示すことができる。これは $\hat{r}_{\pm}$, $\hat{r}_0$ が

$$\begin{aligned}\hat{r}_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}r}(x \pm iy) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i\varphi} = \mp \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,\pm 1}(\theta, \varphi) \\ \hat{r}_0 &= \frac{z}{r} = \cos \theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,0}(\theta, \varphi)\end{aligned}\tag{7.1}$$

であることから理解される。このことからベクトルはランク1のテンソルであることがわかる。これは通常のベクトルであればすべてこの規則に従っている。しかしながら例えばアイソスピン空間でのベクトルはこの座標系の空間に属していないのでその取扱いには注意が必要である。

7.1.2 既約分解

ここで2個の Y_{1m} の直積 $\{Y_1(1) \otimes Y_1(2)\}$ は

$$\{Y_1(1) \otimes Y_1(2)\} = (Y_1(1) \cdot Y_1(2)) \oplus (Y_1(1) \times Y_1(2)) \oplus [Y_1(1) \otimes Y_1(2)]^{(2)}$$

のように3個の既約表現の直和となっている。以下にこの式の簡単な説明をしておこう。ベクトルは3個の成分があるためベクトル $\mathbf{r}_1$ とベクトル $\mathbf{r}_2$ の掛け算としては9個の項がでてくる。この場合、それぞれの成分として、スカラーが1個、ベクトルが3個そして2階のテンソルが5個となっている。ここで、それぞれの項のランクを検証しよう。 $\hat{r}_\pm, \hat{r}_0$ は

$$\begin{aligned}\hat{r}_\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}r}(x \pm iy) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i\varphi} = \mp \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,\pm 1}(\theta, \varphi) \\ \hat{r}_0 &= \frac{z}{r} = \cos \theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,0}(\theta, \varphi)\end{aligned}$$

なので、Reduction の式は

$$\{\hat{\mathbf{r}}_1 \otimes \hat{\mathbf{r}}_2\} = (\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2) \oplus (\hat{\mathbf{r}}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_2) \oplus [\mathbf{r}_1 \otimes \hat{\mathbf{r}}_2]^{[2]} \quad (7.2)$$

に対応している。

7.2 各項の性質

分解したそれぞれの項の性質を見て行こう。但し、第3項の2階のテンソルの項の議論はここでは省略しよう。

7.2.1 Scalar $S = \hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2$

最初の項であるスカラー $(\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2)$ を S としよう。これは

$$\begin{aligned} S &= (\hat{r}_1)_+(\hat{r}_2)_- + (\hat{r}_1)_-(\hat{r}_2)_+ + (\hat{r}_1)_0(\hat{r}_2)_0 \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left(-Y_{1,1}(\theta_1, \varphi_1)Y_{1,-1}(\theta_2, \varphi_2) - Y_{1,-1}(\theta_1, \varphi_1)Y_{1,1}(\theta_2, \varphi_2) \right. \\ &\quad \left. + Y_{1,0}(\theta_1, \varphi_1)Y_{1,0}(\theta_2, \varphi_2) \right) \end{aligned} \quad (7.3)$$

となる。ここで $\mathbf{J} = \boldsymbol{\ell}_1 + \boldsymbol{\ell}_2$ により全角運動量 $\mathbf{J}$ を定義しよう。この時、少しだけ面倒な計算を実行すると

$$\mathbf{J}^2 S = 0 \quad (7.4)$$

が証明される。これより S の状態は全角運動量 $\mathbf{J}^2$ の固有関数であり、その固有値は $J = 0$ である事がわかる。

7.2.2 Vector $\mathbf{V} = \hat{\mathbf{r}}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_2$

第2項であるベクトル $(\hat{\mathbf{r}}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_2)$ を $\mathbf{V}$ としよう。ここでは V_0 だけ考えよう。

$$\begin{aligned} V_0 &= i[(\hat{r}_1)_+(\hat{r}_2)_- - (\hat{r}_1)_-(\hat{r}_2)_+] \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left(-Y_{1,1}(\theta_1, \varphi_1)Y_{1,-1}(\theta_2, \varphi_2) + Y_{1,-1}(\theta_1, \varphi_1)Y_{1,1}(\theta_2, \varphi_2) \right) \end{aligned} \quad (7.5)$$

となる。ここで、少し面倒な計算を行うと

$$\mathbf{J}^2 V_0 = 2V_0 = J(J+1)V_0 \quad (7.6)$$

が証明される。これより $\mathbf{V}$ 状態の全角運動量は $J = 1$ である事がわかる。

7.2.3 S, V の対称性

この式から 1 と 2 の入れ替えに対して S は対称、 V は反対称であることがわかる。また、第 3 項目の 2 階のテンソルの項は対称であることが知られている。この対称性は球面調和関数 $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ の性質と密接に関係している。実際、 $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ は ℓ が偶数の場合は対称であり、奇数の場合は反対称の性質と関連がある。今の場合、1 と 2 の入れ替えは空間反転と関係しているが、球面調和関数は空間反転に対して

$$Y_{\ell m}(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-)^{\ell} Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (7.7)$$

となっている。 $\ell = 0, 2$ は対称であり、これはランクの 0, 2 と確かに一致している。

7.3 式 (7.4), (7.6) の証明に必要な式のまとめ

$$L_z Y_{1m} = m Y_{1m} \quad (7.8)$$

$$L_+ Y_{1,-1} = \sqrt{2} Y_{1,0} \quad (7.9)$$

$$L_+ Y_{1,0} = \sqrt{2} Y_{1,1} \quad (7.10)$$

$$L_- Y_{1,1} = \sqrt{2} Y_{1,0} \quad (7.11)$$

$$L_- Y_{1,0} = \sqrt{2} Y_{1,-1} \quad (7.12)$$

$$\mathbf{L}^2 = L_+ L_- + L_z^2 - L_z \quad (7.13)$$

$$\boldsymbol{\ell}_1 \cdot \boldsymbol{\ell}_2 = \frac{1}{2}(\ell_1^+ \ell_2^- + \ell_1^- \ell_2^+) + \ell_1^z \ell_2^z \quad (7.14)$$

7.4 Group Theory for Landau-Yang Theorem

Photon is a bose particle with a spin of 1. Thus two photon states must be symmetric under the exchange of two photon states, and this is just what we should keep in mind. Now two photon states can be reduced to the total spin states of 0, 1 and 2 where the total spin operator $\mathbf{J}$ is the sum of spin operator of photons $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$. Therefore, $\mathbf{J}$ is written as $\mathbf{J} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$. In what follows we prove that a massive particle with spin 1 (here we consider Z^0) cannot decay into the two photon states. This is the result of the kinematics, and we see that the two photons must be in a symmetric state due to the bose nature of photons while the total spin 1 state reduced from $1 \otimes 1$ should be anti-symmetric. This is just the essence of the Landau-Yang theorem.

7.4.1 Reduction of spin $1 \otimes 1$ states

Here we present an example of the reduction of spin $1 \otimes 1$ states in terms of $O(3)$ group theory where the spin operator $\mathbf{s}$ is replaced by the angular momentum operator $\mathbf{\ell}$, for simplicity. In this case, the equation of reduction of $1 \otimes 1$ states can be written as

$$\{\hat{\mathbf{r}}_1 \otimes \hat{\mathbf{r}}_2\} = (\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2) \oplus (\hat{\mathbf{r}}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_2) \oplus [\hat{\mathbf{r}}_1 \otimes \hat{\mathbf{r}}_2]^{[2]} \quad (7.15)$$

where $\hat{r}_\pm$, $\hat{r}_0$ can be defined as

$$\begin{aligned} \hat{r}_\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}r}(x \pm iy) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i\varphi} = \mp \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,\pm 1}(\theta, \varphi) \\ \hat{r}_0 &= \frac{z}{r} = \cos \theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{1,0}(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

In this case, eq.(7.15) can be rewritten in terms of spherical harmonics $Y_{\ell m}$ as

$$\{Y_1(1) \otimes Y_1(2)\} = (Y_1(1) \cdot Y_1(2)) \oplus (Y_1(1) \times Y_1(2)) \oplus [Y_1(1) \otimes Y_1(2)]^{(2)}$$

• **Scalar**

Here, the first term $S = \hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2$ in the r.h.s of eq.(7.15) corresponds to a scalar state. This is obviously symmetric under the interchange of $1 \leftrightarrow 2$. Further we can prove

$$\mathbf{J}^2 S = 0 \quad (7.16)$$

and thus the S state has a spin zero.

• **Vector**

The second term $\mathbf{V} = \hat{\mathbf{r}}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_2$ in the r.h.s of eq.(7.15) corresponds to a vector state. This is anti-symmetric under the interchange of $1 \leftrightarrow 2$. Now the spin 1 state should correspond to the vector state. Here we should prove that the vector state $\mathbf{V}$ has a spin 1 as the eigenvalue of total angular momentum $\mathbf{J}$. Namely one may prove

$$\mathbf{J}^2 \mathbf{V} = 2\mathbf{V} \quad (7.17)$$

which means that the eigenvalue J is $J = 1$. In order to prove it explicitly, we may only consider V_0 term since this is, in fact, without loss of generality. Now V_0 can be written as

$$\begin{aligned} V_0 &= i[(\hat{r}_1)_+(\hat{r}_2)_- - (\hat{r}_1)_-(\hat{r}_2)_+] \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} [-Y_{1,1}(\theta_1, \varphi_1)Y_{1,-1}(\theta_2, \varphi_2) + Y_{1,-1}(\theta_1, \varphi_1)Y_{1,1}(\theta_2, \varphi_2)] \end{aligned}$$

After some tedious but straightforward calculations, one can find

$$\mathbf{J}^2 V_0 = 2V_0 \quad (7.18)$$

which is just the same as eq.(7.17).

7.4.2 Rank k Tensor and Tensor Product

A tensor with rank k is denoted as $T^{(k,\kappa)}$, and the tensor product of two tensors $T_1^{(k_1)}$ and $T_2^{(k_2)}$ is reducible and can be written in terms of the sum of irreducible tensors as

$$T_1^{(k_1)} \otimes T_2^{(k_2)} = [T_1^{(k_1)} \otimes T_2^{(k_2)}]^{(\ell)} \oplus \dots \oplus [T_1^{(k_1)} \otimes T_2^{(k_2)}]^{(m)} \quad (7.19)$$

where $\ell = |k_1 - k_2|$ and $m = k_1 + k_2$ are the conditions from the summation rule.

• Rank One Tensor Product

Here, we discuss the tensor product of rank one tensors and thus eq.(7.19) becomes

$$T_1^{(1)} \otimes T_2^{(1)} = [T_1^{(1)} \otimes T_2^{(1)}]^{(0)} \oplus [T_1^{(1)} \otimes T_2^{(1)}]^{(1)} \oplus [T_1^{(1)} \otimes T_2^{(1)}]^{(2)}. \quad (7.20)$$

Now the first term $[T_1^{(1)} \otimes T_2^{(1)}]^{(0)}$ should correspond to the scalar product and can be written as $(\mathbf{T}_1^{(1)} \cdot \mathbf{T}_2^{(1)})$. This is symmetric under the interchange of $1 \leftrightarrow 2$.

• Vector Product

The second term in eq.(7.20) should correspond to the vector product and can be written as $(\mathbf{T}_1^{(1)} \times \mathbf{T}_2^{(1)})$. This is anti-symmetric under the interchange of $1 \leftrightarrow 2$ since

$$(\mathbf{T}_1^{(1)} \times \mathbf{T}_2^{(1)}) = -(\mathbf{T}_2^{(1)} \times \mathbf{T}_1^{(1)}). \quad (7.21)$$

7.4.3 Landau-Yang Theorem

Photon has a spin 1 and thus it should correspond to the state of rank one tensor. Therefore, two photon states can make the states of rank 0, rank 1 and rank 2 from the group theoretical condition. However, there is a physical condition which is related to the bose nature of photon. Since photon is a bose particle, two photon states must be symmetric. Therefore, this physical requirement excludes the possibility of rank 1 tensor state (vector product) of the two photon state since it is anti-symmetric as we see above. Therefore, massive spin 1 states (such as Z^0 particle) cannot decay into two photon state. On the other hand, massive states (such as π^0 particle) can decay into two photons, which is indeed observed. This is just the Landau-Yang theorem.

第8章 Quantum Chromodynamics

Quantum chromodynamics is the theoretical frame work in which one can treat the physics of the strong interactions. This is the non-abelian gauge field theory, and it cannot be solved in the perturbation theory since the free Lagrangian densities of quarks and gluons are not gauge invariant. In the perturbation theory, we describe all the physical observables in terms of the properties of quarks and gluons, and if they are not related to physical observables, then there is no point of employing the perturbation theory.

8.1 Introduction

Physics of the strong interactions is described by quantum chromodynamics (QCD), and this is by now well established. Many experimental observations support that the number of the color must be three, and interactions between quarks should be mediated by gluons which are gauge bosons with colors. In addition to colors, quarks have six flavors of up, down, strange, charm, bottom and top.

However, it is extremely difficult to solve QCD in a non-perturbative fashion and obtain any reasonable spectrum of hadrons from QCD since quantum field theory has infinite degrees of freedom. At the present stage, one should make some kind of approximations in order to obtain physical observables. The perturbative treatment is the only possible method to calculate physical observables. However, there is a serious problem in the unperturbed QCD Hamiltonian since there are no free quark

and gluon states in physical space, and indeed the unperturbed Fock space is gauge dependent. In addition, we present an inherent problem connected to the gauge non-invariance of the unperturbed and interaction Lagrangian densities due to the non-conservation of the quark color current. Therefore there is a basic difficulty of carrying out the perturbative expansion. Here, we clarify what are the physical observables in QCD since some of known quantities are not gauge invariant and thus they cannot be observed.

8.2 Properties of QCD with $SU(N_c)$ Colors

In this section, we explain some fundamental properties of QCD which are important for the understanding of the difficulties in QCD.

8.2.1 Lagrangian Density of QCD

The Lagrangian density of QCD for quark fields ψ with $SU(N_c)$ colors is described as

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - g\gamma^\mu A_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}\text{Tr}\{G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\} \quad (8.1)$$

where $G_{\mu\nu}$ is written as

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \quad (8.2)$$

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \equiv \sum_{a=1}^{N_c^2-1} A_\mu^a T^a. \quad (8.3)$$

Here A_μ^a denotes the gluon fields and T^a corresponds to the generator of $SU(N_c)$ group and satisfies the following commutation relations

$$[T^a, T^b] = iC^{abc}T^c \quad (8.4)$$

where C^{abc} denotes the structure constant of the group generators. For $SU(2)$ case, the structure constant C^{abc} becomes just the anti-symmetric symbol ϵ_{abc} . In eq.(8.1),

$\text{Tr} \{ \}$ means the trace of the group generators of $SU(N_c)$, and the generators T^a are normalized according to

$$\text{Tr}\{T^a T^b\} = \frac{1}{2}\delta^{ab}. \quad (8.5)$$

Therefore, the last term of eq.(8.1) can be rewritten as

$$\frac{1}{2}\text{Tr}\{G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\} = \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu} \quad (8.6)$$

where $G_{\mu\nu}^a$ is described as

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gC^{abc}A_\mu^b A_\nu^c. \quad (8.7)$$

m denotes the fermion mass, and at the massless limit, the Lagrangian density has a chiral symmetry.

8.2.2 Infinitesimal Local Gauge Transformation

QCD Lagrangian density is invariant under the following infinitesimal local gauge transformation

$$\psi' = (1 - ig\chi)\psi = (1 - igT^a\chi^a)\psi, \quad \text{with } \chi = T^a\chi^a \quad (8.8)$$

$$\begin{aligned} A'_\mu &= A_\mu + ig[A_\mu, \chi] + \partial_\mu\chi \quad \text{or} \\ A'^a_\mu &= A^a_\mu - gC^{abc}A^b_\mu\chi^c + \partial_\mu\chi^a \end{aligned} \quad (8.9)$$

where χ is infinitesimally small. By defining the covariant derivative D_μ by

$$D_\mu = \partial_\mu + igT^a A^a_\mu \quad (8.10)$$

one can see

$$D'_\mu\psi' = [\partial_\mu + igT^a(A^a_\mu - gC^{abc}A^b_\mu\chi^c + \partial_\mu\chi^a)](1 - igT^a\chi^a)\psi \quad (8.11)$$

$$= (1 - igT^a\chi^a)D_\mu\psi. \quad (8.12)$$

Therefore, one can prove that

$$\bar{\psi}' i\gamma^\mu D'_\mu \psi' = \bar{\psi} i\gamma^\mu D_\mu \psi \quad (8.13)$$

$$G'_{\mu\nu} = (1 - igT^a\chi^a)G_{\mu\nu}(1 + igT^a\chi^a) \quad (8.14)$$

and one obtains

$$\text{Tr}\{G'_{\mu\nu}G'^{\mu\nu}\} = \text{Tr}\{(1 - igT^a\chi^a)G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}(1 + igT^a\chi^a)\} = \text{Tr}\{G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\}. \quad (8.15)$$

Therefore, one sees that the Lagrangian density of eq.(8.1) is invariant under the infinitesimal local gauge transformation.

8.2.3 Local Gauge Invariance

Now, the local gauge transformation with finite χ is defined as

$$A'_\mu = U(\chi)A_\mu U^\dagger(\chi) - \frac{i}{g}U(\chi)\partial_\mu U^\dagger(\chi) \quad (8.16)$$

$$\psi' = U(\chi)\psi \quad (8.17)$$

where $U(\chi)$ is described in terms of χ as

$$U(\chi) = e^{-ig\chi}. \quad (8.18)$$

Here, one can easily prove the following equations

$$\bar{\psi}' i\gamma^\mu D'_\mu \psi' = \bar{\psi} i\gamma^\mu D_\mu \psi \quad (8.19)$$

$$G'_{\mu\nu} = U(\chi)G_{\mu\nu}U(\chi)^{-1} \quad (8.20)$$

and by making use of the following identity

$$\sum_{a=1}^{n_a} G'^a_{\mu\nu} G'^{a,\mu\nu} = 2\text{Tr}\{G'_{\mu\nu}G'^{\mu\nu}\} = 2\text{Tr}\{G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}\} = \sum_{a=1}^{n_a} G^a_{\mu\nu} G^{a,\mu\nu} \quad (8.21)$$

the gauge invariance of the Lagrangian density is easily seen.

8.3 Noether Current in QCD

The QCD Lagrangian density is invariant under the following infinitesimal global gauge transformation

$$\psi' = (1 - igT^a\theta^a)\psi \quad (8.22)$$

$$A'^a_\nu = A^a_\nu - gC^{abc}A^b_\nu\theta^c \quad (8.23)$$

where θ^a is an infinitesimally small constant. In this case, one finds

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi', \partial_\mu\psi', A'^a_\nu, \partial_\mu A'^a_\nu) - \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi, A^a_\nu, \partial_\mu A^a_\nu) = 0. \quad (8.24)$$

By making use of the equations of motion, one obtains

$$\delta\mathcal{L} = \left[-ig(i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu T^a\psi + i\bar{\psi}\gamma^\mu T^a\partial_\mu\psi) \right. \quad (8.25)$$

$$\left. -g(\partial_\mu G^{\mu\nu,c}C^{bca}A^b_\nu + G^{\mu\nu,c}C^{bca}\partial_\mu A^b_\nu) \right] \theta^a = 0. \quad (8.26)$$

Therefore, one easily finds that

$$\partial_\mu (\bar{\psi}\gamma^\mu T^a\psi + C^{abc}G^{\mu\nu,b}A^c_\nu) = 0. \quad (8.27)$$

This means that the Noether current

$$I^{\mu,a} \equiv j^{\mu,a} + C^{abc}G^{\mu\nu,b}A^c_\nu \quad (8.28)$$

is indeed conserved. That is,

$$\partial_\mu I^{\mu,a} = 0 \quad (8.29)$$

where the quark color current j^a_μ is defined as

$$j^a_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu T^a\psi. \quad (8.30)$$

Thus, the quark color current alone cannot be conserved, and therefore there is no conservation of the quark color charge. This is consistent with the fact that the color current of quarks is not a gauge invariant quantity.

8.3.1 Conserved Charge of Color Octet State

From eqs.(8.29), one sees that the color octet vector current of one quark and one gluon state $I^{\mu,a}$ is conserved. Since $\partial_\mu I^{\mu,a}$ is a gauge invariant quantity, one can integrate it over all space

$$\int \partial_\mu I^{\mu,a} d^3r = \frac{d}{dt} \int I_0^a d^3r + \int \nabla \cdot \mathbf{I}^a d^3r = \frac{dQ_I^a}{dt} + \int \mathbf{I}^a \cdot d\mathbf{S} = \frac{dQ_I^a}{dt} = 0 \quad (8.31)$$

where the color charge Q_I^a is defined as

$$Q_I^a = \int I_0^a d^3r. \quad (8.32)$$

Therefore, the color charge Q_I^a is indeed a conserved quantity, and there may be some chance that the color charge Q_I^a becomes a physical observable.

8.3.2 Gauge Non-invariance of Interaction Lagrangian Density

The interaction Lagrangian density of QCD that involves quark currents is written

$$\mathcal{L}_I = -gj_\mu^a A^{\mu,a}. \quad (8.33)$$

Now, the interaction Lagrangian density $\mathcal{L}_I$ is not gauge invariant, and therefore if one wishes to make any perturbation calculations involving the quark color currents, then one should check it in advance whether one can make the gauge invariant quark-quark interactions. The interaction Lagrangian density is transformed into a new shape under the infinitesimal local gauge transformation

$$\mathcal{L}_I = -gj_\mu^a (A^{\mu,a} + \partial^\mu \chi^a) \quad (8.34)$$

where the second term is a gauge dependent term. In the same way as QED case, one can rewrite the second term by making use of the conserved current as

$$-gj_\mu^a \partial^\mu \chi^a = -g\partial^\mu (j_\mu^a \chi^a) + gC^{abc} \chi^a \partial^\mu G_{\mu\nu}^b A^{\nu,c}. \quad (8.35)$$

The first term is a total derivative and thus does not contribute. However, there is no way to erase the second term which depends on χ^a . Therefore, one sees that one cannot make any simple-minded perturbative calculations of quark-quark interactions in QCD, contrary to the QED case where the electron-electron interaction is well defined and calculated. This means that there is a difficulty of defining any potential between quarks, and this is of course consistent with the picture that the color charge of quarks are gauge dependent and is not a conserved quantity.

8.4 Equation of Motion

The Lagrange equations of motion now become

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - g\gamma^\mu A_\mu - m_0)\psi &= 0 \\ \partial_\mu G^{\mu\nu,a} &= gI^{\nu,a} = g \left(j^{\nu,a} + C^{abc} G^{\nu\rho,b} A_\rho^c \right). \end{aligned} \quad (8.36)$$

One can see that the equation of motion for the gauge fields has gauge field source terms in addition to the quark color current. Even though the equation of motion looks similar to that of QED, physics of QCD must be very different from the QED case. Now, one can introduce the color electric field $\mathbf{E}^a$ and the color magnetic field $\mathbf{B}^a$ by

$$\mathbf{E}^a = - \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^a - \nabla A_0^a - g C^{abc} \mathbf{A}^b A_0^c \quad (8.37)$$

$$\mathbf{B}^a = \nabla \times \mathbf{A}^a + \frac{1}{2} g C^{abc} \mathbf{A}^b \times \mathbf{A}^c. \quad (8.38)$$

It should be noted that the fields $\mathbf{E}^a$ and $\mathbf{B}^a$ themselves are not gauge invariant, contrary to the QED case. Now, eq.(8.36) can be rewritten in terms of $\mathbf{E}^a$ and $\mathbf{B}^a$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^a = g j_a^0 - g C^{abc} \mathbf{A}^b \cdot \mathbf{E}^c \quad (8.39)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}^a - \frac{\partial \mathbf{E}^a}{\partial t} = g \mathbf{j}^a - g C^{abc} \left(A_0^b \mathbf{E}^c + \mathbf{A}^b \times \mathbf{B}^c \right). \quad (8.40)$$

From eq.(8.36), one sees that the current $I^{\nu,a}$ is a conserved quantity, $\partial_\mu I^{\mu,a} = 0$. In order to solve the dynamics of QCD, it should be inevitable to take into account the conservation of this current $I^{\nu,a}$. A question is, of course, as to in which way one should consider this effect of the current conservation in QCD dynamics, and this is still an open question.

付 録 A パリティ変換と奇関数積分

見かけ上、線形か Log 発散をもつ場合の奇関数積分について考えてみよう。この場合、被積分関数にパリティ変換を行うと一見、その発散が消えないように見える場合について議論しよう。しかし実際にはこの発散は出てこないことが証明される。

A.1 簡単な例題

今、簡単な例題として

$$I = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \left\{ \frac{x}{(x-a)^2 + m^2} - \frac{x}{(x+a)^2 + m^2} \right\} dx \quad (\text{A.1})$$

を考えよう。これは括弧の中を先に計算すれば

$$\left\{ \frac{x}{(x-a)^2 + m^2} - \frac{x}{(x+a)^2 + m^2} \right\} = \frac{4x^2 a}{\{(x-a)^2 + m^2\}\{(x+a)^2 + m^2\}} \quad (\text{A.2})$$

となって明らかに有限である。Log 発散は存在しない。

● パリティ変換

一方、式 (A.1) の第 2 項をパリティ変換すると

$$I = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{2x}{(x-a)^2 + m^2} dx \quad (\text{A.3})$$

となって、一見、Log 発散のように見える。

ところがこの式は最初の積分範囲 ($-\Lambda$ から Λ) を ($-\Lambda$ から 0 と 0 から Λ) に書き換え、さらにパリティ変換で $-\Lambda$ から 0 を 0 から Λ に書き換えると

$$I = \int_0^\Lambda \left\{ \frac{2x}{(x-a)^2 + m^2} - \frac{2x}{(x+a)^2 + m^2} \right\} dx \quad (\text{A.4})$$

となる。そしてこれを式 (A.2) のように書き直すとやはり有限である事がわかる。

● 奇関数積分

これは奇関数積分の項が消えて、それ以外が残った例である。三角形図の場合は、奇関数積分で 1 次発散が消えた事も事実であるが、実際には γ 行列における計算で消えている。これが群論的な計算結果と一致している。従って三角形図では積分する前に 2 個の図を足し算して、 γ 行列の計算をする事が絶対条件となっている。

関連図書

- [1] M. Hamermesh, “Group Theory and its Application to Physical Problems”,
(Addison-Wesley Publishing Company, 1962)
- [2] 犬井鉄郎、田辺行人、小野寺嘉孝, “応用群論”
(裳華房, 1978)
- [3] J.D. Bjorken and S.D. Drell, “Relativistic Quantum Mechanics”,
(McGraw-Hill Book Company, 1964)
- [4] J.J. Sakurai, ”Advanced Quantum Mechanics”, (Addison-Wesley, 1967)
- [5] K. Nishijima, “Fields and Particles”, (W.A. Benjamin, INC, 1969)
- [6] T. Fujita, “Symmetry and Its Breaking in Quantum Field Theory”
(Nova Science Publishers, 2011, 2nd edition)
- [7] T. Fujita and N. Kanda, “Fundamental Problems in Quantum Field Theory”
(Bentham Publishers, 2013)